

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Черкаський національний університет  
імені Богдана Хмельницького

# **ВІСНИК ЧЕРКАСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Серія  
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА.  
ІНФОРМАТИКА

Виходить 2 рази на рік  
Заснований у березні 1997 року

**№ 1-2 (2017)**

**ЧЕРКАСИ – 2017**

**Засновник, редакція, видавець і виготовлювач –  
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького  
Свідоцтво про державну перереєстрацію КВ № 21396-11196Р від 26.06.2015**

Матеріали «Вісника» присвячені прикладним і фундаментальним науковим дослідженням у галузі інформаційних технологій, моделювання систем, прикладних інформаційних систем у різних сферах діяльності, математичному моделюванню фізичних процесів, математичної фізики, інформаційних і обчислювальних технологій. У публікаціях відображаються різні аспекти досліджень учених і фахівців у сфері обчислювальних мереж і систем, елементів і пристроїв обчислювальної техніки та систем управління, програмного забезпечення,

Наукові статті збірника рекомендовані аспірантам, студентам, викладачам вищої школи, а також усім, хто цікавиться проблематикою прикладної математики та інформатики.

Журнал входить до переліку наукових фахових видань України з фізико-математичних, технічних наук (Наказ МОН України від 12 травня 2015 р. № 528).

Випуск №1-2 наукового журналу Вісник Черкаського університету, серія: «Прикладна математика. Інформатика» рекомендовано до друку та до поширення через мережу Інтернет Вченою радою Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького (протокол №3 від 14 грудня 2017 року).

*Журнал реферується Українським реферативним журналом "Джерело" (засновники: Інститут проблем реєстрації інформації НАН України та Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського).*

**Головна редакційна колегія:**

*Черевко О.В., д.е.н., проф. (головний редактор); Боєчко Ф.Ф., член-кор. НАПН України, д.б.н., проф. (заступник головного редактора); Корновенко С.В., д.і.н., проф. (заступник головного редактора); Кирилюк Є.М., д.е.н., проф. (відповідальний секретар); Архипова С.П., д.пед.н., проф.; Біда О.А., д.пед.н., проф.; Гнезділова К.М., д.пед.н., проф.; Головня Б.П., д.т.н., доц.; Гусак А.М., д.ф.-м.н., проф.; Десятов Т.М., д.пед.н., проф.; Земзюліна Н.І., д.і.н., проф.; Жаботинська С.А., д.філол.н., проф.; Кузьмінський А.І., член-кор. НАПН України, д.пед.н., проф.; Кукурудза І.І., д.е.н., проф.; Лизогуб В.С., д.б.н., проф.; Ляшенко Ю.О., д.ф.-м.н., доц.; Марченко О.В., д.філос.н., проф.; Масненко В.В., д.і.н., проф.; Мінаєв Б.П., д.х.н., проф.; Морозов А.Г., д.і.н., проф.; Перехрест О.Г., д.і.н., проф.; Поліщук В.Т., д.філол.н., проф.; Селіванова О.О., д.філол.н., проф.; Чабан А.Ю., д.і.н., проф.; Шпак В.П., д.пед.н., проф.*

**Редакційна колегія серії:**

*Головня Б.П., д.т.н., проф. (відповідальний редактор); Гришко Л.В., к.пед.н., доц. (відповідальний секретар); Авраменко В.С., к. фіз.-мат. н., доц.; Богатирьов О.О., к. фіз.-мат. н., доц.; Гаєв Є.О., д.т.н., проф.; Гусак А.М., д.ф.-м.н., проф.; Єришов С.В., д.т.н., проф.; Заурбеков Н.С., д.т.н., проф. (Казахстан); Златкін А.А., д.т.н., проф.; Круковський П.Г., д.т.н., проф.; Кузьмук В.В., д.т.н., проф.; Лагно В.І., д.ф.-м.н., Леценко Ю.Ю., к. фіз.-мат. н., доц.; Марек Данилевский, д-р габілітований, проф. (Польща); Мовчан В.Т., д.ф.-м.н., проф.; Онищенко Б.О., к. фіз.-мат. н., доц.; Приходько О.А., д.ф.-м.н., проф.; Соловійов В.М., д.ф.-м.н., проф.; Стеблянюк П.О., д.ф.-м.н., проф.; Супруненко О.О., к.т.н., доц.; Тесля Ю.М., д.т.н., проф.; Хенрик Лещинский, д-р габілітований, проф. (Польща); Шрайбер О.А., д.т.н., проф.*

*За дотримання права інтелектуальної власності, достовірність матеріалів та обґрунтування висновків  
відповідають автори*

**Адреса редакційної колегії:**

18000, Черкаси, бульвар Шевченка, 81,  
Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького,  
кафедра прикладної математики та інформатики. Тел. (0472) 36-13-55  
web-сайт: <http://ami-ejournal.cdu.edu.ua/index>.  
e-mail: (herald\_pm@ukr.net)

© Черкаський національний  
університет, 2017

## СЕКЦІЯ «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

UDK 519.6/519.25

PACS 02.50.-r, 02.60.-x, 02.60.Ed

**GUK Vitaliy,**  
The Bohdan Khmelnytsky National  
University of Cherkasy, Department of  
Computing Engineering, Intellectual and  
Management Systems, Associative Professor  
of Department of Computer-Aided System  
Software  
e-mail: vitality.guk.15@gmail.com

**STETSENKO Anatoliy,**  
The Bohdan Khmelnytsky National  
University of Cherkasy, Educational-  
Scientific Institute of Physical Culture, Sports  
and Health, Professor at the Department of  
Sports Discipline  
e-mail: stet@ukr.net

### METHOD OF MATHEMATICAL PROCESSING OF RESULTS IN POWERLIFTING FOR DETERMINING THE GREATEST ATHLETES IN THE OVERALL SCORE

**Abstract.** *Special coefficients and formulas used in powerlifting for determining the strongest powerlifters, regardless of division into bodyweight categories, require changes from time to time for more objective assessment of competitive results among all contestants. Lately, Wilks formula is used for this. However, according to the ratings of the strongest powerlifters calculated using this formula, representatives of light and heavy bodyweight categories predominantly win.*

*The purpose of the work is to develop and substantiate a mathematical model that describes the statistical dependence of the results on the weight of the athlete's body.*

*The analysis of results in the powerlifting total of powerlifters (520 people) and data about their bodyweight according to the materials of IPF World Men's Open Championships for the years 2012 to 2016 was carried out. The mathematical and statistical processing of the materials of the study was conducted and creation of logarithmic regression model based on the least squares method. It is shown that the relationship between the results of competitions in powerlifting and powerlifters bodyweight is best described by the log-linear function. Methods of finding the coefficients of this function are given here. It is proposed to convert powerlifters' competitive results into conventional values with the help of logarithmic coefficients, calculated on the basis of data of previous competitions.*

*The application of a logarithmic coefficient for calculating relative results in competitions in powerlifting allows to objectively choose the winners in the overall score.*

**Key words:** *powerlifting, logarithmic regression model, logarithmic coefficient formula, overall score.*

### Introduction

Methods of determining the physically strongest man are actual for sports. The distribution of athletes in bodyweight categories never took the issue of determining the strongest athlete off from the table. Different tables of coefficients to balance the athlete's body weight and compare the scores of athletes from all bodyweight categories were always proposed. In weightlifting, such calculations are made using the formula proposed by Roy

Sinclair (1985).

The same problem exists in powerlifting too. As some studies show, special coefficients and formulas used in powerlifting to determine the strongest lifters need to be changed from time to time (Schwartz, 2005, Starodubtsev, 1993; Vanderburgh and Batterham, 1999). At different times, calculations were made using different methods, and, as a rule, such formulas were named after the authors: Hoffman, Schwatz, Malone, Glossbrenner, Reshel. Since 1997, the International Powerlifting Federation (IPF) uses the formula proposed by Robert Wilks.

Recent studies (Kotendzhy, 2012; Kotendzhy and Stetsenko, 2009; Stetsenko, 2010) show that, according to the ratings of the strongest powerlifters calculated using the Wilks formula, preference is given to lighter and heavier bodyweight categories, which does not correspond to the proportionality of representation of medium bodyweight categories that are the most numerous. Besides, it has been found that powerlifters with lower body weight show a higher level of relative physical strength compared to other powerlifters (Bal et al., 2010). What is more, the powerlifting stereotype of mostly heavy men lifting extremely large amounts of weights is simply wrong. There is a large amount of variation in both age, weight, and sex (Ball and Weidman, 2016). In addition, other authors argue that there is an uneven relationship between world records and body weight in various powerlifting exercises (Dooman and Vanderburgh, 2000).

The medium bodyweight categories, as a rule, comprise a larger number of talented athletes and are subject to tougher competition. Obviously, the relative level of achievements of such powerlifters should be higher.

Thus, a more objective assessment of the relative performance in powerlifting and determining winners in the overall score requires the working out of new methods to obtain special coefficients.

The working hypothesis of the research is that the development of a mathematical model of the relationship between absolute results and the athletes' bodyweight according to the materials of the world powerlifting championships will allow to objectively determine the winners in the overall score without distribution in bodyweight categories.

The purpose of the paper is to work out a mathematical model describing the statistical dependence of the results of powerlifting to suggest special formula for converting powerlifters' competitive results into conventional units and comparing them in the overall score among all competitors.

### **Methods**

*Participants.* The paper analyzes powerlifters' competitive results and their bodyweight based on the materials of the IPF Men's World Open Powerlifting Championships, which are available on the IPF official website (<http://www.powerlifting-ipf.com/championships/results.html>). In total, 520 lifters, who took part in competitions during the years 2012 to 2016, were taken into account.

Indicators were recorded in three competing powerlifting exercises: squat, bench press and deadlift. Performance of such exercises was regulated by the IPF rules, controlled by experts, who were referees.

*Statistical Analyses.* As a mathematical model describing the dependence of the results athlete's weight, a model of logarithmic regression is suggested. Creation of a logarithmic regression function was made by least squares method. The mathematical and statistical processing of the research materials was performed using the least-squares method by means of Microsoft Excel and Maple software packages.

### **Results**

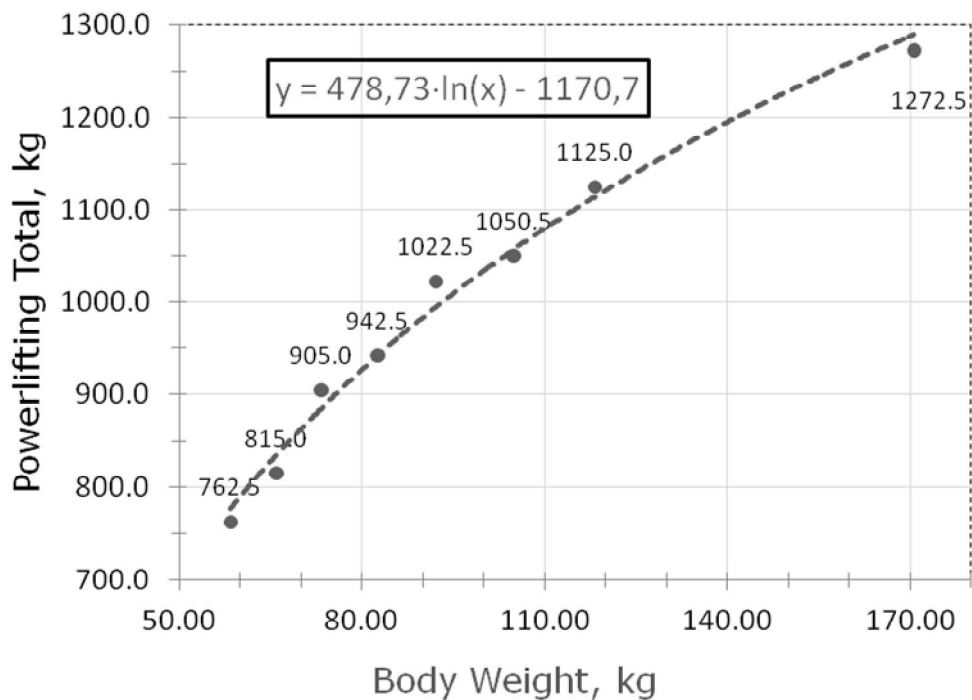
*Analysis of the mathematical type of dependence.* It is convenient to consider the qualitative picture of the mathematical dependence of the powerlifting total on a powerlifter's bodyweight using the records in bodyweight categories as an example. The graph of the

dependence of Men's World Open records in the powerlifting total using special equipment (as of May 1, 2017) on the powerlifter's bodyweight is shown in Figure 1. The mathematical dependence can be written in the form of an empirical formula, which includes several parameters (Demidovich et al., 2010). According to the characteristic shape of the curve, one can assume that this mathematical dependence has a log-linear form

$$y(x) = a + b \cdot \ln(x), \quad (1)$$

where  $x$  is an independent variable that sets the powerlifters' bodyweight;

$a$ ,  $b$  are constants that are selected in such a way that the curve (equation 1) passes as close to the corresponding points as possible.



**Figure 1.** Dependence of IPF Men's World Open powerlifting records in the total with the use of special equipment on the powerlifters' bodyweight

In the graph, the dashed line shows the logarithmic curve, which is created by means of the least squares method in Microsoft Excel (Carlberg, 2006). The equation of the logarithmic curve is given as a function of  $x$ . It is obvious that this curve is very close to the values of world records, which are marked by points.

The assumption that the dependence of the results on a powerlifter's bodyweight is log-linear is well consistent with the data from the reference literature. It is known that the relationship between an athlete's muscle strength and his bodyweight is described by the logarithmic function (Zatsiorskiy, 2009).

It is convenient to use a special coefficient to recalculate the results of competitions in order to obtain relative values that allow comparing the achievements of athletes of different bodyweight categories. Hereinafter this recalculation coefficient is called "logarithmic coefficient". Multiplication of the result on this coefficient should bring the value that is on the logarithmic curve, to a certain conventional value that does not depend on the powerlifter's bodyweight. Proceeding from the mathematical notion of the inverse function (Spiegel et al., 2013), the described recalculation is possible, when the logarithmic coefficient

is an inverse function of a log-linear dependence (1). This means that the logarithmic coefficient must be equal to a fraction, the denominator of which contains a log-linear dependence (equation 1), and the numerator contains some constant:

$$K_{\log} = \frac{c}{a + b \cdot \ln(x)}, \quad (2)$$

where  $K_{\log}$  is the logarithmic coefficient;

$c$  is a constant for valuating the logarithmic coefficient.

If the value of the logarithmic coefficient (equation 2), found as a result of processing of a large number of data of different athletes, is multiplied by the corresponding result of a particular athlete, then ideally we will obtain a relative value that will not depend on the powerlifter's bodyweight. The comparison of such values for different athletes allows us to choose the winner in the overall score.

***Finding the logarithmic coefficient of the dependence using the least squares method.*** Graphically, the results of the participants of the IPF Men's World Open Powerlifting Championships for the years 2012 to 2016 in the total, taking into account powerlifters' bodyweight, that are shown in Figure 2, consist of 520 points, and have certain features:

1. The graph clearly shows that some results lie much lower than the compact data group, and therefore fall sharply out of the general dependence. In order for such abnormal data not to distort the general view of the formula, they must be discarded. The condition for the discarding of such data can be formulated as follows: "If the result of a powerlifter of the next weight category is less than the minimum result of the previous weight category, then this result should be discarded."
2. On the graph, there are vertical groupings of points, which are hereinafter referred to as the "candlesticks". "Candlesticks" are formed at the upper limit of bodyweight categories as a result of the fact that athletes "adjust" their weight to a corresponding bodyweight category. To get the functional dependence, the data grouped into "candlesticks" can be replaced by average values.
3. The logarithmic curve shown on the graph describes well the tendency of increasing the result, when the powerlifter's bodyweight is increased. This increase is unlimited, but the increase of the weight results in the deceleration of the increase in the result, which is a characteristic of a logarithmic dependence. In this case, individual results deviate from the logarithmic curve by almost 30%, which can be explained by different levels of powerlifter's special physical fitness.

The logarithmic curve has an equation, found by the method of least squares (Rawlings et al., 2001) by means of Maple mathematical package (Westermann, 2014):

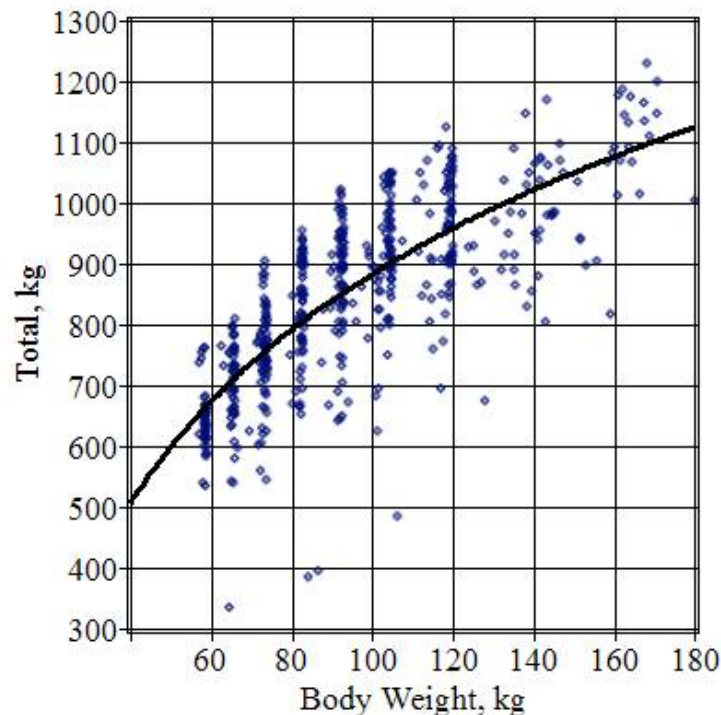
$$y = -1006.33314 + 411.44557 \cdot \ln(x) \quad (3)$$

***Determination of the logarithmic coefficient.*** To find the logarithmic coefficient in the form of equation 2 we can use the dependence (equation 3). The coefficients  $a$  and  $b$  will take the following value:

$$a = -1006.33314; \quad b = 411.44557. \quad (4)$$

Then, we should find the valuation rate  $c$ .

The value of the valuation coefficient can be found for various reasons. For example, the valuation coefficient can be chosen so that the relative result in the powerlifting total corresponds to a value of 1000 kg. Alternatively, one can accept values that are on the logarithmic curve for 100% of the result and bring the relative result in the powerlifting total to a value of 100%. Further, the valuation coefficient was chosen in such a way that relative results in the powerlifting total could be conveniently compared to the corresponding relative values obtained with the help of Wilks coefficient in accordance with the IPF Technical Rules ([http://www.powerlifting-ipf.com/fileadmin/ipf/data/rules/technical-rules/english/IPF\\_Technical\\_Rules\\_Book\\_2016\\_\\_1\\_.pdf](http://www.powerlifting-ipf.com/fileadmin/ipf/data/rules/technical-rules/english/IPF_Technical_Rules_Book_2016__1_.pdf)).



**Figure 2.** Dependence of the results in the total on the powerlifters' bodyweight

To find the valuation coefficient by analogy with the Wilks formula in the first approximation, we will assume that the  $c = 500$  coefficient, that is

$$K_{1_{\log}}(x) = \frac{500}{-1006.33314 + 411.44557 \cdot \ln(x)}. \quad (5)$$

The graphs of both coefficients are shown in Figure 3, which shows that the curves do not overlap, they have no common points. For the correct comparison of the relative results obtained with the logarithmic coefficient, with the corresponding results obtained using the Wilks coefficient, it is necessary to change the value of the numerator in formula (5) so that the graphs have a common point.

Assume that, so that the Wilks coefficient and the logarithmic coefficient have the same value for the average bodyweight of lifters, who participated in the IPF Men's World Open Powerlifting Championships for the years 2012 to 2016.

The average weight of the participants of the competition is

$$x_{cp} = 95.290203. \quad (6)$$

Now the adjustment coefficient  $s$  should be found from the equation

$$s \cdot K1_{\log}(x_{cp}) = Wilks(x_{cp}), \quad (7)$$

where  $Wilks(x_{cp})$  is the Wilks coefficient value for a powerlifter with a bodyweight of  $x_{cp} = 95.290203$  kg.

After performing the calculations we obtain the value of the correction coefficient:

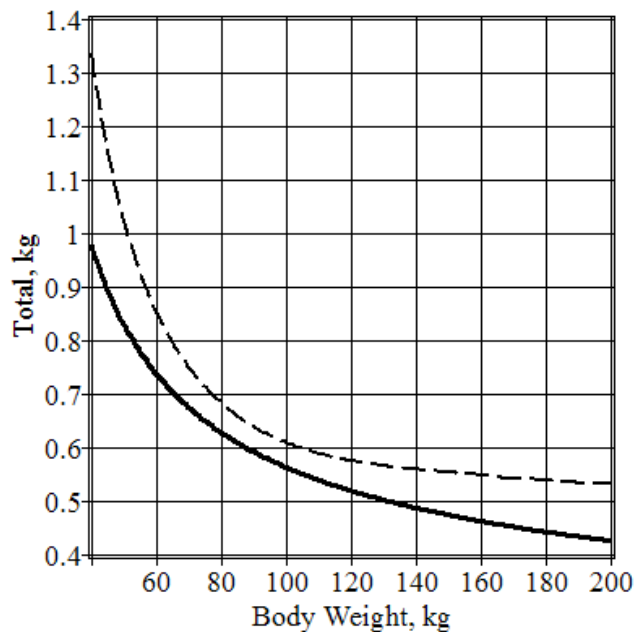
$$s = 1.07909587. \quad (8)$$

After substituting the found value into the equation

$$K_{\log}(x) = s \cdot K1_{\log}(x), \quad (9)$$

we obtain a refined formula, which will determine the logarithmic coefficient

$$K_{\log}(x) = \frac{539.547934}{-1006.33314 + 411.44557 \cdot \ln(x)}. \quad (10)$$



**Figure 3.** Dependence of Wilks coefficient (dashed line) and the first approximation of the logarithmic coefficient (solid line) on powerlifters' bodyweight

### Discussion

**Nature of the dependence of competitive results on powerlifters' bodyweight.** It is generally recognized that for persons of approximately the same level of physical fitness, but of different bodyweight, the absolute muscular strength increases with the increase in bodyweight, but the relative muscle strength decreases. The decrease in the relative muscle strength is due to the fact that a powerlifter's bodyweight is proportional to the volume of the body (the cube of his linear dimensions); and the strength is proportional to the physiological

section of the muscles (square of linear dimensions). Therefore, the mathematical dependence of strength on bodyweight in theory should be of a logarithmic nature (Zatsiorskiy, 2009).

Cleather (2006) supports the thought about the nonlinearity of the dependence of the result on bodyweight. Equations for each powerlifting exercise and broken down by gender received by him by using regression analysis are of allometric (exponential) nature. At the same time, Batterham and Keith (1997) suggest applying the allometric function as an additional tool for scaling the differences in results only, depending on the body size. Investigating the dependence of the results on powerlifters' bodyweight, Marković and Sekulić (2006) identified gender differences and different values of the power coefficient of the exponential function for various bodyweight categories. Obviously, the level of manifestation of maximum muscle strength is influenced, in addition to an athlete's anthropometric data, by a number of important functional indicators of different systems of his body. With relatively identical height-and-weight indicators, powerlifters can demonstrate different results, both in total and in the same exercises.

Recently, scholars (Bishop et al., 2017; Haleczko, 2014, 2015; Haleczko and Korzewa, 2016), who suggested a new approach to determine winners in the overall score, conduct researches quite intensively. However, some of the conclusions are generated by them as a result of data calculations for 20 to 50 cases, which is, in our opinion, insufficient.

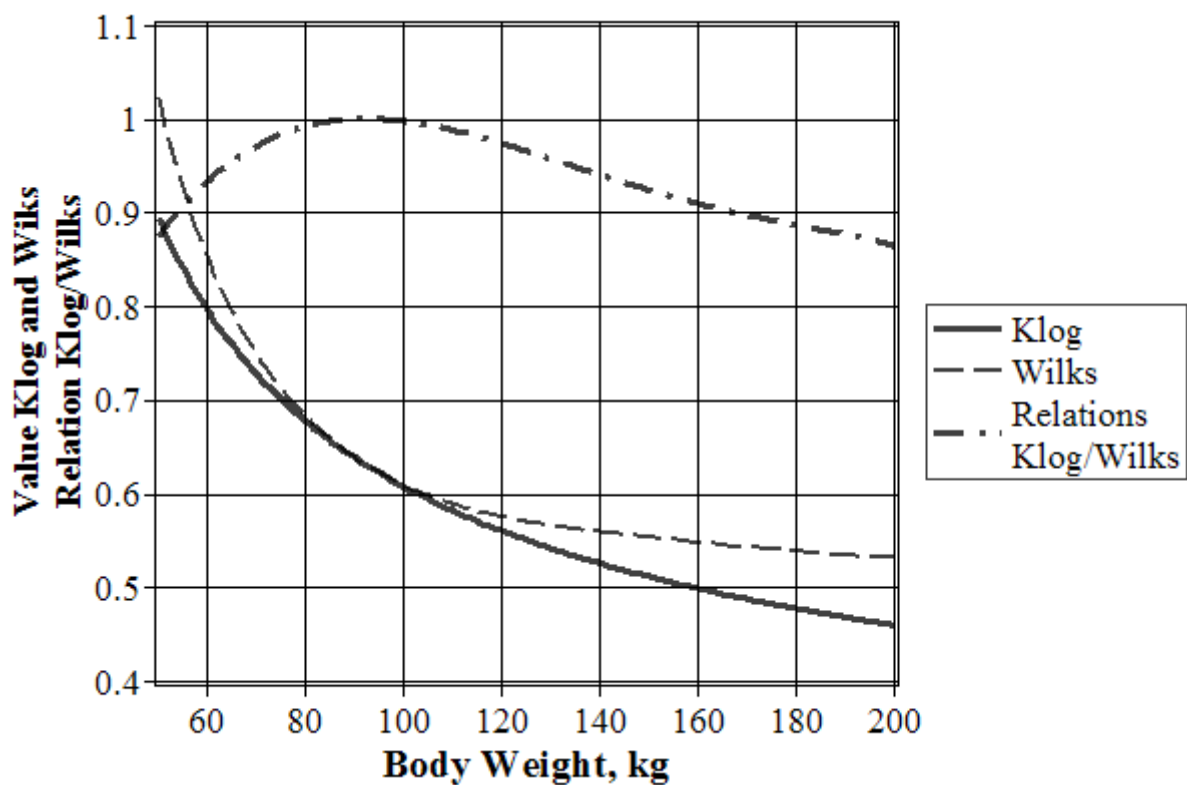
**Comparison of powerlifters' relative results obtained by using the Wilks formula and the logarithmic coefficient formula.** The analysis of the distribution of prize-winning places in the overall score between participants in the IPF Men's World Open Powerlifting Championships for the years 2012 to 2016 shows that the best indicator is shown by representatives of the lightest bodyweight category (up to 59 kg). In all of these championships (5 cases out of 15, that is 33.3%), namely the representatives of this bodyweight category were among the prize winners. Besides, in 4 championships out of 5 (80%) they took the 1st place. Representatives of the heaviest bodyweight category (over 120 kg), as well as those of the light bodyweight category, were prize winners in all the championships. At the same time, representatives of bodyweight categories up to 66, 74, 83 and 93 kg appeared there only once (6.7%). Powerlifters of bodyweight categories of up to 105 kg and up to 120 kg were never found in such lists, although, according to the quantitative membership of competitors, namely in the bodyweight category of up to 105 kg, the highest indicator was recorded – 15.38% of the total number of competitors, and the bodyweight category of up to 120 kg has the third indicator – 14.38% (Table 1). Such a discrepancy, in our opinion, allows us to doubt the objectivity of choosing the best powerlifters in the overall score by using the Wilks formula.

**Table 1.** Number of participants of the IPF Men's World Open Powerlifting Championships for the years 2012 to 2016.

| Weight Category  | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | Total participants |       |
|------------------|------|------|------|------|------|--------------------|-------|
|                  |      |      |      |      |      | number             | %     |
| Up to 59 kg      | 10   | 7    | 11   | 9    | 12   | 49                 | 8.19  |
| Up to 66 kg      | 13   | 10   | 8    | 10   | 14   | 55                 | 9.20  |
| Up to 74 kg      | 16   | 15   | 14   | 17   | 11   | 73                 | 12.21 |
| Up to 83 kg      | 21   | 10   | 16   | 13   | 17   | 77                 | 12.88 |
| Up to 93 kg      | 21   | 18   | 19   | 17   | 15   | 90                 | 15.05 |
| Up to 105 kg     | 20   | 12   | 19   | 22   | 19   | 92                 | 15.38 |
| Up to 120 kg     | 16   | 16   | 20   | 16   | 18   | 86                 | 14.38 |
| More than 120 kg | 16   | 18   | 12   | 17   | 13   | 76                 | 12.71 |

Figure 4 shows graphs of the Wilks coefficient and the proposed logarithmic coefficient and the ratio of the logarithmic coefficient to the Wilks coefficient  $\frac{K \log}{Wilks}$ . The values of the Wilks coefficient increase significantly with low values of a powerlifters' bodyweight, which give preference to powerlifters of light bodyweight categories. The graph of the ratio of the logarithmic coefficient to the Wilks coefficient allows to better understand differences between these coefficients.

For average weight of  $x_{cp} = 95.77664773$  kg, the values of both coefficients are the same, and for light and heavy bodyweight categories they differ by 10% or more. Moreover, the more steep decline of the curve of the ratio of coefficients is observed in the range of light bodyweight categories, to which Wilks coefficient, as it has already been mentioned, gives a significant advantage.

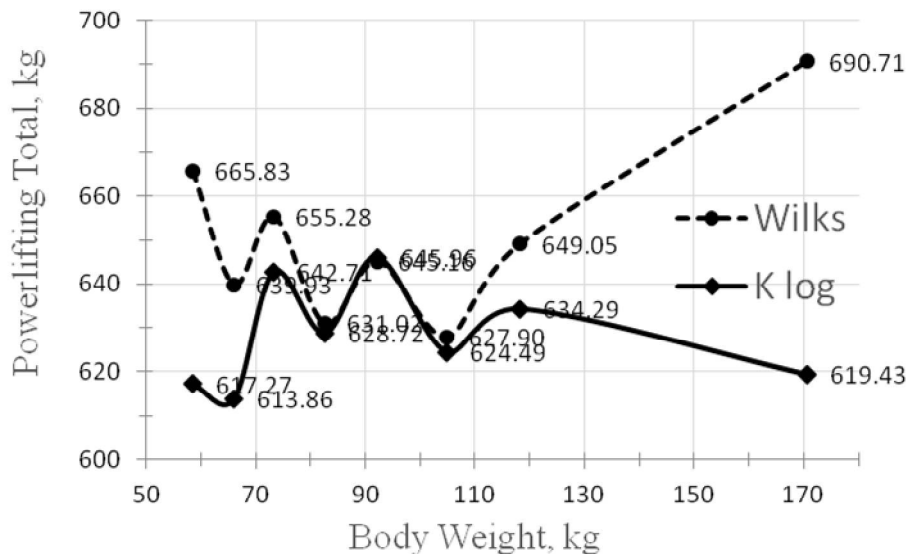


**Figure 4.** Comparison of the values of the logarithmic coefficient Klog and the Wilks coefficient depending on a powerlifter's bodyweight

Anthropometric characteristics (weight and length of the body, fat layer) and a powerlifter's structure can affect his competitive results (Evangelista et al., 2015). In order to achieve a greater value by using Wilks formula, an athlete needs to have a larger muscle size (Keogh et al., 2009; Ye et al., 2013). However, for sportsmen of heavier bodyweight categories, the need to reduce body weight to the limits of bodyweight categories is less relevant, so the relative influence of their muscular component on the competitive result may be not so strong. The logarithmic coefficient automatically takes into account such a feature, and as a result, the values of heavyweight athletes' relative results may deteriorate, which gives them lower positions in the overall score.

The objectivity of the suggested approach may be approved by comparing the relative

results calculated with the help of the logarithmic coefficient, with similar results obtained by using Wilks coefficient. While applying the suggested approach, the results and the distribution of places in the overall score change significantly with the alignment of opportunities of different bodyweight categories (Fig. 5). It is seen that when calculating the relative results with the help of the logarithmic coefficient, the values on the edges, that is, in light and heavy bodyweight categories, change significantly. It turns out that athletes of those bodyweight categories that are less numerous do not receive an advantage in the overall score. For example, according to the results of 2016 Open World Championships, representatives of bodyweight categories of up to 93, 74 and 120 kg could be among the top three winners.



**Figure 5.** Comparison of values of men powerlifting world records in the powerlifting total with the use of special equipment according to the Wilks coefficient and the logarithmic coefficient  $K_{\log}$

### Conclusions

The findings of this study suggest that the Wilks coefficient used in powerlifting for determining places of competitors in the overall score, regardless of the weight, may not be considered objective due to unreasonable dominance of representatives of light and heavy bodyweight categories. The present study provided a novel analysis to convert powerlifters' competitive results into conventional units using the logarithmic coefficients calculated on the basis of mathematical and statistical processing of data of previous competitions. This allows the representatives of the most numerous bodyweight categories to be among the top three in the overall score. The proposed methods for finding the formula of the logarithmic coefficient based on mathematical model of logarithmic regression allows to periodically refine this coefficient on the basis of updated data of competitive results powerlifters.

By using analogous methods, the values of logarithmic coefficients for different categories of competitions can be determined (by gender and age groups, separate bench press competitions, competitions with or without the use of special equipment, etc.) as well for different categories of competitions in weightlifting.

Since authors studied only two indicators (bodyweight and result in the total), our results may be somewhat biased, and therefore require more extensive research.

The authors thank O. Kopayev and B. Onyshchenko for their statistical advice.

**Conflict of interest.** The authors state that there is no conflict of interest.

# References:

1. Bal, BS & Yadav, S & Sinha, A. Comparison of the relative strength among the different weight categories of power lifters. *J of Physical Education & Sport/Citius Altius Fortius* 27: 126-130, 2010.
2. Ball, R & Weidman, D. Analysis of USA Powerlifting federation data from January 1, 2012 - June 11. *J Strength Cond Res* 2016.
3. Batterham, AM, Keith, PG. Allometric modeling does not determine a dimensionless power function ratio for maximal muscular function. *J of Applied Physiology* 83.6: 2158-2166, 1997.
4. Bishop, PA, Williams, TD, Heldman, AN, Vanderburgh, PM. A System for Evaluating Powerlifting and Other Multi-Event Performances. *J Strength Cond Res*, 2017.
5. Carlberg, C. Regression analysis Microsoft Excel. *Indianapolis: Pearson Education, Inc*, 2016.
6. Cleather, DJ. Adjusting powerlifting performances for differences in body mass. *J Strength Cond Res* 20: 412-421, 2006.
7. Demidovich, BP, Maron, IA, Shuvalova, EZ. Chislennyye metody analiza. Priblizheniye funktsiy, differentsial'nyye i integral'nyye uravneniya. *SPb: Lan'*, 2010.
8. Dooman, CS, Vanderburgh, PM. Allometric modeling of the bench press and squat: who is the strongest regardless of body mass? *J Strength Cond Res* 14: 32-36, 2000.
9. Evangelista, AL, Charro, MA, Feriani, DJ, Lopes, CR, Bocalini, DS, Prestes, J, Junior AF. Powerlifting: Entendendo a modalidade. *J Revista Brasileira de Ciência e Movimento* 23.4: 179-191, 2015.
10. Haleczko, A. New formula of conversion the results in olympic weightlifting. *Antropomotoryka. J of Kinesiology and Exercise Sciences* 67.24: 11-20, 2014.
11. Haleczko, A. New procedure for equalization of powerlifting results. *Antropomotoryka. J of Kinesiology and Exercise Sciences* 69.25: 55-64, 2015.
12. Haleczko, AL, Korzewa, EM. New formula for the selection of the best competitor in the bench press. *Antropomotoryka. J of Kinesiology and Exercise Sciences* 75.26: 13-22, 2016.
13. Keogh, JW & Hume, PA & Pearson, SN, Mellow, PJ. Can absolute and proportional anthropometric characteristics distinguish stronger and weaker powerlifters? *J Strength Cond Res* 23: 2256-2265, 2009.
14. Kotendzhy, LV & Stetsenko, AI. The result's dynamic of winners of men's open world powerlifting championships. *J Pedagogics, Psychology, Medical-Biological Problems of Physical Training and Sports* 6: 75-79, 2009.
15. Kotendzhy, LV. Historical and Social aspects of the world powerlifting. Dissertation for a candidate degree in physical education and sport. *Dnipropetrovsk State Institute of Physical Culture and Sports*, 2012.
16. Ledder, G. Mathematics for the life sciences: calculus, modeling, probability and dynamical systems. *New York: Springer Science & Business Media*, 2013.
17. Marković, G & Sekulić, D. Modeling the influence of body size on weightlifting and powerlifting performance. *J Collegium Antropologicum*, 30: 607-613, 2006.
18. Rawlings, JO & Pantula, SG & Dickey, DA. Applied regression analysis: a research tool. *Springer Science & Business Media*, 2001.
19. Schwartz, LH. Reflections on strength, gender, and lifting formulas. *J Iron Game History* 4: 30-32, 2005.
20. Sinclair, RG. Normalizing the performances of athletes in Olympic weightlifting. *Canadian Journal of Applied Sport Sciences. Journal Canadien des Sciences Appliquées au Sport* 10.2: 94-98, 1985.
21. Spiegel, MR & Lipschutz, S & Liu, J. Mathematical handbook of formulas and tables. *New York: McGraw Hill*, 2013.
22. Starodubtsev, M. O sisteme otsenki rezul'tatov v muzhskom pauerliftinge. *J Olimp* 2: 18-21, 1993.
23. Stetsenko, AI. Joint Sport Classification of Ukraine and ranking standards in powerlifting. *J Pedagogics, Psychology, Medical-Biological Problems of Physical Training and Sports* 1: 114-118, 2010.
24. Terskikh, VM. Method for determination of absolute winner in competitions in powerlifting and weightlifting. *J Uchenye Zapiski Universiteta imeni P.F. Lesgafta* 5: 161-167, 2017.
25. Vanderburgh, PM, Batterham, AM. Validation of the Wilks powerlifting formula. *J Med Sci Sports Exerc* 31: 1869-1875, 1999.
26. Vazhenin, A. Massa tela i myshechnaya massa tela eto ne sinonimy: *J Olimp* 2-3: 16-17, 1999.
27. Walpole, R.E, Myers, RH, Myers, SL, Ye, K. Probability and statistics for engineers and scientists. *New York: Macmillan*, 1993.
28. Westermann, T. Mathematische Probleme lösen mit MAPLE: ein Kurzeinstieg. *Springer-Verlag*, 2014.
29. Ye, X, Loenneke, JP, Fahs, CA, Rossow, LM, Thiebaud, RS, Kim, D, Bembien, MG, Abe, T. Relationship between lifting performance and skeletal muscle mass in elite powerlifters. *J Sports Med* 53: 409-414, 2013.
30. Zatsiorskiy, VM. Fizicheskiye kachestva sportsmena: osnovy teorii i metodiki vospitaniya. *M: Sovetskiy*

sport, 2009.

#### Список використаної літератури:

1. Comparison of the relative strength among the different weight categories of power lifters / BS. Bal, S. Yadav, A. Sinha – *J of Physical Education & Sport/Citius Altius Fortius* 27, 2010. – pp.126-130.
2. Bal R. Analysis of USA Powerlifting federation data from January 1, 2012 - June 11 / R. Ball, D.Weidman. – *J Strength Cond Res*, 2016.
3. Batterham AM, Keith PG. Allometric modeling does not determine a dimensionless power function ratio for maximal muscular function / AM. Batterham, PG. Keith – *J of Applied Physiology* 83.6, 1997. – pp. 2158-2166.
4. Bishop, PA. A System for Evaluating Powerlifting and Other Multi-Event Performances / PA. Bishop, TD. Williams, AN. Heldman, , PM. Vanderburgh – *J Strength Cond Res*, 2017.
5. Carlberg, C. Regression analysis Microsoft Excel. *Indianapolis: Pearson Education, Inc*, 2016.
6. Cleather, DJ. Adjusting powerlifting performances for differences in body mass. – *J Strength Cond Res* 20, 2006. – pp. 412-421.
7. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. 5-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 400 с.
8. Dooman, CS. Allometric modeling of the bench press and squat: who is the strongest regardless of body mass? / CS. Dooman, PM. Vanderburgh, *J Strength Cond Res* 14, 2000. – pp. 32-36.
9. Evangelista, AL. Powerlifting: Entendendo a modalidade / AL. Evangelista, MA. Charro, DJ. Feriani, CR. Lopes, DS. Bocalini, J. Prestes. – *J Revista Brasileira de Ciência e Movimento* 23.4, 2015. – pp. 179-191.
10. Haleczko, A. New formula of conversion the results in olympic weightlifting. *Antropomotoryka. J of Kinesiology and Exercise Sciences* 67.24, 2014. – pp. 11-20.
11. Haleczko, A. New procedure for equalization of powerlifting results. *Antropomotoryka. J of Kinesiology and Exercise Sciences* 69.25, 2015. – pp. 55-64.
12. Haleczko AL. New formula for the selection of the best competitor in the bench press. *Antropomotoryka / AL. Haleczko, EM. Korzewa. – J of Kinesiology and Exercise Sciences* 75.26, 2016. – pp. 13-22.
13. Keogh JW. Can absolute and proportional anthropometric characteristics distinguish stronger and weaker powerlifters? / JW. Keogh, PA. Hume, SN. Pearson, PJ. Mellow. – *J Strength Cond Res* 23, 2009. – pp. 2256-2265, /
14. Котенджи Л.В., Стеценко А.І. Динаміка результативності переможців чемпіонатів світу з пауерліфтингу серед чоловіків / Л.В. Котенджи, А.І. Стеценко // Педагогіка, психологія та медико-біологічні проблеми фізичного виховання і спорту. – 2009. – № 6. – С.75 – 79.
15. Котенджи Л.В. Історико – соціальні аспекти світового пауерліфтингу : дисерт. дис.... канд. наук з фіз. виховання і спорту : 24.00.01. Дніпропетровськ: Дніпропетровський державний інститут фізичної культури і спорту. – 2012. – 224 с.
16. Ledder, G. Mathematics for the life sciences: calculus, modeling, probability and dynamical systems. *New York: Springer Science & Business Media*, 2013.
17. Marković G. Modeling the influence of body size on weightlifting and powerlifting performance / G. Marković, D. Sekulić. – *J Collegium Antropologicum*, 30, 2006. – pp. 607-613.
18. Rawlings, JO. Applied regression analysis: a research tool / JO. Rawlings, SG. Pantula, DA, Dickey / *Springer Science & Business Media*, 2001.
19. Schwartz, LH. Reflections on strength, gender, and lifting formulas. *J Iron Game History* 4, 2005. – pp. 30-32.
20. Sinclair, RG. Normalizing the performances of athletes in Olympic weightlifting. *Canadian Journal of Applied Sport Sciences. Journal Canadien des Sciences Appliquees au Sport* 10.2, 1985. – pp.94-98.
21. Spiegel, MR. Mathematical handbook of formulas and tables / MR. Spiegel, S. Lipschutz, J. – *Liu New York: McGraw Hill*, 2013.
22. Стародубцев М. О системах оценки результатов в мужском пауэрлифтинге / М.Стародубцев // Олимп, – 1993. – № 2. – С. 18 – 21.
23. Стеценко А.І. Єдина спортивна класифікація України та розрядні норми в пауерліфтингу / А.І. Стеценко // Педагогіка, психологія та медико-біологічні проблеми фізичного виховання і спорту. – 2010. – № 1. – С. 114 – 118.
24. Терских В.М. Метод выявления абсолютного победителя соревнований в пауэрлифтинге и тяжелой атлетике. Ученые записки университета имени П.Ф. Лесгафта. – 2017. - №5(147). – с.161-167.
25. Vanderburgh, PM. Validation of the Wilks powerlifting formula / PM. Vanderburgh, AM. Batterham. – *J Med Sci Sports Exerc* 31, 1999. – pp. 1869-1875.
26. Важенін А. Масса тела и мышечная масса атлета это не синонимы / А. Важенін // Олимп, 1999. –

- № 2-3. – С. 16 – 17.
27. Walpole, R.E. Probability and statistics for engineers and scientists / R.E. Walpole, R.H. Myers, S.L. Myers, K. Ye. – New York: Macmillan, 1993.
28. Westermann, T. Mathematische Probleme lösen mit MAPLE: ein Kurzeinstieg. Springer-Verlag, 2014.
29. Ye, X. Relationship between lifting performance and skeletal muscle mass in elite powerlifters / X. Ye, J.P. Loenneke, C.A. Fahs, L.M. Rossow, R.S. Thiebaud, D. Kim, M.G. Bemben, T. Abe. – *J Sports Med* 53, 2013. – pp. 409-414.
30. Заціорський В.М. Фізическіе качества спортсмена: основы теории и методики воспитания / В.М. Заціорський. – М.: Советский спорт, 2009. – 200 с.

**ГУК Віталій,**

Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, факультет обчислювальної техніки, інтелектуальних та управляючих систем, кандидат технічних наук, доцент кафедри «Програмне забезпечення автоматизованих систем»

**СТЕЦЕНКО Анатолій,**

Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, навчально-науковий інститут фізичної культури, спорту та здоров'я, кандидат наук з фізичного виховання і спорту, доцент кафедри спортивних дисциплін

### **МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧНОЇ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ У ПАВЕРЛІФТИНГУ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ НАЙКРАЩИХ АТЛЕТІВ ЗА ЗАГАЛЬНОЮ ОЦІНКОЮ**

**Анотація. Вступ.** Метою роботи є розробка та обґрунтування математичної моделі, яка описує статистичну залежність результатів спортсмена від ваги тіла.

Робоча гіпотеза дослідження полягає у тому, що розробка математичної моделі взаємозв'язку між абсолютними результатами та вагою спортсменів, відповідно до матеріалів чемпіонатів світу з пауерліфтингу, дозволить об'єктивно визначати переможців у загальному заліку без розподілу по вагових категоріях.

**Методи.** У роботі аналізуються результати змагань пауерліфтерів та їх маса тіла на основі матеріалів Міжнародного чемпіонату світу з пауерліфтингу серед чоловіків, які можна знайти на офіційному веб-сайті IPF (<http://www.powerlifting-ipf.com/championships/results.html>). Загалом було враховано результати 520 пауерліфтерів, які брали участь у змаганнях з 2012 по 2016 роки.

У якості математичної моделі, яка описує залежність результатів атлетів від їх ваги, пропонується модель логарифмічної регресії. Визначення функції логарифмічної регресії було зроблено методом найменших квадратів. Математична та статистична обробка дослідницьких матеріалів проводилась методом найменших квадратів за допомогою пакетів програм Microsoft Excel та Maple.

**Результати.** Антропометричні характеристики (вага і довжина тіла, жировий шар) і структура тіла пауерліфтера можуть впливати на його результати змагання. Для того, щоб досягти більших результатів за допомогою формули Вілкса, спортсменові потрібно мати більший розмір м'язів. Проте для спортсменів у важких вагових категоріях потреба у зниженні маси тіла до межі вагової категорії є менш актуальною, тому відносний вплив їх м'язової складової на результат змагань може бути не таким сильним. Логарифмічний коефіцієнт автоматично враховує таку особливість, і у підсумку значення відносних результатів спортсменів у важкій вазі можуть погіршуватися, що дає їм нижчі позиції в загальному рахунку.

Об'єктивність запропонованого підходу може бути підтвердженою шляхом порівняння відносних результатів, розрахованих за допомогою логарифмічного коефіцієнта, з подібними результатами, отриманими за допомогою коефіцієнта Вілкса. При застосуванні запропонованого підходу результати та розподіл місць у загальному заліку значно змінюються з вирівнюванням можливостей у різних вагових категоріях. Аналіз наведених графіків показує, що при обчисленні відносних результатів за допомогою логарифмічного коефіцієнта значення на межі, тобто у легких і важких вагових категоріях, значно змінюються. У результаті, спортсмени з менших вагових категорій не отримують переваг у загальному рахунку. Наприклад, згідно з результатами Відкритого Чемпіонату Світу 2016 року представники вагових категорій до 93, 74 і 120 кг можуть бути серед трьох переможців.

**Висновки.** Результати цього дослідження свідчать, що коефіцієнт Вілкса, який використовується у пауерліфтингу для визначення місць конкурсантів у загальному заліку, незалежно від ваги, не може вважатися об'єктивним через необгрунтоване домінування представників легких та важких вагових категорій. Дане дослідження представило новий аналіз для перетворення конкурсних результатів пауерліфтерів у одну шкалу з використанням логарифмічних коефіцієнтів, розрахованих на основі математичної та статистичної обробки даних попередніх змагань. Це дозволяє представникам найчисленніших вагових категорій посідати перші місця у загальному заліку. Запропоновані методи пошуку формули логарифмічного коефіцієнта на основі математичної моделі логарифмічної регресії дозволяють періодично уточнювати цей коефіцієнт на підставі оновлених даних результатів змагань пауерліфтерів.

Використовуючи аналогічні методи, можна визначити значення логарифмічних коефіцієнтів для різних категорій змагань (за статтю та віковими групами, окремі стендові пресові змагання, змагання з використанням або без використання спеціального обладнання тощо) у важкій атлетиці.

**Ключові слова:** пауерліфтинг, логарифмічна регресійна модель, формула логарифмічного коефіцієнта, загальна оцінка.

Одержано редакцією 15.02.2017  
Прийнято до публікації 27.03.2017

УДК 519.6:004.8

PACS 02.60.-x, 02.60.Pn, 02.70.Wz

**МОРОЗОВИЧ Владислав**

**Володимирович**

Черкаський національний університет  
імені Богдана Хмельницького, студент  
e-mail: vladmorozua@gmail.com

**ГОНДА Андрій Романович**

Черкаський національний університет  
імені Богдана Хмельницького, студент  
e-mail: andriy.gonda@gmail.com

**ЛЯШЕНКО Юрій Олексійович**

Черкаський національний університет  
імені Богдана Хмельницького, директор  
ННІ інформаційних та освітніх технологій  
доктор фіз.-мат. наук, доцент  
e-mail: urico@ukr.net

## ЗАСТОСУВАННЯ ПОПЕРЕДНЬОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ ІЗ РАСТРОВОГО ЕЛЕКТРОННОГО МІКРОСКОПА ДЛЯ ПОКРАЩЕННЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ СТРУКТУРНИХ ЕЛЕМЕНТІВ\*

**Анотація.** У роботі описано вплив попередньої обробки зображень чотирифазного зразка системи Cu-Sn, що отримані із растрового електронного мікроскопа, на аналіз структурних елементів. Попередня обробка зображень здійснювалася методами Гаусового та нерізкого розмиття. Описано алгоритм обробки зображень з застосуванням матричних

\* Статтю написано у рамках прикладної держбюджетної теми МОН України “Синтез наноструктурованих сплавів за осцилюючих напружень та їх застосування в новій технології з’єднання мікроелектронних компонентів” (номер державної реєстрації: 0117U000577).

фільтрів. Проаналізовано доцільність використання кожного із методів попередньої обробки зображень для аналізу різного типу структурних елементів (розрахунку площ фаз та знаходження кількості і розрахунку розмірів структурних дефектів).

**Ключові слова:** методи обробки зображень, растрова електронна мікроскопія, Гаусове розмиття зображень, нерізде розмиття зображень.

## Вступ

Методи обробки зображень є одним з пріоритетних напрямків науки і техніки. Це пояснюється тим, що зображення використовуються як засіб отримання візуальної інформації в системах спостереження, технічного зору, телебачення, автономних інтелектуальних системах і ін. Тому методи обробки візуальної інформації, що забезпечують підвищення візуальної якості сприйняття зображень, стиснення даних для зберігання і передачі по каналах зв'язку, а також аналіз, розпізнавання та інтерпретація зорових образів для прийняття рішення і управління поведінкою автономних технічних систем грають все більш важливу роль [1-2].

Будь-яка з процедур обробки та аналізу зображень містить у своїй структурі етап попередньої обробки, що включає згладжування, фільтрацію шумів, підвищення різкості і контрастності. Крім того, попередня обробка зображень включає в себе корекцію нелінійності датчика, яскравості, контрасту, усунення геометричних спотворень, виділення певних об'єктів відносно фону [3]. Часто, на даному етапі здійснюється корекція збурень в зображенні, розмитості зображення в результаті руху об'єкта, похибок від сенсорів або в ході передачі сигналів зображення. Ефективність етапу попередньої (первинної) обробки зображень спричинює значний вплив на результат наступних етапів обробки зображення, в т.ч. сегментацію, морфологічний аналіз і розпізнавання образів. Тому в системах візуалізації найбільший інтерес представляють дослідження в напрямку вдосконалення методів саме попередньої обробки зображень [4].

У процесі детектування в растровому електронному мікроскопі на корисний сигнал накладаються різноманітні шуми внаслідок розсіювання електронів на межах структурних елементів (наприклад, різних фаз досліджуваних сплавів) та об'ємних дефектах (наприклад, із-за розсіювання на топологічних нерівностях біля пор або тріщин). Тому застосування відповідних методів попередньої обробки зображень відіграє важливу роль для покращення аналізу різних типів структурних елементів та дефектів.

Основною метою роботи є дослідження впливу різних видів попередньої комп'ютерної цифрової обробки зображень зразків, що отримані на растровому електронному мікроскопі (далі РЕМ зображення), на результати аналізу цих зображень, а також безпосередня реалізація в єдиному додатку базових методів попередньої обробки та наступного аналізу РЕМ зображень.

## 1. Опис методів первинної обробки зображень

Обробка зображень відіграє значну роль в комп'ютерному аналізі цифрових зображень, зокрема в розпізнаванні фрагментів зображень. Варто зауважити, що в випадку розгляду зображення як двовимірного сигналу (коли зображення можна описати певною функцією значення якої залежить від двох просторових координат), важливим етапом в обробці зображень є виділення корисної інформації. Методи попередньої обробки дозволяють змінювати зображення таким чином, щоб вдосконалити виділення корисного сигналу.

Як відомо реальні сигнали можна представити в вигляді лінійної комбінації шуму та корисного сигналу. Однак в процесі виділення корисної інформації із сигналу виникає ряд труднощів. У випадку аналізу растрових цифрових зображень досить

широко використовують різноманітні алгоритми обробки зображень, зокрема фільтри згладжування та розмиття [4]. Для цього на практиці досить широко використовують матричні фільтри для перетворення зображень. Найбільш поширеним алгоритмом розмиття є так зване розмиття за Гаусом. Розмиття за Гаусом – фільтр для обробки зображень, що використовує нормальний розподіл (розподіл Гауса) для перетворення значень градації сірого кольору (далі ЗГСК) кожного пікселя зображення. Рівняння для застосування розподілу Гауса в 2D просторі має вигляд [5]:

$$G(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(u^2+v^2)/(2\sigma^2)} \quad (1)$$

де  $u, v$  – відстані до пікселів по двох незалежних напрямках від вибраного пікселя,  $\sigma$  – стандартне відхилення розподілу Гауса. Для двовимірного випадку дана формула задає поверхню рівня, що має вигляд концентричних кіл.

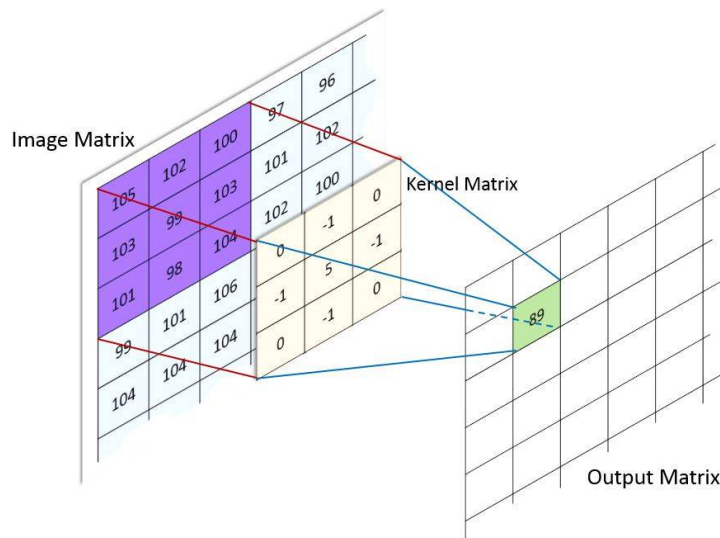


Рис.1. Схема впливу матричного фільтра на ЗГСК в вибраному елементі зображення [7]

Фільтр Гауса можна представити у вигляді матричного фільтра, розмірами  $r \times r$  (зазвичай  $3 \times 3$  чи  $5 \times 5$ ), де  $r$  – радіус розмиття ( $r^2 = u^2 + v^2$ ). Суть застосування матричного фільтра (див. рис. 1) полягає у по черговому застосуванні маски з матриці коефіцієнтів на відповідні значення градацій сірого кольору сусідніх пікселів та обрахунку їх нових значень [1]:

$$\frac{1}{256} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Приведемо методику розрахунку матриці для фільтру нерізкого розмиття. Нехай деяка функція  $f(x, y)$ ,  $0 \leq x < X_{width}$ ,  $0 \leq y < Y_{height}$  є образом цифрового зображення. Здійснимо згортку зображення  $f(x, y)$  з використанням фільтру Гауса (2), наприклад,

з розміром матриці  $5 \times 5$ . Отриманий образ будемо позначати  $\bar{f}(x, y)$  (тут отримуємо зображення, що розмите за нормальним законом). Операцією виділення контурів зображення називають таку операцію:

$$f_{\text{sharpen}}(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y) \quad (3)$$

Зворотною операцією до виділення контурів (так зване нерізде розмиття) можна назвати таку операцію:

$$g_{\text{unsharpen}}(x, y) = f(x, y) + k \cdot f_{\text{sharpen}}(x, y), \quad (4)$$

де  $k$  - деякий коефіцієнт, що вказує на тип фільтрації (для регулярного нерізкого розмиття  $k=1$ ). Побудуємо матричний оператор ядра згортки для нерізкого розмиття при  $k=1$ . Для побудови матричного оператора ядра згортки використаємо оператор тотожного відображення зображення. У випадку розмірності матриці ядра згортки  $5 \times 5$  даний оператор має вигляд:

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * = \frac{1}{256} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 256 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} *, \quad (5)$$

де  $*$  - операція згортки.

Матричний оператор згортки з використанням матриці ядра фільтра Гауса для розмірності  $5 \times 5$  має вигляд:

$$\hat{F}^{\text{Gauss}} = \frac{1}{256} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} * \quad (6)$$

Оператор виділення контурів можна виразити таким чином:

$$\begin{aligned}\hat{F}^{sharpen} &= \hat{F} - \hat{F}^{Gauss} = \frac{1}{256} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 256 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * -\frac{1}{256} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} * = \\ &= \frac{1}{256} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -4 & -1 \\ -4 & -16 & -24 & -16 & -4 \\ -6 & -24 & 220 & -24 & -6 \\ -4 & -16 & -24 & -16 & -4 \\ -1 & -4 & -6 & -4 & -1 \end{pmatrix} * \end{aligned} \quad (7)$$

Побудуємо оператор регулярного нерізкого розмиття

$$\begin{aligned}\hat{G}^{unsharpening} &= \hat{F} + \hat{F}^{sharpen} = \frac{1}{256} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 256 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * + \frac{1}{256} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -4 & -1 \\ -4 & -16 & -24 & -16 & -4 \\ -6 & -24 & 220 & -24 & -6 \\ -4 & -16 & -24 & -16 & -4 \\ -1 & -4 & -6 & -4 & -1 \end{pmatrix} * = \\ &= \frac{1}{256} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -4 & -1 \\ -4 & -16 & -24 & -16 & -4 \\ -6 & -24 & 476 & -24 & -6 \\ -4 & -16 & -24 & -16 & -4 \\ -1 & -4 & -6 & -4 & -1 \end{pmatrix} * = \frac{-1}{256} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & -476 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} * \end{aligned} \quad (8)$$

Отже матриця для первинної обробки зображень методом нерізкого розмиття приймає вигляд:

$$-\frac{1}{256} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & -476 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Покажемо, що описані матриці (2) та (9) можна застосовувати в первинній обробці РЕМ зображень як фільтр для покращення виділення границь різноманітних дефектів.

## 2. Результати аналізу РЕМ зображень

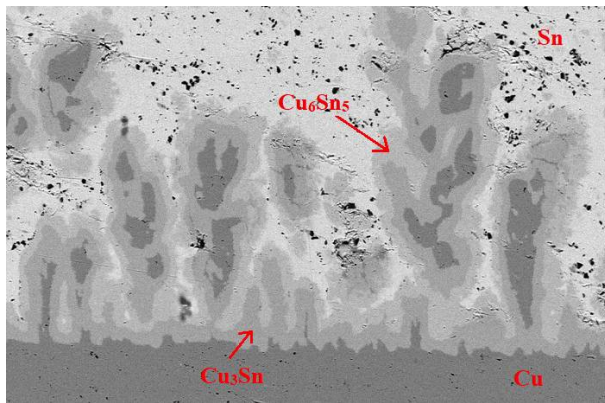
Для аналізу РЕМ зображень було створено програмний продукт, що працює за алгоритмом: кожне РЕМ зображення зчитувалося попіксельно і будувалася гістограма ЗГСК від 0 до 255, де 0 впадає чорному кольору, а 255 – білому. Після аналізу гістограми ЗГСК кожному з її піків ставилася у відповідність певна фаза. Для аналізу просторового розподілу певної фази потрібно обирати інтервал ЗГСК, що відповідає

пікові цієї фази. Далі, після підрахунку кількості пікселів, що відповідає обраному інтервалу ЗГСК, стає можливим розрахунок загальної площі кожної з фаз.

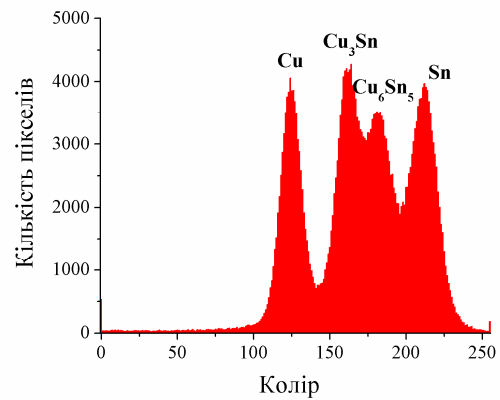
Для встановлення особливостей застосування матриць (2), (9) було проаналізовано вплив попередньої обробки РЕМ зображення чотирифазного зразка системи Cu-Sn на зміну розподілу градації сірого кольору в ньому.

Після обробки зображення методом нерізкого розмиття з застосуванням матриці (9) (Рис. 2б), різкість зображення зростає і границі пор стали більш окресленими, але при цьому піки в гістограмі ЗГСК (Рис. 2в) уширилися. Метод Гаусового розмиття з застосуванням матриці (2) дає протилежний результат, різкість зображення зменшується (Рис. 2д), а піки на гістограмі ЗГСК стають більш розділеними (Рис. 2е).

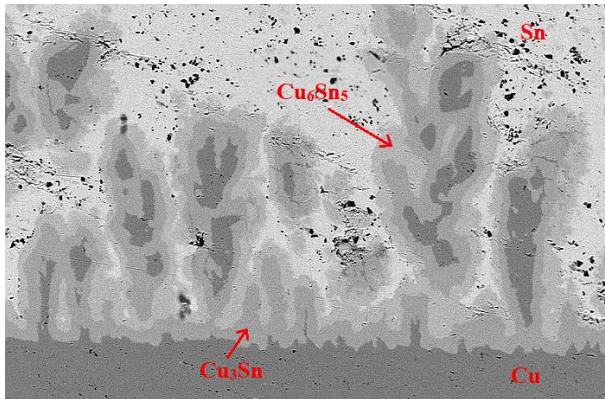
Так як метод Гаусового розмиття дозволяє виділити інтервал ЗГСК певної фази, що видно з гістограми на Рис. 2е, то для більш точного розрахунку площі  $\delta$ -Cu<sub>6</sub>Sn<sub>5</sub> фази було використано саме метод Гаусового розмиття з використанням матриці (2).



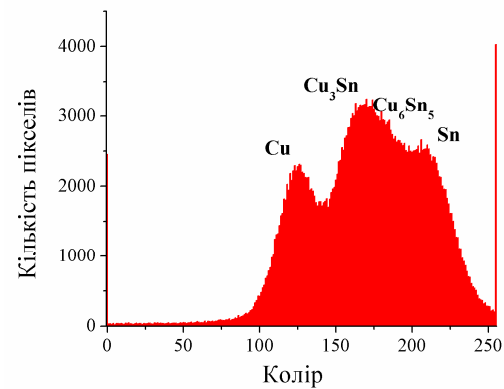
а



б



в



г

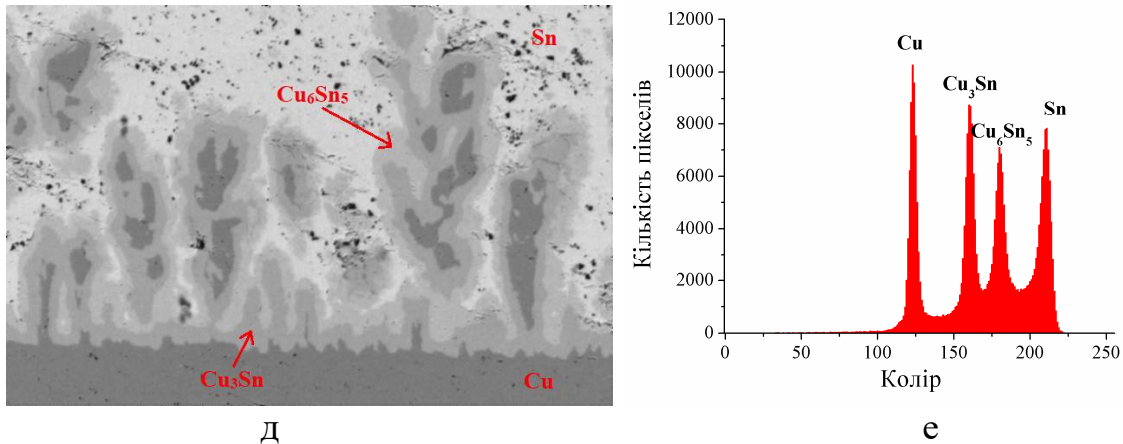


Рис. 2. РЕМ зображення чотирифазного зразка системи Cu-Sn та гістограми ЗГСК до обробки (а, б), після обробки методом нерізкого розмиття (в, г) та Гаусового розмиття (д, е)

На Рис. 3 проведено порівняння РЕМ зображень чотирифазного зразка системи Cu-Sn до та після попередньої обробки методом Гаусового розмиття з використанням матриці (2). Для цього застосовувався інтервал ЗГСК від 150 до 170, що відповідає піку  $\delta\text{-Cu}_6\text{Sn}_5$  фази. Зазначимо, що одиничні пікселі зі значеннями градації сірого кольору, які належать цьому інтервалу, але в оточенні яких зовсім немає подібних їм пікселів, не враховувалися. Видно також, що після попередньої обробки РЕМ зображення методом Гаусового розмиття виділені області фази  $\delta\text{-Cu}_6\text{Sn}_5$  стали більш рівномірно заповненими пікселями з подібними їм значеннями градації сірого кольору. Тому, до обробки відносна площа виділеної області складала 18,4%, а після обробки методом Гаусового розмиття вона склала 22,3%, що досить суттєво змінює результат ідентифікації фаз.

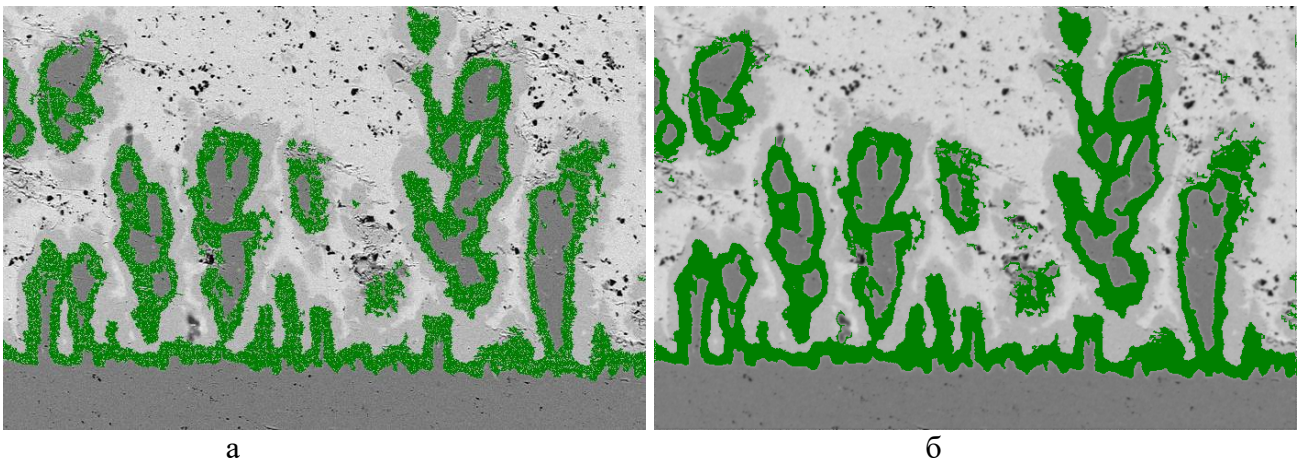


Рис. 3. РЕМ зображення чотирифазного зразка системи Cu-Sn з виділеною  $\eta\text{-Cu}_6\text{Sn}_5$  фазою до (а) та після (б) обробки методом Гаусового розмиття

Крім необхідності виділення площ фаз існує потреба покращення ідентифікації такого типу структурних елементів, як об'ємних пустот (пор та тріщин). Тут у процесі детектування на растровому електронному мікроскопі на топологічних нерівностях навколо цих об'ємних дефектів виникають розмиття контурів. Такі ефекти розсіювання виникають із-за зміни інтенсивностей розсіювання електронів, що потребує корекції.

РЕМ зображення чотирифазного зразка системи Cu-Sn були проаналізовані на вміст дефектів в вигляді об'ємних пустот (пор). Оскільки межі дефектів на РЕМ зображенні чотирифазного зразка системи Cu-Sn до обробки розмиті, а метод нерізкого розмиття підсилює локальний контраст зображення на тих ділянках, де спочатку були присутні різкі зміни градієнта кольору, то для більш коректного виділення дефектів було застосовано матрицю (9).

На Рис. 4 проведено порівняння РЕМ зображень чотирифазного зразка системи Cu-Sn до та після обробки методом нерізкого розмиття з застосуванням матриці (9). Для ідентифікації пор застосовувався інтервал значень градації сірого кольору від 0 до 50. Аналіз РЕМ зображення чотирифазного зразка системи Cu-Sn на вміст пор показав, що до обробки методом нерізкого розмиття з застосуванням матриці (9) в зразку містилося 38 таких дефектів із середньою площею  $52.8 \text{ мкм}^2$ . Зазначимо, що в розрахунок бралися дефекти розмір яких більший за 15 пікселів, а після обробки зображення методом нерізкого розмиття кількість дефектів склала 53 із середньою площею  $43.8 \text{ мкм}^2$ .

Таким чином аналіз РЕМ зображення чотирифазного зразка системи Cu-Sn показав, що після обробки методом Гаусового розмиття з застосуванням матриці (2) виділена область стала більш рівномірною по розподілу градацій сірого кольору. До обробки відносна площа виділеної області складала 18,4%, після обробки методом Гаусового розмиття вона склала 22,3%, що досить суттєво змінює результат ідентифікації фази. Також РЕМ зображення було проаналізовано на вміст пустот (дефектів), та вплив методів обробки зображень на результати аналізу. Було встановлено, що попередня обробка РЕМ зображення методом нерізкого розмиття з застосуванням матриці (9) суттєво покращує результати аналізу розмірів пор, за рахунок більш коректного виділення границь пор.

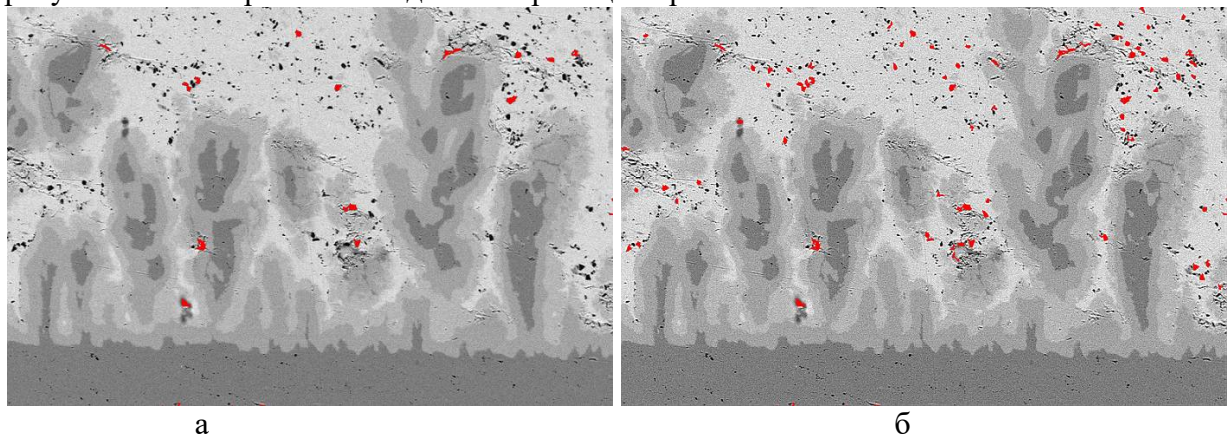


Рис. 4. РЕМ зображення чотирифазного зразка системи Cu-Sn з виділеними дефектами до (а) та після (б) обробки методом нерізкого розмиття

### Висновки

У роботі проаналізовано застосування методів попередньої обробки зображень, що отримані із растрового електронного мікроскопа, в процесі дослідження фазового складу та визначення розподілу пор у чотирифазному зразку системи Cu-Sn. Проаналізовано застосування методу Гаусового розмиття, методу нерізкого розмиття для виділення меж фаз та підвищення різкості контурів пустотних дефектів. Розроблено алгоритми попередньої обробки зображення з використанням відповідних матричних фільтрів.

Показано, що на результати аналізу площі фаз впливає наявність білого шуму в РЕМ зображеннях. Для того щоб позбутися білого шуму було застосовано метод Гаусового розмиття, який усереднює значення градації сірого кольору в пікселях зображення відносно їх оточення, що дає змогу покращити результат розрахунку площ фаз.

У роботі показано, що попередня обробка зображень чотирифазного зразка системи Cu-Sn методом нерізкого розмиття дає змогу покращити ідентифікацію топологічних дефектів. Зокрема, було з'ясовано, що за рахунок збільшення локального контрасту в результаті застосування методу нерізкого розмиття зростає точність аналізу пустот та пор на РЕМ зображеннях, оскільки границі цих дефектів на РЕМ зображеннях стають менш розмитими.

#### Список використаної літератури:

1. Shapiro L. G. Computer Vision / L. G. Shapiro, G. C. Stockman. – Prentice Hall, 2001. – pp. 53–54.
2. Gumster J. GIMP Bible / J. Gumster, R. Shimonski. – Wiley Publishing, 2012. – pp. 438–442.
3. Lecarme O. The Book of GIMP: A Complete Guide to Nearly Everything / O. Lecarme, K. Delvare. – No Starch Press, 2013. – p. 429.
4. Gonzalez R. Digital Image Processing / R. Gonzalez, R. Woods. – Addison-Wesley Publishing Company, 1992, p 191.
5. Быстрое размытие по Гауссу [Електронний ресурс]: [Веб-сайт]. – Електронний ресурс. – Режим доступу: <https://habr.com/post/151157/> – Назва з екрана.
6. Фильтрация изображений методом свертки [Електронний ресурс]: [Веб-сайт]. – Електронний ресурс. – Режим доступу: <https://habr.com/post/62738/> – Назва з екрана.
7. Image Filtering [Електронний ресурс]: [Веб-сайт]. – Електронний ресурс. – Режим доступу: [http://machinelearningguru.com/computer\\_vision/basics/convolution/image\\_convolution\\_1.html](http://machinelearningguru.com/computer_vision/basics/convolution/image_convolution_1.html) – Назва з екрана.

#### References:

1. Shapiro L. G. & Stockman G. C. (2001) Computer Vision. Prentice Hall.
2. Gumster J. & Shimonski R. (2012) GIMP Bible. Wiley Publishing.
3. Lecarme O., Delvare K. (2013) The Book of GIMP: A Complete Guide to Nearly Everything. No Starch Press.
4. Gonzalez R. & Woods R. (1992) Digital Image Processing. Addison-Wesley Publishing Company.
5. Quick Gaussian Blur [Electronic resource]: [Web-site]. – Electronic Data. – Access mode: <https://habr.com/post/151157/>. The name of the screen. (in Rus)
6. Filtration of images by convolution [Electronic resource]: [Web-site]. – Electronic Data. – Access mode: <https://habr.com/post/62738/>. The name of the screen. (in Rus)
7. Image Filtering [Electronic resource]: [Web-site]. – Electronic Data. – Access mode: [http://machinelearningguru.com/computer\\_vision/basics/convolution/image\\_convolution\\_1.html](http://machinelearningguru.com/computer_vision/basics/convolution/image_convolution_1.html). The name of the screen.

**MOROZOVYCH Vladyslav,**

The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, student

**HONDA Andrii,**

The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, student

**LYASHENKO Yurii,**

The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Director of Educational-Scientific Institute of Informational and Educational Technologies, Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Assistant Professor

#### **THE APPLICATION OF PREVIOUSLY PROCESSED IMAGES FROM SCANNING ELECTRON MICROSCOPE FOR IMPROVING IDENTIFICATION OF STRUCTURAL ELEMENTS**

**Abstract.** The paper describes the effect of pre-processing images of a four-phase sample of the Cu-Sn system obtained from a scanning electron microscope on the analysis of structural elements. Preliminary image processing was carried out using Gaussian and non-erosive methods. The image

processing algorithm using matrix filters is described. The expediency of using each of the methods of pre-processing images for analysis of various types of structural elements (calculation of phase areas and determination of the number and calculation of the sizes of structural defects) has been analyzed.

**Introduction.** Image processing plays a significant role in computer analysis of digital images, in particular in recognizing image fragments. It is worth noting that in the case of considering the image as a two-dimensional signal (when an image can be described by a function whose value depends on two spatial coordinates), an important stage in the processing of images is the selection of useful information. Various pre-processing algorithms allow you to change the image so as to simplify the selection of a useful signal.

Procedures of image processing and analysis contain a pre-processing step in their structure, which includes smoothing, noise filtering, sharpening and contrasting. In addition, pre-processing of images includes correction of non-linearity of the sensor, brightness, contrast, elimination of geometric distortions, the selection of certain objects relatively to the background. Effectiveness of the stage of the previous (primary) image processing has a significant effect on the result of the subsequent stages of image processing, including segmentation, morphological analysis and pattern recognition.

During the process of detecting in a bitmap electron microscope, the received signals impose different noise on the received images due to the scattering of electrons at the boundaries of structural elements (for example, the different phases of the investigated alloys) and volume defects (for example, due to scattering at topological inequalities near pores or cracks). Therefore, the application of different methods of pre-processing images plays an important role in improving the analysis of various types of structural elements and defects.

**Purpose.** The main purpose of the work is to study the effects of various types of previous digital image processing of samples taken on a scanning electron microscope (SEM) on the results of the analysis of these images, as well as direct implementation in a single application of the basic methods of preprocessing and subsequent analysis of SEM images.

**Results.** The paper proposes methods of preliminary processing of images obtained from a scanning electron microscope for the study of a four-phase sample of a Cu-Sn system with bulk defects. The application of the Gaussian blur method, the method of unsteady blurring for the separation of phase boundaries and the sharpening of the contours of cavity defects has been analyzed. To do this, algorithms for pre-processing images using various matrix filters were implemented.

**Conclusion.** It is shown in this paper that the use of matrix filters for the pre-processing of SEM images can significantly improve the results of their analysis.

It is shown that the results of calculating the area of the phases are influenced by the presence of white noise in the SEM images. To eliminate the effect of white noise, the Gaussian blur method is used, which averts the value of the grayscale of the image peaks relative to their surroundings.

The work demonstrated that the preliminary processing of images of a four-phase sample of the Cu-Sn system by the method of non-erosive blurring makes it possible to improve the identification of voids defects: pores and cracks. In particular, it was found that the after increasing the local contrast the accuracy of the analysis of three-dimensional defects on SEM images was increased as well. In this case, the boundaries of hollow defects on the SEM images are blurred, and the method of erosive blurring improves the process of their selection.

**Key words:** methods for image processing, scanning electron microscopy, Gaussian blur, unsharp masking.

Стаття надійшла 07.06.2017  
Прийнято до друку 26.06.2017

УДК 519.6:004.8

PACS 02.60.-x, 02.60.Pn, 02.70.Wz

**ТАЛИМОНЧИК Анна Сергіївна**

Черкаський національний університет  
імені Богдана Хмельницького, студентка  
e-mail: anna.talimonchuk@gmail.com

**КРАСНОШЛИК Наталія**

**Олександрівна**

Черкаський національний університет  
імені Богдана Хмельницького, к. т. н.,  
доцент, доцент кафедри прикладної  
математики та інформатики  
e-mail: wlik007@ukr.net

## **РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДІВ РОЙОВОГО ІНТЕЛЕКТУ**

***Анотація.** У роботі розглянуто метод бактеріальної оптимізації і метод оптимізації зграєю вовків, які відносяться до методів ройового інтелекту, а також метод диференціальної еволюції. Дані методи відносяться до біоінспірованих алгоритмів оптимізації, які інтенсивно розвиваються в останні роки. Метою даної роботи є застосування методів ройового інтелекту та методу диференціальної еволюції до розв'язування задач умовної оптимізації інженерного спрямування. Наведено постановку прикладних задач оптимізації конструкції редуктора і конструкції натяжної/компресійної пружини. Для їх чисельного розв'язування використано метод штрафних функцій, який полягає у переході до задачі безумовної оптимізації. Проведено порівняння наближених розв'язків, отриманих розглянутими методами ройового інтелекту і методом диференціальної еволюції, та розв'язків, отриманих іншими авторами. Встановлено ефективність застосування зазначених методів до задач такого типу, оскільки вони не накладають обмежень до вигляду цільової функції, що важливо при використанні штрафних функцій, і завжди знаходять наближений глобальний мінімум.*

***Ключові слова:** методи ройового інтелекту, метод бактеріальної оптимізації, метод оптимізації зграєю вовків, метод диференціальної еволюції, задача умовної оптимізації.*

### **Вступ**

Розв'язування багатьох актуальних проблем в різних прикладних та фундаментальних науках зводиться до задач глобальної оптимізації. Чисельні методи оптимізації можна умовно розділити на детерміністичні і стохастичні. Детерміністичні методи, як правило, вимагають знаходження градієнта цільової функції та залежать від вибору початкових значень. Однак цільова функція у задачах глобальної оптимізації може бути недиференційовною, розривною, мультимодальною, або не мати аналітичного опису, тим самим ускладнюючи розв'язування задачі. Для ефективного розв'язування подібних задач використовують стохастичні методи, які не накладають додаткових обмежень на постановку задачі [1-2].

Стохастичні пошукові алгоритми почали інтенсивно розвиватися у 1980-х рр. [3]. Серед таких алгоритмів важливе місце посідають алгоритми, натхненні природою. Ще у середині минулого століття Д. Холланд уперше запропонував використовувати механізм еволюції органічного світу для оптимізації технічних систем. Пізніше з'явилися інші алгоритми, засновані на ідеї «природних обчислень». З'явився напрямок – ройовий інтелект. До нього віднесли такі поняття, як «мурашиний» та «бджолиний» рій, а також алгоритм рою частинок [4].

Ройовий інтелект (англ. Swarm intelligence) описує комплексну колективну поведінку децентралізованої системи, що самоорганізовується. Системи колективного інтелекту, як правило, складаються із множини агентів (багатоагентна система), що локально взаємодіють між собою та з навколишнім середовищем. Самі агенти зазвичай досить прості, але всі разом, локально взаємодіючи, створюють так званий колективний інтелект [5]. Ідеї їх поведінки виходять від природи, а особливо, від біологічних систем. Кожен агент слідує дуже простим правилам і, незважаючи на те, що немає якоїсь централізованої системи управління, поведінки, яка б вказувала кожному з них на те, що йому слід робити, локальні і, в деякій мірі, випадкові взаємодії призводять до виникнення інтелектуальної глобальної поведінки, неконтрольованого окремими агентами.

Алгоритми, засновані на методах ройового інтелекту належать до більш широкого класу біоінспірованих алгоритмів. Біоінспіровані алгоритми становлять більшість усіх алгоритмів, натхненних природою. Таким чином, можна сказати, що алгоритми, засновані на методах ройового інтелекту є підмножиною біоінспірованих алгоритмів, в той час як біоінспіровані алгоритми є підмножиною алгоритмів, натхнених природою.

Деякі біоінспіровані алгоритми не використовують ройовий інтелект. Наприклад, генетичні алгоритми – біоінспіровані, але не на основі ройового інтелекту. Проте не так легко класифікувати певні алгоритми, такі як метод диференціальної еволюції. Метод диференціальної еволюції немає прямого зв'язку з будь-якою біологічною поведінкою, але він має деяку схожість із генетичними алгоритмами, а також має ключове слово «еволюція», тому його можемо віднести до категорії біоінспірованих алгоритмів.

Об'єктом дослідження у роботі виступають біоінспіровані алгоритми оптимізації.

Метою даної роботи є застосування методів ройового інтелекту та методу диференціальної еволюції до розв'язування задач умовної оптимізації інженерного спрямування.

## 1. Опис методів ройового інтелекту

Нехай задана цільова функція  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на множині допустимих значень  $D \subseteq x^n$ . Необхідно знайти умовний глобальний мінімум функції  $f(x)$  на множині  $D$ , тобто знайти таку точку  $x^* \in D$ , що:

$$f(x^*) = \min_{x \in D} f(x). \quad (1)$$

де  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $D = \{x \mid x_i \in [a_i, b_i], i \in \overline{1, n}\}$ .

Задача пошуку максимуму функції  $f(x)$  зводиться до задачі пошуку мінімуму:

$$f(x^*) = \max_{x \in D} f(x) = -\min_{x \in D} (-f(x)).$$

**Метод бактеріальної оптимізації / метод оптимізації переміщенням бактерій** (bacterial foraging optimization algorithm) заснований на моделюванні поведінки одного виду бактерій – E. Coli, яка є однією з найбільш вивчених. Даний метод був запропонований Ліу (Liu Y.) і Пассіні (Passino K.M.) у 2002 р., і моделює хемотаксичну поведінку бактерій, які рухаються під впливом поживних речовин, присутніх у навколишньому середовищі.

Використовуючи механізми пересування (такий як джгутики) бактерії можуть переміщуватися у навколишньому середовищі, як хаотично (перекидатися і обертатися), так і спрямовано (плавно). Залежно від міжбактеріальної взаємодії, бактерії можуть роїтися навколо джерела їжі (тобто притягатися), і/або можуть боротися одна з одною (тобто відштовхуватися).

Алгоритм використовує наступні три процеси:

- 1) хемотаксис – бактерії рухаються під впливом поживних речовин і міжбактеріальної взаємодії;
- 2) репродукція – лише ті бактерії, які були ефективні протягом їх життя, можуть потрапити у наступне покоління;
- 3) видалення-розкид – із малою ймовірністю деякі бактерії замінюються бактеріями, які згенеровані випадковим чином.

Життєздатність бактерій, що використовується в алгоритмі означає, як багато бактерія може спожити поживних речовин протягом життя і наскільки ефективно вона може боротися з шкідливими речовинами.

Алгоритм методу бактеріальної оптимізації можна записати так [6]:

## 1. Ініціалізація

- 1.1 Задаємо параметри притягування  $\alpha_{attr}, \beta_{attr}$  та відштовхування  $\alpha_{repel}, \beta_{repel}$ ; параметр  $\delta$  для генерації нової позиції бактерії, ймовірність видалення – розкиду  $p_{em}$ , при чому  $0 < \alpha_{attr} < 1, 0 < \beta_{attr} < 1, 0 < \alpha_{repel} < 1, 0 < \beta_{repel} < 1, 0 < \delta < 1$ .

При малих значеннях  $\beta_{attr}$  і великих значеннях  $\beta_{repel}$  популяція схильна до великого розсіювання у просторі пошуку, а при великих значеннях  $\beta_{attr}$  і малих  $\beta_{repel}$  популяція схильна до групування у невеликих областях пошуку.

- 1.2 Задаємо максимальне число ітерацій видалення-розкиду  $N_{ed}$ , репродукції  $N_{re}$ , хемотаксису  $N_c$ , рівномірного руху  $N_{swim}$ , розміру популяції  $K$ , довжину вектору позиції бактерії  $M$ , мінімальних і максимальних значень для вектору позиції  $x_j^{min}, x_j^{max}, j \in \overline{1, M}$ .

- 1.3 Задаємо цільову функцію:  $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \rightarrow \min$ , де  $f_1(x)$  – фактична цільова функція, яка відображає кількість спожитих поживних речовин,  $f_2(x)$  – додаткова цільова функція, яка відображає взаємодію бактерії з іншими бактеріями,

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^K J(x, x_i) = -\alpha_{attr} \sum_{i=1}^K \exp\left(-\beta_{attr} \sum_{j=1}^M (x_j - x_{ij})^2\right) + \alpha_{repel} \sum_{i=1}^K \exp\left(-\beta_{repel} \sum_{j=1}^M (x_j - x_{ij})^2\right),$$

де  $x$  – вектор позиції бактерії.

- 1.4 Створення випадковим чином вектору кращої позиції:

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_M^*), x_j^* = x_j^{min} + (x_j^{max} - x_j^{min}) \cdot rand().$$

- 1.5 Створюємо вихідну популяцію  $P$ :

- 1.5.1 Номер бактерії  $k = 1, P = \%$ .

- 1.5.2 Випадковим чином створюємо вектор позиції  $x_k$ :

$$x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kM}),$$

$$x_{kj} = x_j^{min} + (x_j^{max} - x_j^{min}) \cdot rand().$$

- 1.5.3 Якщо  $x_k \notin P$ , то  $P = P \cup \{x_k\}, k = k + 1$ .

- 1.5.4 Якщо  $k \leq K$ , то перейдемо на крок 1.5.2.

2. Номер кроку видалення-розкиду  $n_{ed} = 1$ .

3. Номер кроку репродукції  $n_{re} = 1$ .
  4. Хемотаксис:
    - 4.1 Номер кроку хемотаксису  $n_c = 1$ .
    - 4.2 Номер бактерії  $k = 1$ .
    - 4.3  $s_{k,n_c} = f(x_k)$ .
    - 4.4 Номер кроку рівномірного руху  $n_{swim} = 1$ .
    - 4.5 Хаотичний рух (генерація вектору позиції  $x^{new}$  від вектору  $x_k$ ):
      - 4.5.1  $x_j^{new} = x_{kj} + \delta \cdot (x_j^{max} - x_j^{min}) \cdot (-1 + 2 \cdot rand()), j \in \overline{1, M}$ .  
 $x_j^{new} = \max\{x_j^{min}, x_j^{new}\}, x_j^{new} = \min\{x_j^{max}, x_j^{new}\}, j \in \overline{1, M}$
    - 4.6 Якщо  $f(x^{new}) < f(x_k)$ , то  $x_k = x^{new}$ , перехід на крок 4.8.
    - 4.7 Якщо  $n_{swim} < N_{swim}$ , то  $n_{swim} = n_{swim} + 1$ , перехід на крок 4.5.
    - 4.8 Якщо  $k < K$ , то  $k = k + 1$ , перехід на крок 4.3.
    - 4.9 Якщо  $n_c < N_c$ , то  $n_c = n_c + 1$ , перехід на крок 4.2.
  5. Визначити найкращу бактерію за значенням цільової функції  
 $x^* = \underset{k}{\operatorname{argmin}} f(x_k)$ .
  6. Якщо  $f(x_{k^*}) < f(x^*)$ , то  $x^* = x_{k^*}$ .
  7. Репродукція:
    - 7.1 Обчислити життєздатність бактерій:  

$$S_k = \sum_{n_c=1}^{N_c} s_{k,n_c}, k \in \overline{1, K}$$
    - 7.2 Упорядкувати  $P$  за життєздатністю, тобто  $S_k < S_{k+1}$ .
    - 7.3 Бактерії з найбільшою життєздатністю помирають, а кожна з тих, які залишились ділиться на дві бактерії, тобто  $x_{\frac{K}{2}+k} = x_k, k \in \overline{1, K/2}$ .
  8. Якщо  $n_{re} < N_{re}$ , то  $n_{re} = n_{re} + 1$ , перехід на крок 4.
  9. Видалення-розкид:
    - 9.1 Номер бактерії  $k = 1$ .
    - 9.2 Якщо  $rand() \leq p_{em}$ , то бактерія ініціалізується, тобто  

$$x_{kj} = x_j^{min} + (x_j^{max} - x_j^{min}) \cdot rand(), j \in \overline{1, M}$$
    - 9.3 Якщо  $k < K$ , то  $k = k + 1$ , перехід на крок 9.2.
  10. Якщо  $n_{ed} < N_{ed}$ , то  $n_{ed} = n_{ed} + 1$ , перехід на крок 3.
- Розв'язком є  $x^*$ .

**Метод оптимізації зграєю вовків** (wolf pack search) запропонований у 2007 р., його ідея запозичена із соціальної поведінки зграї вовків. Для вовків типовий сімейний спосіб життя: вони живуть зграями – сімейними групами, що складаються з пари «вожаків», їх родичів, а також сторонніх одиноких вовків. Всередині зграї спостерігається строго окреслена ієрархія, на вершині якої знаходиться «вожак» зграї, направляючий інших особин на пошук жертви. Вовки «досліджують» місцевість на наявність здобичі, коли хтось із них почує запах жертви, починається її пошук. Чим сильніше відчувається запах, тим ближче вовки до жертви. Таким чином, вони

переміщуються у напрямку посилення запаху жертви. Причому, вовки поділяються на невеликі групи, і кожна група здійснює пошук в якомусь певному напрямку, відмінному від напрямів інших груп. У підсумку, коли один із вовків знайде жертву, він подає сигнал «вожаку» та іншим, щоб поділитися здобиччю з вовками зі зграї [2, 7]. Метод оптимізації зграєю вовків імітує процес їх полювання.

Припустимо, що місцевість, де полюють вовки – це пошукова область у задачі оптимізації, а частинки – це вовки. Нехай спочатку згенеровано  $N$  вовків в евклідовому просторі розмірністю  $d$ , тобто позицію кожного вовка представлено у виді вектора  $x_i = (x_1, \dots, x_d)$ , який визначає його координати в просторі.

Таким чином, зграя (популяція) являє собою множину потенційних розв'язків, координати яких, оновлюються на кожній ітерації, поки не знайдеться оптимальний розв'язок. Цільова функція  $f(x)$  характеризує настільки сильно відчувається запах жертви, координати жертви і є шуканою оптимальною точкою. «Вовки» виконують пошук оптимальної точки об'єднуючись у групи, які рухаються в різних напрямках і обмінюються між собою інформацією.

Алгоритм пошуку можна охарактеризувати за допомогою трьох правил.

1. «Вовк» із найкращим значенням цільової функції на даному кроці – вожак. Якщо на наступній ітерації знайдеться інша особина з кращим значенням цільової функції, ніж у вожака, то зграя «обирає» нового вожака відповідно.

2. Решта вовків вивчають місцевість на наявність жертви,  $f(x_i)$  характеризує, як сильно відчувається запах жертви  $i$ -м вовком. Тоді величина  $GBest$  характеризує як сильно відчувається запах жертви вожаком зграї.

3. Вожак зграї «повідомляє» решті «вовків» у зграї про своє місцезнаходження, як найближчу відстань до жертви, щоб ті переміщалися в напрямку до нього. На цьому етапі вожака розглядають, як жертву, тобто ціль до якої варто наблизитися. Тоді вовки зграї переміщуються в напрямку вожака з кроком  $step$ , що спочатку визначено, причому  $d$ -а координата  $i$ -го вовка на  $k+1$ -й ітерації обраховується за формулою:

$$x_{id}^{k+1} = x_{id}^k + step \cdot \frac{(Gbest_d^k - x_{id}^k)}{\|Gbest_d^k - x_{id}^k\|}, \quad (2)$$

де  $Gbest_d^k$  –  $d$ -та координата вожака, визначеного за  $k$  попередніх ітерацій,  $\|..\|$  – норма для простору пошуку.

**Диференціальна еволюція** (*Differential Evolution*) – алгоритм багатовимірної оптимізації, який відноситься до класу стохастичних методів оптимізації і використовує деякі ідеї генетичних алгоритмів.

Метод диференціальної еволюції призначений для знаходження глобального екстремуму недиференційованих, нелінійних, мультимодальних функцій від багатьох змінних. Метод був запропонований Р. Сторном і К. Прайсом, а вперше опублікований ними у 1995 р. [3].

В початковому вигляді, метод можна описати наступним чином. Спочатку генерується деяка множина векторів, які називають поколінням. Під векторами розуміють точки  $n$ -вимірного простору, в яких визначена цільова функція, яку потрібно мінімізувати. На кожній ітерації методу генерується нове покоління векторів, випадковим чином комбінуючи вектори із попереднього покоління. Число векторів у кожному поколінні однакове і є одним із параметрів методу.

Нове покоління векторів генерується наступним чином. Для кожного вектора  $x_i$  зі старого покоління обирається три різних випадкових вектори  $v_1, v_2, v_3$  за виключення самого вектора  $x_i$ , і генерують так званий мутантний вектор  $v$ .

Над мутантним вектором виконується операція «схрещення» (crossover), яка полягає в тому, що деякі його координати замінюються відповідними координатами вихідного вектору  $x_i$  (кожна координата замінюється з деякою ймовірністю, яка також є параметром методу). Вектор, отриманий після схрещення, називається пробним вектором. Якщо він виявився кращим, ніж вектор  $x_i$  (тобто значення цільової функції стало меншим), то в новому поколінні вектор  $x_i$  замінюється пробним вектором, інакше – залишається  $x_i$  [3, 6].

Алгоритм методу диференціальної еволюції можна записати так:

#### Крок 1. Ініціалізація

- 1.1 Задамо параметр кросинговера  $p^c$ , параметри  $\delta$  і  $\alpha$  для генерації хромосоми, причому  $\delta \in [0;1], \alpha \in [0;1]$ .
- 1.2 Задамо максимальну кількість ітерацій  $N$ , розмірності популяції  $K$ , довжини хромосоми  $M$ , максимальне число різниць  $L$ , мінімальне і максимальне значення для хромосоми  $x_j^{min}, x_j^{max}, j \in \overline{1, M}$ .
- 1.3 Задаємо цільову функцію, де  $x$  – хромосома.
- 1.4 Випадковим чином створюємо кращу хромосому  $x^* = (x_1^*, \dots, x_M^*)$ ,  $x_j^* = x_j^{min} + (x_j^{max} - x_j^{min}) \cdot rand()$ , де  $rand()$  – функція, що повертає рівномірно розподілене випадкове число в діапазоні  $[0;1]$ .
- 1.5 Створюємо вихідну популяцію  $P$ :
  - 1.5.1 Номер хромосоми  $k = 1, P = \emptyset$ .
  - 1.5.2 Випадковим чином створюємо хромосоми  $x_k, x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kM})$ ,  
 $x_{kj} = x_j^{min} + (x_j^{max} - x_j^{min}) \cdot rand()$ .
  - 1.5.3 Якщо  $x_k \notin P$ , то  $P = P \cup \{x_k\}, k = k + 1$ .
  - 1.5.4 Якщо  $k \leq K$ , то перейдемо на крок 1.5.2.
- 1.6 Визначаємо кращу хромосому за цільовою функцією  $k^* = \arg \min f(x_k)$ .

Крок 2. Номер ітерації  $n = 1$ .

Крок 3.  $k = 1$ .

Крок 4.  $x^{cur} = x_k$ .

Крок 5. Виконаємо арифметичний кросинговер:

- 5.1 двоє батьків обираємо випадковим чином  
 $i1 = \text{round}(1 + (K - 1) \cdot \text{rand}())$ ,  $i2 = \text{round}(1 + (K - 1) \cdot \text{rand}())$ ,  
 при чому  $i1 \neq i2$ , де  $\text{round}()$  – функція, яка округлює число до найближчого цілого.

5.2 виконуємо схрещення двох батьків, тобто для батьків  $i1$  та  $i2$ , нащадок буде представлений  $(x_{ij}; \sigma_{ij})$ :

$$x_{ij} = a_k x_{i1k} + (1 - x_k) \cdot x_{i2k}, \sigma_{ij} = a_k \sigma_{i1k} + (1 - \sigma_k) \cdot \sigma_{i2k},$$

де  $a_k$  – випадкове число,  $a_k \in [0, 1]$ .

$$5.3 \quad x_j^{cur} = \max \{x_j^{min}, x_j^{cur}\}, x_j^{cur} = \min \{x_j^{max}, x_j^{cur}\}.$$

Крок 6. Якщо  $f(x_{k^*}) < f(x^*)$ , то  $x^* = x_{k^*}$ .

Крок 7. Якщо  $n < N$ , то  $n = n + 1$ , перейти на крок 3

Розв'язком є  $x^*$ .

## 2. Постановка прикладних задач умовної оптимізації

### Задача оптимізації конструкції редуктора

Задача оптимізації конструкції редуктора полягає у мінімізації ваги редуктора (рис. 1) з урахуванням обмежень на вигини зубців колеса, поверхневої напруги, поперечні відхилення валів і напруги у валах.

Наведемо основні конструктивні параметри редуктора [8]:

- $b$  – ширина обшивки ( $x_1$ );
- $m$  – модуль колеса ( $x_2$ );
- $z$  – число зубів колеса ( $x_3$  – ціла змінна);
- $l_1$  – довжини першого валу між підшипниками ( $x_5$ );
- $l_2$  – довжини другого валу між підшипниками ( $x_4$ );
- $d_1$  – діаметр першого валу ( $x_6$ );
- $d_2$  – діаметр другого валу ( $x_7$ ).

Введемо наступні позначення:

- $\sigma_g$  – фактична напруга вигину зубів шестерні;
  - $p_s$  – фактична поверхнева стискувальна напруга;
  - $B$  – коефіцієнт пружності (залежить від модуля пружності);
  - $f_1, f_2$  – відхилення для валів 1 і 2;
  - $P$  – передана сила;
  - $M_g, M_s$  – моменти згинання та обертання для валів 1 і 2
- $$M_z = \sqrt{M_g^2 + 0.75 M_s^2};$$
- $W_{x_1}, W_{x_2}$  – сила опору перерізу.

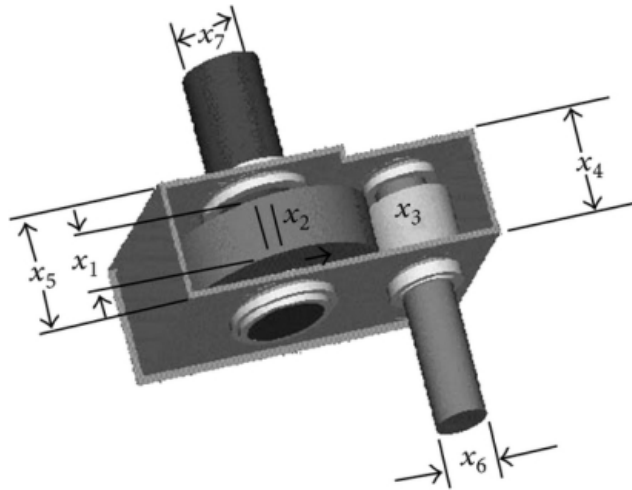


Рис. 1 Конструкція редуктора [8]

При цьому повинні виконуватись наступні обмеження:

- умова вигину:  $\sigma_g = \frac{2M_g}{bm^2z} \leq k_g$ .
- обмеження напруги при стисненні:  $p_{s^2} = \frac{2BM}{m^2z^2b} \leq p_{a^2}$ .
- мінімальна кількість зубів:  $z \geq 17$ .
- відносні умови ширини обшивки:  $5 \leq \frac{b}{m} \leq 12$ .
- умова розміру:  $m(z_1 + z_2) \leq 160$ .
- поперечне відхилення вала 1 через навантаження:  

$$f_1 = \frac{1}{48} \cdot \frac{Pl_1^3}{El_1} \leq f_{01} = 0.001.$$
- поперечне відхилення вала 2 через навантаження:  

$$f_2 = \frac{1}{48} \cdot \frac{Pl_2^3}{El_2} \leq f_{02} = 0.001.$$
- запасний стан напруги для вала 1:  $\sigma_{g1} = \frac{M_{z_1}}{w_{x1}} \leq k_{g1}$ .
- запасний стан напруги для вала 2:  $\sigma_{g2} = \frac{M_{z_2}}{w_{x2}} \leq k_{g1}$ .
- стан продуктивності:  $d_2 \geq 5$ .
- умови конструкції:  $1.5d_1 + 1.9 \leq l_1$ ,  $1.1d_2 + 1.9 \leq l_2$ .

В результаті отримаємо задачу нелінійної оптимізації:

$$f(x) = 0.7854x_1x_2^2(3.3333x_3^2 + 14.9334x_3 - 43.0934) - 1.508x_1(x_6^2 + x_7^2) + 7.4777(x_6^3 + x_7^3) + 0.7854(x_4x_6^2 + x_5x_7^2) \rightarrow \min \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= \frac{27}{x_1 x_2^2 x_3} - 1 \leq 0, \\
g_2(x) &= \frac{397.5}{x_1 x_2^2 x_3^2} - 1 \leq 0, \\
g_3(x) &= \frac{1.93 x_4^3}{x_2 x_3 x_6^4} - 1 \leq 0, \\
g_4(x) &= \frac{1.93}{x_2 x_3 x_7^4} - 1 \leq 0, \\
g_5(x) &= \frac{1.0}{110 x_6^3} \sqrt{\left(\frac{745.0 x_4}{x_2 x_3}\right)^2 + 16.9 \times 10^6} - 1 \leq 0, \\
g_6(x) &= \frac{1.0}{85 x_7^3} \sqrt{\left(\frac{745.0 x_5}{x_2 x_3}\right)^2 + 157.5 \times 10^6} - 1 \leq 0, \\
g_7(x) &= \frac{x_2 x_3}{40} - 1 \leq 0, \\
g_8(x) &= \frac{5 x_2}{x_1} - 1 \leq 0, \\
g_9(x) &= \frac{x_1}{12 x_2} - 1 \leq 0, \\
g_{10}(x) &= \frac{1.5 x_6 + 1.9}{x_4} - 1 \leq 0, \\
g_{11}(x) &= \frac{1.1 x_7 + 1.9}{x_5} - 1 \leq 0, \\
2.6 \leq x_1 \leq 3.6, & 0.7 \leq x_2 \leq 0.8, \\
17 \leq x_3 \leq 28, & 7.3 \leq x_4 \leq 8.3, \\
7.8 \leq x_5 \leq 8.3, & 2.9 \leq x_6 \leq 3.9, 5.0 \leq x_7 \leq 5.5.
\end{aligned}$$

### **Задача оптимізації конструкції натяжної/компресійної пружини**

Задача полягає у мінімізації ваги натяжної/компресійної пружини, конструкцію якої наведено на рис. 2, з урахуванням обмежень мінімального відхилення, напрути зсуву, частоти перенапрути та обмежень зовнішнього діаметра і конструктивних змінних.

Перерахуємо основні конструктивні параметри:

- $d$  – діаметр дроту ( $x_1$ );
- $D$  – середній діаметр котушки ( $x_2$ );
- $N$  – кількість активних котушок ( $x_3$ ).

Наведемо математичну постановку цієї задачі [9]:

$$f(x) = (x_3 + 2) x_2 x_1^2 \rightarrow \min, \quad (3)$$

Повинні виконуватись наступні обмеження:

- відхилення:  $g_1(x) = 1 - \frac{x_2^3 x_3}{7.178 x_1^4} \leq 0$ ,
- напруга стиснення:  $g_2(x) = \frac{4x_2^2 - x_1 x_2}{12.566(x_2 x_1^3) - x_1^4} + \frac{1}{5.108 x_1^2} - 1 \leq 0$ ,
- частота:  $g_3(x) = 1 - \frac{140.45 x_1}{x_2^2 x_3} \leq 0$ ,
- зовнішній діаметр:  $g_4(x) = \frac{x_2 + x_1}{1.5} - 1 \leq 0$ .

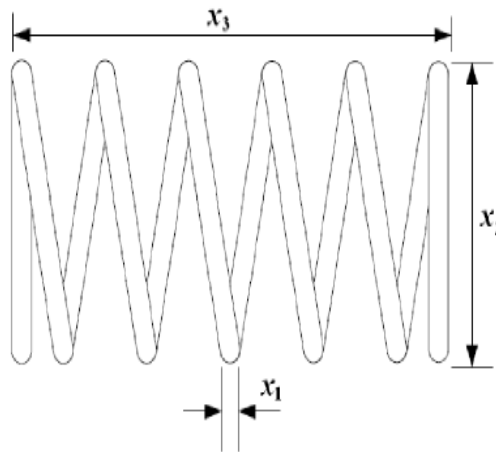


Рис. 2 Конструкція натяжної/компресійної пружини [9]

Нижня та верхня межі проектних змінних вибираються таким чином:

$$0.005 \leq x_1 \leq 2.0, 0.25 \leq x_2 \leq 1.3, 2.0 \leq x_3 \leq 15.0.$$

### 3. Застосування розглянутих методів ройового інтелекту до розв'язування задач умовної оптимізації

Для розв'язання наведених прикладних задач (2)-(3) використаємо метод штрафних функцій, тобто переходимо до еквівалентної задачі безумовної мінімізації:

$$F(x) = f(x) + \delta(x|X) \rightarrow \min, \quad x \in R^n, \quad (4)$$

де  $\delta(x|X) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in X, \\ +\infty, & \text{якщо } x \notin X. \end{cases}$  – індикаторна функція множини  $X$ , а множина  $X$

визначається обмеженнями нерівностями і/або рівностями.

Розглянуті методи ройового інтелекту, а саме: метод бактеріальної оптимізації (BFAO), метод оптимізації зграєю вовків (WPS), а також метод диференціальної еволюції (DE) були реалізовані у середовищі MATLAB R2014b. Проведемо порівняльний аналіз даних методів при розв'язуванні прикладних задач умовної оптимізації. При цьому кожен метод застосували 10 разів, та обирали кращий результат серед отриманих.

Результати обчислювальних експериментів для задачі оптимізації конструкції редуктора, а також розв'язки, отримані іншими авторами наведено у табл. 1.

Таблиця 1

| Метод             | Змінні конструкції |          |           |          |          |          |          | $f(x)$     |
|-------------------|--------------------|----------|-----------|----------|----------|----------|----------|------------|
|                   | $x_1$              | $x_2$    | $x_3$     | $x_4$    | $x_5$    | $x_6$    | $x_7$    |            |
| WPS               | 3.15750            | 0.709276 | 17.000000 | 7.442233 | 7.963778 | 3.350354 | 5.286743 | 2.9048e+03 |
| DE                | 3.23800            | 0.700381 | 17.00000  | 7.307671 | 7.803623 | 3.350870 | 5.286763 | 2.8954e+03 |
| BFAO              | 3.84610            | 0.665184 | 15.895074 | 7.700917 | 8.221207 | 3.430979 | 5.311854 | 2.8295e+03 |
| Akhtar et al. [9] | 3.50612            | 0.700006 | 17.000000 | 7.549126 | 7.859330 | 3.365576 | 5.289773 | 3.0081e+03 |
| Huang [9]         | 3.49565            | 0.700000 | 17.000000 | 7.300000 | 7.712038 | 3.343372 | 5.285352 | 2.9901e+03 |
| Lu and Kim [9]    | 3.50000            | 0.700000 | 17.00000  | 7.30000  | 7.670396 | 3.542421 | 5.245814 | 3.0195e+03 |

Результати обчислювальних експериментів для задачі оптимізації конструкції натяжної/компресійної пружини, а також розв'язки, отримані іншими авторами за допомогою методу рою часток, генетичного алгоритму наведено у табл. 2.

Таблиця 2

| Метод                              | Змінні конструкції |                   |                   | $f(x)$            |
|------------------------------------|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
|                                    | $x_1$              | $x_2$             | $x_3$             |                   |
| WPS                                | 0.051350587825182  | 0.406569118257710 | 7.430889946267433 | 0.010110622691547 |
| DE                                 | 0.0500000000000000 | 0.374432870716765 | 8.546569316461159 | 0.009872455563440 |
| BFAO                               | 0.062236761287400  | 0.649865776615723 | 9.640590240821823 | 0.029301687855993 |
| PSO (Ha and Wang) [10]             | 0.051728           | 0.357644          | 11.244543         | 0.0126747         |
| GA (Coello) [10]                   | 0.051480           | 0.351661          | 11.632201         | 0.0127048         |
| Constraint correction (Arora) [10] | 0.050000           | 0.315900          | 14.250000         | 0.0128334         |

Отримані результати показали, що при розв'язуванні задачі оптимізації конструкції редуктора кращий результат отримано методом бактеріального пошуку, а при розв'язуванні задачі оптимізації конструкції натяжної/компресійної пружини – методом диференціальної еволюції. Також варто відмітити, що методом диференціальної еволюції знайдено другий за значенням кращий результат і для попередньої задачі.

Можна зробити висновок, що методи ройового інтелекту можуть ефективно використовуватись для розв'язування задач умовної оптимізації, зокрема і прикладних задач інженерного спрямування. При цьому більш ефективним виявився метод диференціальної еволюції, який відноситься до еволюційних алгоритмів. Отже, розглянуті методи продемонстрували свою ефективність й конкурентоздатність при розв'язуванні складних оптимізаційних задач, і передбачають подальший розвиток, зокрема у напрямку еволюційних стратегій формування популяції.

#### Висновки

У роботі розглянуто біоінспіровані алгоритми оптимізації, а саме метод

бактеріальної оптимізації і метод оптимізації зграєю вовків, які відносяться до методів ройового інтелекту, а також метод диференціальної еволюції. Дані методи працюють одночасно з великою кількістю потенційних розв'язків. Кожен розв'язок поступово поліпшується і оцінюється, таким чином впливаючи на покращення наступного розв'язку. Представлено загальний опис та покроковий алгоритм для кожного розглянутого методу, здійснено їх програмну реалізацію у середовищі MATLAB.

Наведено постановку прикладних задач умовної оптимізації інженерного спрямування, зокрема задачі оптимізації конструкції редуктора і задача оптимізації конструкції натяжної/компресійної пружини. Для чисельного розв'язування даних задач використано метод штрафних функцій.

Проведено обчислювальні експерименти з порівняння отриманих розв'язків задач умовної оптимізації розглянутими методами ройового інтелекту, а також іншими методами різних авторів.

Встановлено, що наведені методи ройового інтелекту та метод диференціальної еволюції можна застосовувати для розв'язування різних за складністю прикладних задач умовної оптимізації. Зазначені методи не накладають жодних обмежень до вигляду цільової функції, що важливо при використанні штрафних функцій, і завжди знаходять наближений глобальний мінімум.

#### Список використаної літератури:

1. Красношлык Н.А. Решение задачи глобальной оптимизации модифицированным алгоритмом летучих мышей / Н.А. Красношлык // Радиотехника. Информатика. Управление. – 2015. – № 4(35). – С. 96-103.
2. Талімончик А.С. Дослідження та вдосконалення методів світлячків і зграї вовків при розв'язуванні задач оптимізації і машинного навчання / А.С. Талімончик, Н.О. Красношлык // Вісник Черкаського університету. Серія «Прикладна математика. Информатика». – 2016. – № 1-2. – С. 77-89.
3. Карпенко А. П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой : учебное пособие / А. П. Карпенко. – Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 448 с.
4. Фразе-Фразенко О.О. Багатоагентний метод виділення інформативних ознак зображень у системах доступу / О.О. Фразе-Фразенко // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. – 2013. – № 15(1). – С. 210-218.
5. Вікіпедія. Стаття «Колективний інтелект» [Електронний ресурс]: [Веб-сайт]. Електронний ресурс. – Режим доступу: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Колективний\\_інтелект](https://uk.wikipedia.org/wiki/Колективний_інтелект) (дата звернення 19.02.2018) – Назва з екрана.
6. Скобцов Ю. А. Метаэвристики : монография / Ю. А. Скобцов, Е. Е. Федоров. – Донецк: Изд-во «Ноулидж» (Донецкое отделение), 2013. – 426 с.
7. Yang C. Algorithm of Marriage in Honey Bees Optimization Based on the Wolf Pack Search / Chenguang Yang, Xuyan Tu, Jie Chen // *International Conference on Intelligent Pervasive Computing*: 11 - 13 October 2007, IEEE Computer Society, Washington, USA. – 2007. – p. 462-467.
8. Lin M.-H. Design Optimization of a Speed Reducer Using Deterministic Techniques / Ming-Hua Lin, Jung-Fa Tsai, Nian-Ze Hu, and Shu-Chuan Chang // *Mathematical Problems in Engineering*. – Vol. 2013. – P. 1-7 (Article ID: 419043).
9. Cagnina L. C. Solving engineering optimization problems with the simple constrained particle swarm optimizer / L. C. Cagnina, S. C. Esquivel, C. A. C. Coello // *Informatica*. – 2008. – Vol. 32. – № 3. – P. 319-326.
10. Mirjalili S. Grey wolf optimizer / S. Mirjalili, S. M. Mirjalili, A. Lewis // *Advances in engineering software*. – 2014. – Vol. 69. – P. 46-61.

#### References:

1. Krasnoslyk N. O. (2015) A Modified bat algorithm for solving global optimization problem. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, № 4/35, 88-95 (in Rus)
2. Talimonchik A. & Krasnoslyk N. (2016) Research and improvement of methods glowworm swarm optimization and wolf pack search for solving optimization problems and machine learning. *The Cherkasy University Bulletin. Computer Sciences*, №1-2, 77-89 (in Ukr)

3. Karpenko A. P. (2014) Modern algorithms of search optimization. Algorithms inspired by nature: a tutorial. Moscow: Publishing House of the N.E. Bauman MSTU (in Rus)
4. Frazee-Frazenko A. A. (2013) Multi-agent methods for the isolation of informative features from the image. *The Volodymyr Dahl East-Ukrainian National University Bulletin*, 15 (1), 210-218 (in Ukr)
5. Wikipedia. Article "Collective Intelligence" [Electronic resource]: [Web-site]. – Electronic Data. – Access mode: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Kolective\\_intelektiv](https://uk.wikipedia.org/wiki/Kolective_intelektiv) (Last accessed: 19.02.2018). The name of the screen. (in Ukr)
6. Skobtsov Yu. A. & Fedorov E. E. (2013) Metaheuristics: monograph. Donetsk: Publishing house "Knolidzh" (Donetsk branch).
7. Chenguang Yang & Xuyan Tu & Jie Chen (2007) Algorithm of Marriage in Honey Bees Optimization Based on the Wolf Pack Search. *International Conference on Intelligent Pervasive Computing*: 11-13 October 2007, IEEE Computer Society, Washington, USA, 462-467.
8. Ming-Hua Lin, Jung-Fa Tsai, Nian-Ze Hu, and Shu-Chuan Chang (2013) Design Optimization of a Speed Reducer Using Deterministic. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 1-7 (Article ID: 419043).
9. Cagnina L. C. & Esquivel S. C. & Coello C. A. C. (2008) Solving engineering optimization problems with the simple constrained particle swarm optimizer. *Informatica*, 32(3), 319-326.
10. Mirjalili S. & Mirjalili S. M. & Lewis A. (2014) Grey wolf optimizer. *Advances in engineering software*, 69, 46-61.

**TALIMONCHYK Anna,**

The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, student

**KRASNOSHYLYK Nataliya,**

The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, PhD, Senior Lecturer

# **SOLVING ENGINEERING CONSTRAINED OPTIMIZATION PROBLEMS WITH SWARM INTELLIGENCE METHODS**

**Abstract. Introduction.** Solving many of the actual problems in various applied and fundamental sciences is reduced to the global optimization problem. The stochastic methods, which do not impose additional restrictions on the problem statement, are used to effectively solve such problems. Stochastic search algorithms began to intensively develop in the 1980's. Among such algorithms, nature-inspired algorithms, take on an important place.

Swarm intelligence describes the complex collective behavior of a self-organized decentralized system. Collective intelligence systems, as a rule, consist of a plurality of agents (multi-agent system) that interact locally with each other and with the environment. The agents themselves are usually quite simple, but all together, locally interacting, create the so-called collective intelligence.

Algorithm based on swarm intelligence methods belong to a wider class nature-inspired algorithms. The bio-inspired algorithms make up most of the algorithms inspired by nature. Some bio-inspired algorithms do not use swarm intelligence. The method of differential evolution is not directly related to any biological behavior, but it has similarities with genetic algorithms, and also has the keyword "evolution", so it can be classified as a category of bio-inspired algorithms.

**Purpose.** The aim of this article is to apply swarm intelligence methods and differential evolution to the solution of engineering constrained optimization problems.

**Results.** The paper considers bacterial foraging optimization algorithm and wolf pack search algorithm, which relates to the swarm intelligence, and differential evolution method. These methods simultaneously work with a large number of potential solutions. Each solution is gradually improved and evaluated, thus influencing the improvement of the next solution. A general description and step-by-step algorithm for each method under consideration is presented.

The article presents the engineering constrained optimization problems, in particular problems of tension/compression spring design and welded beam design. For the numerical solution of these problems, the method of penalty functions is used.

Computational experiments were carried out to compare the obtained solutions of the constrained optimization problems with the considered methods of swarm intelligence, as well as other methods of different authors. The given methods of swarm intelligence and differential evolution can be used to solve various on the complexity problems of constrained optimization, was defined. These methods do not impose any restrictions on the objective function, which is important when using penalty functions, and always find an approximate global minimum.

**Conclusion.** *Swarm intelligence methods can be effectively used to solve the engineering constrained optimization problems. At the same time, the differential evolution method, which relates to evolutionary algorithms, proved to be more effective. Consequently, the considered methods demonstrated their effectiveness and competitiveness in solving complex optimization problems, and foresee further development.*

**Key words:** *swarm intelligence methods, bacterial foraging optimization algorithm, wolf pack search, differential evolution, constrained optimization problem.*

Стаття надійшла 21.03.2017

Прийнято до друку 24.04.2017

УДК 519.85

PACS 89.20.Bb; 89.20.Ff; 89.20.Kk;  
89.40.-a; 89.65.Lm

**СТАНІНА Ольга Дмитрівна**

ДВНЗ «Український хіміко-технологічний  
університет», асистент кафедри  
інформаційних систем  
e-mail: stanina@i.ua

## **КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ В ОДНОМУ КЛАСІ НЕПЕРЕРВНИХ БАГАТОЕТАПНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН**

**Анотація.** У роботі розглянуто двохетапну задачу розміщення підприємств з неперервно розподіленим ресурсом, як різновид задачі оптимального розбиття множин з розміщенням центрів першого етапу без обмежень на їх потужності. Метою даної роботи є отримання необхідних та достатніх умов оптимальності для задачі оптимального розбиття множин з розміщенням центрів першого етапу без обмежень на їх потужності. Для двохетапної задачі розміщення підприємств з неперервно розподіленим ресурсом сформульовані необхідні і достатні умови оптимальності. Показано, що така задача через функціонал Лагранжа може бути зведена до задачі оптимізації негладкої функції скінченного числа змінних.

**Ключові слова:** оптимальне розбиття множин, задачі розміщення-розподілу, багаторічні задачі розбиття, критерій оптимальності

### **Вступ**

З розвитком виробництва та інфраструктури актуальними становляться задачі розміщення-розподілу [2, 7], в яких, наприклад, потрібно знайти на деякій території оптимальні місця розташування підприємств-виробників і виявити зони їх обслуговування так, щоб мінімізувати транспортні витрати на доставку виробленої продукції до споживачів. На даний момент існує декілька підходів до моделювання та розв'язування таких задач. Один з них приводить до дискретних задач розміщення-розподілу (наприклад, задач розміщення на графі або вибір місць розташування із заданої скінченної кількості точок), інший описує розміщення підприємств на певній території з урахуванням неперервності розподілення продукту у цьому регіоні. Розробка математичних моделей та методів таких задач є колом досліджень різноманітних математичних шкіл [3, 8-10, 12], зокрема, науковою школою член-кореспондента НАН України, доктора фізико-математичних наук, заслуженого діяча науки і техніки України професора О.М. Кісельової [4-6]. Сьогодні в рамках вказаної школи проводяться дослідження, пов'язані з подальшим узагальненням теорії оптимального розбиття множин (ОРМ) та розповсюдженням її на нові класи задач.

Одним з таких напрямів є неперервні задачі ОРМ при наявності додаткових зв'язків між центрами, урахуванні різних категорій центрів, що розміщуються, та інших.

Окремо необхідно відзначити перспективність розгляду багатоетапних задач розміщення підприємств з неперервно-розподіленим ресурсом, як різновид неперервних задач ОРМ. Серед авторів, що займалися дискретними багатоетапними задачами, слід відзначити В.Л. Береснева, Е. Х. Гімаді, Ю.А. Кочетова, В.А. Трубіна, Д.Б. Юдіна та інших [3, 8-10, 12].

Дана робота є послідовним продовженням досліджень, пов'язаних з вивченням властивостей багатоетапних задач ОРМ та їх розв'язків. Вперше, математичні моделі таких задач були приведені в [7]. Вони представляють собою двоетапні неперервні задачі ОРМ з розміщенням центрів першого етапу і враховують той факт, що підприємства першого етапу мають бути пов'язані з підприємствами другого етапу. Останній факт обумовив ще одну назву таких задач – задачі ОРМ з додатковими зв'язками.

Метою цієї роботи є отримання необхідних і достатніх умов оптимальності для задачі ОРМ з розміщенням центрів першого етапу без обмежень на потужності.

### **1. Постановка задачі оптимального розбиття множин з додатковими зв'язками**

Змістовну постановку задачі оптимального розбиття множин з додатковими зв'язками можна сформулювати у такий спосіб [7, 11]. Нехай існує деяке виробництво, пов'язане з суб'єктами, які мають збирати (добувати) сировину від постачальників, неперервно розподілених в деякій області  $\Omega$ , переробляти її і відправляти для реалізації (або подальшої переробки) в пункти, розташування яких заздалегідь відомо. Підприємства, що переробляють сировину, будемо називати пунктами первинної переробки або підприємствами першого етапу, а пункти подальшої переробки – підприємствами другого етапу. Припустимо також, що:

- потужність  $j$ -го підприємства другого етапу відома і дорівнює  $b_j''$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ ;
- запас ресурсу в кожній точці області  $\Omega$  оцінений і описується функцією  $\rho(x)$ ;
- відомий спосіб розрахунку вартості доставки одиниці ресурсу  $c_i^l(x, \tau_i^l)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  – з точки  $x$  в пункт первинної переробки  $\tau_i^l$ ,
- вартість перевезення одиниці продукту  $c_{ij}''(\tau_i^l, \tau_j'')$  з пункту первинної переробки  $\tau_i^l$  в пункт  $\tau_j''$  пропорційна відстані між цими пунктами;
- кожен постачальник сировини  $x \in \Omega$  пов'язаний тільки з одним підприємством першого етапу  $\tau_i^l$ ,  $i = \overline{1, N}$ , який в свою чергу має бути пов'язаний хоча б з одним підприємством другого етапу  $\tau_j''$ ,  $j = \overline{1, M}$ .

Окрім того, будемо вважати, що потужність  $i$ -го виробника першого етапу визначається сумарним запасом ресурсу в області, що обслуговується цим підприємством, а його прибуток залежить тільки від транспортних витрат.

Необхідно визначити місця розташування підприємств першого етапу, зони обслуговування для них та обсяги перевезень між підприємствами першого та другого етапів так, щоб забезпечити мінімальну сумарну вартість доставки сировини і кінцевої продукції.

Математичною моделлю описаної задачі є наступна двоетапна неперервна задача розбиття множин з розміщенням центрів підприємств першого етапу.

Нехай  $\Omega$  – замкнута, обмежена, опукла, вимірна за Лебегом множина евклідового простору  $E^n$ ;  $\sum_{\Omega}^N$  – множина усіх можливих розбиттів множини  $\Omega$  на  $N$  підмножин, що не перетинаються, а саме:

$$\sum_{\Omega}^N = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, \dots, N\}.$$

**Задача А.** Потрібно знайти таке розбиття множини  $\Omega$  на  $N$  вимірних за Лебегом підмножин  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$  (серед яких можуть бути й порожні), визначити координати  $\tau_i^I, \dots, \tau_N^I$  центрів цих підмножин та такі величини  $v_{11}, \dots, v_{NM}$ , які забезпечують мінімум функціоналу:

$$\begin{aligned} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1^I, \dots, \tau_N^I\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}) = \\ = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}, \end{aligned} \quad (1)$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (3)$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^N, \quad (4)$$

$$v_{ij}^{II} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad \tau^I = (\tau_1^I, \tau_2^I, \dots, \tau_N^I), \quad \tau^I \in \Omega^N.$$

Тут  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $b_j^{II}$ ,  $j = \overline{1, M}$ , – задані дійсні невід'ємні числа.

Функції  $c_i^I(x, \tau_i^I)$ ,  $i = \overline{1, N}$  – дійсні, обмежені, вимірні по аргументу  $x$  на  $\Omega$ , та опуклі по  $\tau$  на  $\Omega$  для всіх  $i = \overline{1, N}$ ;  $\rho(x)$  – дійсна визначена на множині  $\Omega$  функція, що інтегрується;  $\tau_j^{II}$ ,  $j = \overline{1, M}$  – задані точки області  $\Omega$ ,  $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, M}$  – функції скінченного числа (NM) змінних.

Тут обмеження (2) висловлюють баланс між потужностями підприємств першого та другого етапів, отже мають бути виконані умови розв'язності задачі (1) – (4), які визначає наступна лема.

**Лема 1.** Нехай, в задачі (1) – (4)  $\int_{\Omega} \rho(x) dx = S$ . Тоді, якщо виконується умова

$$\sum_{j=1}^M b_j^{II} = S, \quad \text{то допустима множина розв'язків задачі (1) – (4) є непорожньою.}$$

Введемо характеристичну функцію підмножини  $\Omega_i$  у вигляді:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N.$$

Розглянемо функціонал

$$I(\lambda(\cdot), \tau^I, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij},$$

де  $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x))$ ,  $x \in \Omega$ ,  $\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_N^I) \in \Omega^N$ ,  $v = (v_{11}, \dots, v_{NM}) \in R_{NM}^+$ .

Очевидно, що має місце рівність

$$I(\lambda(\cdot), \tau^I, v) = F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1^I, \dots, \tau_N^I\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}),$$

Перепишемо задачу А в термінах характеристичних функцій  $\lambda_i(x)$  підмножини  $\Omega_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  в наступному вигляді.

**Задача Б.** Знайти

$$\min_{\lambda(\cdot), \tau^I, v} I(\lambda(\cdot), \tau^I, v),$$

при обмеженнях

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j = \overline{1, M};$$

$$\lambda(\cdot) \in \Gamma_1, \quad \tau^I \in \Omega^N, v \in R_{NM}^+;$$

де

$$\Gamma_1 = \left\{ \lambda(\cdot) = \lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, x \in \Omega, \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1, x \in \Omega \right\}. \quad (5)$$

Задача Б є задачею нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними  $\lambda(\cdot)$ . Перейдемо від неї до задачі зі значеннями  $\lambda(\cdot)$  з відрізка  $[0, 1]$ .

**Задача В.** Знайти  $\lambda^*(\cdot) \in \Gamma_2$ ,  $\tau_*^I \in \Omega^N$  и  $v_{ij}^* \in R_{NM}^+$  такі, що

$$I(\lambda^*(\cdot), \tau_*^I, v_{ij}^*) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2, \tau^I \in \Omega^N, v \in R_{NM}^+} I(\lambda(\cdot), \tau^I, v),$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^H, \quad j = \overline{1, M},$$

де

$$\Gamma_2 = \left\{ \lambda(\cdot) = \lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot) : \lambda_i(x) \in \Gamma, \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1, x \in \Omega \right\}$$

$$\Gamma = \{ \lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)) : 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, \forall x \in \Omega, i = \overline{1, N} \}.$$

В [6] показано, що  $\Gamma_2$  – опукла, замкнена, обмежена множина Гільбертового простору  $L_2^N(\Omega)$ .

Зрозуміло, що

$$I(\lambda^*(\cdot), \tau_*^I, v^*) = \min_{\tau^I \in \Omega^N, v \in R_{NM}^+} \left[ \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2} I(\lambda(\cdot), \tau^I, v) \right], \quad (6)$$

Згідно з результатів [3-5] при кожній фіксованій парі  $\tau^I \in \Omega^N$  та  $v \in R_{NM}^+$  внутрішня задача (6) лінійна відносно  $\lambda(\cdot)$  на  $\Gamma_2$  і є глобально розв'язною. Крім того, серед множини оптимальних розв'язків задачі В є оптимальні розв'язки задачі Б.

## 2. Необхідні і достатні умови оптимальності

Для отримання необхідних і достатніх умов оптимальності для задачі В введемо функціонал Лагранжа в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi(\cdot)) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij} + \\
&+ \sum_{j=1}^M \eta_j (-\sum_{i=1}^N v_{ij} + b_j^{II}) + \int_{\Omega} \psi_0 (\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1) dx + \sum_{i=1}^N \psi_i (\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij}) = \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} + \\
&+ \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{II} + \int_{\Omega} \psi_0 (\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1) dx,
\end{aligned} \tag{7}$$

де  $\lambda(\cdot) \in \Gamma$ ,  $\tau^I \in \Omega^N$ ,  $v \in R_{NM}^+$ ,  $\Psi(x), x \in \Omega$  – вектор-функція,  $\Psi(\cdot) \in \Lambda$ ,  $\Lambda = \{\Psi(\cdot) = (\psi_0(\cdot), \psi, \eta) : \psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2, \psi \in E_N, \eta \in E_M\}$ .

Пару елементів  $(\{\lambda^*(\cdot), \tau^I, v^*\}, \Psi^*(\cdot))$  назвемо сідловою точкою функціоналу (7) на множині  $\{\Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+\} \times \Lambda$ , якщо

$$L(\{\lambda^*(\cdot), \tau^I, v^*\}, \Psi(\cdot)) \leq L(\{\lambda^*(\cdot), \tau^I, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \leq L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi^*(\cdot)) \text{ для всіх } \lambda(\cdot) \in \Gamma, \tau^I \in \Omega^N, \Psi(\cdot) \in \Lambda, v \in R_{NM}^+ \text{ або}$$

$$\begin{aligned}
L(\{\lambda^*(\cdot), \tau^{I*}, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) &= \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+} \left[ \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi(\cdot)) \right] = \\
&= \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} \left[ \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi(\cdot)) \right]
\end{aligned}$$

Лема 2. Для того, щоб пара  $(\{\lambda(\cdot)^*, \tau^{I*}, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \in \{\Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+\} \times \Lambda$  була сідловою точкою функціоналу (7), необхідно і достатньо існування такого, відмінного від тотожного нуля, вектора  $\{\Psi^*(\cdot)\}$ , щоб виконувалися умови:

$$1) L(\{\lambda^*(\cdot), \tau^{I*}, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \leq L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi^*(\cdot)), \\
(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi^*(\cdot)) \in \{\Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+\} \times \Lambda,$$

$$2) \sum_{i=1}^N \lambda_i^*(x) = 1, \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}^*, \sum_{i=1}^N v_{ij}^* = b_j^{II}.$$

Згідно з теоремою Куна-Таккера [1], перша компонента сідлової точки функціоналу Лагранжа і буде оптимальним розв'язком задачі В.

Отже, перейдемо до розв'язання наступної задачі:

$$L(\{\lambda^*(\cdot), \tau^{I*}, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) = \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi(\cdot)). \tag{8}$$

Нехай  $(\bar{\tau}^I, \bar{v})$  – довільний, але фіксований елемент з множини  $\Omega^N \times R_{NM}^+$ . Розглянемо наступну задачу: знайти вектор-функцію  $\bar{\lambda}(\cdot) \in \Gamma$ , яка забезпечує  $\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), \bar{\tau}^I, \bar{v}\}, \bar{\Psi}(\cdot))$  при будь-якому  $\bar{\Psi}(\cdot) \in \Lambda$ , де

$$\begin{aligned}
L(\lambda(\cdot), \bar{\tau}^I, \bar{v}, \bar{\Psi}(\cdot)) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c_i^I(x, \bar{\tau}_i^I) \rho(x) + \bar{\psi}_0(x) + \bar{\psi}_i \rho(x)) \lambda_i(x) dx + \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\bar{\tau}_i^I, \tau_j^{II}) - \bar{\eta}_j - \bar{\psi}_i) \bar{v}_{ij} + \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j b_j^{II} - \int_{\Omega} \bar{\psi}_0(x) dx,
\end{aligned} \tag{9}$$

Очевидно, що

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\lambda(\cdot), \bar{\tau}^I \bar{v}, \bar{\Psi}(\cdot)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^H(\bar{\tau}_i^I, \tau_j^H) - \bar{\eta}_j - \bar{\psi}_i) \bar{v}_{ij} + \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j b_j^H - \int_{\Omega} \bar{\psi}_0(x) dx + \\ + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_{0 \leq \lambda_i(x) \leq 1} [(c_i^I(x, \bar{\tau}_i^I) \rho(x) + \bar{\psi}_0(x) + \bar{\psi}_i \rho(x)) \lambda_i(x)] dx.$$

Оптимальний розв'язок задачі мінімізації функціоналу (9) за змінною  $\lambda(\cdot) \in \Gamma$  при довільних фіксованих векторах  $\bar{\tau}^I$ ,  $\bar{v}$  та вектор-функції  $\bar{\Psi}(\cdot)$  можна записати в наступний спосіб: м.в. для  $x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \tilde{n}_i^I(x, \bar{\tau}_i^I) \rho(x) + \bar{\psi}_0(x) + \bar{\psi}_i \rho(x) > 0 \\ 0, & \text{якщо } \tilde{n}_i^I(x, \bar{\tau}_i^I) \rho(x) + \bar{\psi}_0(x) + \bar{\psi}_i \rho(x) < 0 \\ \in [0, 1], & \text{якщо } \tilde{n}_i^I(x, \bar{\tau}_i^I) \rho(x) + \bar{\psi}_0(x) + \bar{\psi}_i \rho(x) = 0 \end{cases}, \quad i = \overline{1, N}, \quad \bar{\Psi}(\cdot) \in \Lambda. \quad (10)$$

З усіх  $\bar{\Psi}(\cdot) \in \Lambda$  виберемо такі  $\bar{\Psi}^*(\cdot) \in \Lambda$ , що відповідні їм за формулою (10)  $\lambda_i^*(x)$  при фіксованих інших параметрах будуть характеристичними функціями множини  $\Omega_i^*$ ,  $i = \overline{1, N}$ , які задовольнятимуть умову

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^*(x) = 1, \quad \text{м.в. для } x \in \Omega.$$

Тобто для усіх  $x \in \Omega$  компоненти вектор-функції  $\lambda^*(x)$  можна обчислити за однією з наступних формул: або

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \tilde{n}_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) + \bar{\psi}_0^*(x) + \bar{\psi}_i^* \rho(x) > 0, \text{ тоді } x \notin \Omega \\ 1, & \text{якщо } \tilde{n}_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) + \bar{\psi}_0^*(x) + \bar{\psi}_i^* \rho(x) = 0, \text{ тоді } x \in \Omega \end{cases}, \quad (11)$$

за умови  $\text{mes}(x \in \Omega : c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) + \bar{\psi}_0^*(x) + \bar{\psi}_i^* \rho(x) < 0) = 0$ , або

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) + \bar{\psi}_0^*(x) + \bar{\psi}_i^* \rho(x) > 0, \text{ тоді } x \notin \Omega_i^*, \\ 1, & \text{якщо } c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) + \bar{\psi}_0^*(x) + \bar{\psi}_i^* \rho(x) < 0, \text{ тоді } x \in \Omega_i^*, \end{cases} \quad (12)$$

за умови  $\text{mes}(x \in \Omega : c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) + \bar{\psi}_0^*(x) + \bar{\psi}_i^* \rho(x) = 0) = 0$ .

Нехай  $\bar{\Psi}(\cdot) = \bar{\Psi}^*(\cdot)$ , а  $\lambda^*(\cdot)$  — обрана за (11). Тоді, з леми 2 випливає, що при фіксованих  $\bar{\tau}^I$ ,  $\bar{v}$  та вектор-функції  $\bar{\Psi}(\cdot)$  вектор-функція  $\lambda^*(\cdot)$  є першою компонентою сідлової точки функціоналу Лагранжа (7). Теж саме можна сказати про вектор-функція  $\lambda^*(\cdot)$ , яка визначається за формулою (12).

Порівнюючи (11) та (12), можна побачити, що координати вектор-функції  $\lambda_i^*(\cdot)$  з (11) та (12) визначають одне й те саме розбиття  $(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*)$ , відрізняється лише форма запису умов приналежності точки  $x$  до підмножини  $\Omega_i^*$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Тому вирази (11) та (12) будемо вважати різною формою запису однієї і тієї ж відповідного елементу першої компоненти сідлової точки  $(\{\lambda(\cdot)^*, \tau^{I*}, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \in \{\Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+\} \times \Lambda$ .

Зазначимо, що форма запису (12) переважніша за вираз (11), оскільки в цьому випадку майже всюди для  $x \in \Omega$  компоненти вектор-функції  $\lambda^*(\cdot)$  можуть бути записані у компактному вигляді через функцію  $\text{sign}(\cdot)$ :

$$\lambda_i^*(x) = \frac{1}{2} \{1 - \text{sign}(c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x))\}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (13)$$

При цьому умову  $mes(x \in \Omega : c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) = 0) = 0$  будемо називати **умовою сильної регулярності** для функціоналу (7).

В силу довільності вибору векторів  $\bar{\tau}^l$ ,  $\bar{v}$ , в формулі (13) позначку « $\tau$ » надалі будемо опускати. Підставивши  $\lambda_i^*(\cdot)$  з (13) в рівності (2), (5), отримаємо майже всюди для  $x \in \Omega$ :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \text{sign}(c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x)) = N - 2 \\ \int_{\Omega} \rho(x) \text{sign}(c_i^l(x, \tau_i^l) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x)) dx = S - 2 \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (14)$$

Таким чином, при виконанні умов сильної регулярності для функціоналу (7) для будь-яких векторів  $\tau^l \in \Omega^N$ ,  $v \in R_{NM}^+$  перша компонента оптимального розв'язку задачі В однозначно визначається за формулами (13), причому функція  $\psi_0(\cdot)$  та константи  $\psi_1, \dots, \psi_N$  – розв'язок системи (14).

Далі будемо припускати, що для задачі А виконуються такі умови:

$$\rho(x) > 0, \text{ майже всюди для } x \in \Omega, \quad (15)$$

$$mesK = 0, \quad K = \{x \in \Omega : c_i^l(x, \tau_i^l) - c_j^l(x, \tau_j^l) = \text{const}, i \neq j, i, j = \overline{1, N}\}. \quad (16)$$

Справедливі наступні твердження.

Твердження 1. Нехай для задачі А має місце умова (15),  $v \in R_{NM}^+$ , вектор  $\tau^l \in \Omega^N$  такий, що виконується умова (16), а компоненти вектор-функції  $\Psi(\cdot)$  задовольняють систему (14), тоді для функціоналу  $L(\{\lambda(\cdot), \tau^l, v\}, \Psi(\cdot))$  умова сильної регулярності виконується.

Твердження 2. Нехай  $v = \bar{v}$  – довільний допустимий вектор з множини  $R_{NM}^+$ , для якого виконуються умови (2), (3). Якщо виконані умови (15), (16), то множини перших компонент оптимальних розв'язків задач Б та В співпадають.

Розглянемо задачу А, для будь-якого, довільно вибраного фіксованого  $\tau^l = (\tau_1^l, \tau_2^l, \dots, \tau_N^l)$ ,  $\tau^l \in \Omega^N$ . Зафіксуємо довільний вектор  $\bar{v} \in R_{NM}^+$ , що задовольняє умови (2) – (4). Розглянемо допоміжну задачу:

$$F^{\bar{v}}(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) \rightarrow \min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N}, \quad (17)$$

за умови

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M \bar{v}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

де  $F^{\bar{v}}(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) = F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\bar{v}_{11}, \dots, \bar{v}_{NM}\})$ .

Для задачі (17) має місце наступна теорема.

Теорема 1. Нехай в задачі (17),  $\rho(x) \geq 0$  майже всюди для  $x \in \Omega$ . Тоді, якщо допустиме розбиття  $(\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_N^*)$  є оптимальним розв'язком задачі (17), то існують дійсні константи  $\psi_1, \dots, \psi_N$ , для яких

$$c_i^l(x, \tau_i^l) - c_j^l(x, \tau_j^l) = \psi_j - \psi_i \text{ м. в. для } x \in \Omega_i^*, i, j = \overline{1, N}. \quad (18)$$

Доведення. Нехай  $(\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_N^*)$  є оптимальним для задачі (17) та нехай  $x$  – довільна точка однієї з підмножин  $\Omega_i^*, i = \overline{1, N}$ , множини  $\Omega$ . Якщо  $v = \bar{v}$ , то (17) еквівалентна задачі В при фіксованому  $v = \bar{v}$  та  $\tau^I \in \Omega^N$ .

1. Вважатимемо спочатку, що множина  $\Omega_i^*$  ідентифікується характеристичною функцією  $\lambda_i^*(\cdot)$  виду:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \tilde{n}_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) > 0 \\ 1, & \text{якщо } \tilde{n}_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) < 0 \end{cases}, \quad (19)$$

де  $\psi_0(\cdot) \in L_\Omega^2$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Тоді згідно (19),  $\forall x \in \Omega_i^*, i = \overline{1, N}$ , матиме місце система нерівностей:

$$\begin{cases} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_1 \rho(x) \geq 0, \\ \dots \\ c_{i-1}^I(x, \tau_{i-1}^I) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_{i-1} \rho(x) \geq 0, \\ c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) \leq 0, \\ c_{i+1}^I(x, \tau_{i+1}^I) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_{i+1} \rho(x) \geq 0, \\ \dots \\ c_N^I(x, \tau_N^I) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_N \rho(x) \geq 0. \end{cases} \quad (20)$$

З того що задача В має розв'язок, випливає сумісність системи нерівностей (20). За умови сильної регулярності функціоналу

$$\begin{aligned} L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi(\cdot)) = & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x)) \lambda_i(x) dx + \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^II(\tau_i^I, \tau_j^II) - \eta_j - \psi_i) \bar{v}_{ij} + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^II - \int_{\Omega} \psi_0(x) dx, \end{aligned}$$

функцію  $\psi_0(\cdot)$  в системі (20) майже всюди для  $x \in \Omega_i^*, i = \overline{1, N}$ , можна обрати у вигляді:

$$\psi_0(x) = -\frac{1}{2}((c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i) + \min_{j \neq i} (c_j^I(x, \tau_j^I) + \psi_j)) \rho(x), \quad (21)$$

де  $c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i = \min_{k=1, N} (c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k)$ .

Підставляючи знайдений вираз для  $\psi_0(x)$  в  $i$ -у нерівність системи (20), цю систему можна переписати у такий спосіб: майже всюди для  $x \in \Omega_i$

$$\frac{1}{2} \rho(x) \left[ (c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i) - \min_{j \neq i} (c_j^I(x, \tau_j^I) + \psi_j) \right] \leq 0, i = \overline{1, N}.$$

Звідси, з урахуванням умови, що  $\rho(x) \geq 0$  майже всюди для  $x \in \Omega_i$ , та довільності індексу  $i = \overline{1, N}$ , отримуємо виконання умови:

$$c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i \leq c_j^I(x, \tau_j^I) + \psi_j \text{ майже всюди для } x \in \Omega_i, i, j = \overline{1, N}.$$

Отже, за умови визначення вектор-функції  $\lambda_i^*(\cdot)$  за формулою (19), нерівність (18) доведена.

2. Будемо вважати тепер, що множина  $\Omega_i$  ідентифікується характеристичної функцією  $\lambda_i(x)$  виду:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_i^I(x, \tau_i^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) > 0 \\ 1, & \text{якщо } c_i^I(x, \tau_i^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) = 0 \end{cases}.$$

Тоді майже всюди для  $x \in \Omega_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , має місце система нерівностей:

$$\begin{cases} c_1^I(x, \tau_1^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_1\rho(x) \geq 0, \\ \dots \\ c_{i-1}^I(x, \tau_{i-1}^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_{i-1}\rho(x) \geq 0, \\ c_i^I(x, \tau_i^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) = 0, \\ c_{i+1}^I(x, \tau_{i+1}^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_{i+1}\rho(x) \geq 0, \\ \dots \\ c_N^I(x, \tau_N^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_N\rho(x) \geq 0. \end{cases} \quad (22)$$

Отже, майже всюди для  $x \in \Omega$  система (22) може бути записана у вигляді  $c_i^I(x, \tau_i^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) \geq 0, i = \overline{1, N}$ , звідки випливає така рівність:

$$\psi_0(x) = -(c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i)\rho(x), \quad \text{і . â. äëÿ } x \in \Omega_i^* \quad (23)$$

Підставляючи знайдений вираз для  $\psi_0(x)$  в  $j$ -у, нерівність системи (22),  $j \neq i, j = \overline{1, N}$ , отримуємо

$$c_j^I(x, \tau_j^I)\rho(x) - (c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i)\rho(x) + \psi_j\rho(x) \geq 0, \quad \text{і . â. äëÿ } x \in \Omega_i^*.$$

Звідси, з урахуванням умови  $\rho(x) \geq 0$  майже всюди для  $x \in \Omega$  та довільності індексу  $i = \overline{1, N}$ , отримаємо наступну нерівність:

$$c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i \leq c_j^I(x, \tau_j^I) + \psi_j \quad \text{майже всюди для } x \in \Omega_i^*, i, j = \overline{1, N}.$$

Теорема доведена.

Отже, координати першої компоненти оптимального розв'язку задачі В для майже всіх  $x \in \Omega$  та  $i = \overline{1, N}$  можна представити одним з наступних способів: або

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_i^I(x, \tau_i^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) > 0, \text{ тоді } x \notin \Omega_i^* \\ 1, & \text{якщо } c_i^I(x, \tau_i^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) < 0, \text{ тоді } x \in \Omega_i^* \end{cases} \quad (24)$$

за умов, що  $\text{mes}\{x \in \Omega : c_i^I(x, \tau_i^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) = 0\} = 0$ ,

$$\psi_0^*(\cdot) = -\frac{1}{2} \{ (c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i^*) + \min_{i \neq j} (c_j^I(x, \tau_j^I) + \psi_j^*) \} \rho(x), \quad (25)$$

а  $c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i^* = \min_{k=1, N} (c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k^*)$ , де  $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$  визначаються з системи (14) після підстановки до неї функцій  $\lambda^*(\cdot)$  та  $\psi_0^*(\cdot)$  згідно з (24), (25) відповідно;

або

$$\lambda_i^*(\cdot) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_i^I(x, \tau_i^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) > 0, \text{ тоді } x \notin \Omega_i^* \\ 1, & \text{якщо } c_i^I(x, \tau_i^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) = 0, \text{ тоді } x \in \Omega_i^* \end{cases} \quad (26)$$

за умов, що  $\text{mes}\{x \in \Omega : c_i^I(x, \tau_i^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x) < 0\} = 0$ ,

$$\psi_0^*(\cdot) = -\min_{k=1, N} (c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k^*) \rho(x), \quad (27)$$

$\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$  визначаються з системи (14) після підстановки до неї функцій  $\lambda^*(\cdot)$  та  $\psi_0^*(\cdot)$  згідно з (26), (27) відповідно.

Позначимо

$$G(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi(\cdot)) = \min_{\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\} \in \Gamma \times \Omega^N \times R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi(\cdot)).$$

Підставляючи формули (26), (27) в функціонал (7), отримуємо функцію, яка визначає мінімум функціоналу  $L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi(\cdot))$  по змінній  $\lambda(\cdot)$  і не містить у своєму виразі функції  $\psi_0(\cdot)$ :

$$G_1(\{\tau^I, v\}, \{\psi, \eta\}) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1, N}^N \min(c_i^I(x, \tau_i^I) + \psi_i) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{II}.$$

Позначимо

$$G_2(\{\psi, \eta\}) = \min_{\{\tau^I, v\} \in \Omega^N \times R_{NM}^+} G_1(\{\tau^I, v\}, \{\psi, \eta\}).$$

Тоді, задача, двоїста до задачі В, має вигляд:

$$G_2(\{\psi, \eta\}) \rightarrow \max. \quad (28)$$

Вочевидь, функція  $G_1(\{\tau^I, v\}, \{\psi, \eta\})$  за кожною із змінних  $v_{ij} \geq 0$  обмежена знизу, якщо виконується умова:

$$c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) \geq \eta_j + \psi_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}. \quad (29)$$

Отже, справедлива наступна теорема.

**Теорема 2.** Нехай для задачі В виконуються умови леми 1, та (15), (16). Тоді сідлова точка  $(\{\lambda^*(\cdot), \tau^{I*}, v^*\}, \{\psi^*, \eta^*\})$  функціоналу Лагранжу (7) для задачі В (де перша компонента  $\{\lambda^*(\cdot), \tau^{I*}, v^*\}$  є оптимальним розв'язком задачі Б) на множині  $\{\Gamma \times \Omega^{N \times N} \times R_{NM}^+\} \times \{E_N \times E_M\}$  визначається у такий спосіб: м.в. для  $x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \Omega = \{x \in \Omega : c_i^I(x, \tau_i^{I*}) + \psi_i^* = \min_{k=1, N} (c_k^I(x, \tau_k^{I*}) + \psi_k^*)\}, \quad i = \overline{1, N}, \\ 0 & \text{у іншому випадку} \end{cases}$$

а в якості  $\tau^{I*}, v^*, \psi^*, \eta^*$  обирається оптимальний розв'язок двоїстої задачі, приведеної до вигляду:

$$G(\{\psi, \eta\}) = \min_{\{\tau^I, v\} \in \Omega^N \times R_{NM}^+} \left[ \int_{\Omega} \min_{k=1, N} (c_k^I(x, \tau_k^I) + \psi_k) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} \right] + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{II} \rightarrow \max, \quad \psi \in E_N, \eta \in E_M,$$

за умов

$$(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}.$$

## Висновки

У роботі розглянуто двохетапну задачу розміщення підприємств з неперервно розподіленим ресурсом як різновид задачі оптимального розбиття множин з розміщенням центрів першого етапу без обмежень на їх потужності. Для двохетапної задачі розміщення підприємств з неперервно розподіленим ресурсом сформульовані необхідні і достатні умови оптимальності. Показано, що така задача через функціонал

Лагранжа може бути зведена до задачі оптимізації негладкої функції скінченного числа змінних. У подальшому результати роботи можуть бути використані під час розробки чисельних алгоритмів розв'язання вказаних задач і узагальнені на випадок наявності обмежень на потужності підприємств першого етапу.

#### Список використаної літератури:

1. Васильев Ф.П., Методы оптимизации –М.: Факториал пресс, 2002. — 824 с.
2. Гимади Э.Х., Эффективные алгоритмы для решения многоэтапной задачи размещения на цепи / Э.Х. Гимади // Дискретный анализ и исследование операций, Октябрь – декабрь 1995. Том 2, № 4, с. 13-31
3. Киселева Е.М. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К. : Наук. думка, 2013. – 606 с.
4. Киселева Е.М. Теория оптимального разбиения множеств в задачах распознавания образов, анализа и идентификации систем / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, С.А. Ус / М-во образования и науки Украины; Нац. горн. ун-т. – Д. : НГУ, 2015. – 270 с.
5. Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К.: Наукова Думка, 2005 – 564 с.
6. Ус С.А. О математических моделях многоэтапных задач размещения предприятий / Ус С.А., Станина О.Д // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб.наук.пр. – Д.: Вид-во «Ліра», 2014, с.258-268
7. Drezner Z. Facility Location: Application and Theory / Z. Drezner, H. Hamacher / Berlin: Springer. 2001
8. Fengqi You Mixed-Integer Nonlinear Programming Models and Algorithms for Large-Scale Supply Chain Design with Stochastic Inventory Management / Fengqi You , Ignacio E. Grossmann // Ind. Eng. Chem. Res. 2008, 47, 7802–7817
9. Trubin V. A. Simple multistage location problem on a treelike network / V. A. Trubin, F. A. Sharifov // Cybernetics and Systems Analysis. November–December, 1992, Volume 28, Issue 6, pp 912-917
10. Us S. On same mathematical models of facility location problems of mining and concentration industry / S. Us, O. Stanina // Theoretical and Practical Solutions of Mineral Resources Minig – Pivnyak, Bondarenko, Kovalevska (eds), 2015, pp. 419-424
11. Yu. Kochetov Bilevel facility location: discrete models and computational methods // Proceedings Of XXXVII Symposium in Operations Research – (SYMOPIS-2010). – 2010. – pp 12–16

#### References:

1. Vasilev, F.P. *Metody optimizacii* (2002) — М.: Faktorial press,. — 824 p. (in Rus)
2. Gimadi, E. Kh. *Jeffektivnye algoritmy dlja reshenija mnogojetapnoj zadachi razmeshhenija na cepi* (1995) Diskretnyj analiz i issledovanie operacij, IM SO RAS, Novosibirsk.. —Volume 2 — P. 13-31. (in Rus)
3. Kiseliova, E.M. & Koryashkina, L.S., *Modeli i metody reshenija nepreryvnyh zadach optimal'nogo razbivenija mnozhestv* (2013), — К. : Naukova Dumka. — 606 p. (in Rus)
4. Kiseliova, E.M. & Koryashkina, L.S., Us, S.A. *Teorija optimal'nogo razbivenija mnozhestv v zadachah raspoznavanija obrazov, analiza i identifikacii sistem* (2015) Ministry of education and science of Ukraine; National Mining University. D.: NMU. 270 p. (in Rus)
5. Kiseleva, E.M., Shor, N.C. *Nepreryvnye zadachi optimal'nogo razbivenija mnozhestv: teorija, algoritmy, prilozhenija: Monografija* (2005). — Kiev: Naukova Dumka. – 564 p. (in Rus)
6. Us, S.A., Stanina, O.D., *O matematicheskij modeljah mnogojetapnyh zadach razmeshhenija predpriyatij* (2014) / Pitaniya prikladnoji matematiki i matematichnogo modeljuvannja: zb.nauk.pr. — D.: Vid-vo «Lira». — P.258-268. (in Rus)
7. Drezner, Z. & Hamacher, H. (2001) *Facility Location: Application and Theory*. Berlin: Springer. 457 p
8. Fengqi Y., Grossmann I. E., *Mixed-Integer Nonlinear Programming Models and Algorithms for Large-Scale Supply Chain Design with Stochastic Inventory Management* (2008). Ind. Eng. Chem. Res. 47. P. 7802–7817.
9. Trubin V. A. & Sharifov F. A., *Simple multistage location problem on a treelike network* (1992) Cybernetics and Systems Analysis — Volume 28, Issue 6 — P. 912-917
10. Us S., Stanina O., *On same mathematical models of facility location problems of mining and concentration industry* (2015) Theoretical and Practical Solutions of Mineral Resources Minig – Pivnyak, Bondarenko, Kovalevska (eds), — P. 419-424
11. Yu. Kochetov, *Bilevel facility location: discrete models and computational methods* (2010) Proceedings Of XXXVII Symposium in Operations Research – (SYMOPIS-2010) – P.12–16

**STANINA Olga,**

Ukrainian State University of Chemistry and Technology, senior lecturer of the Information Systems Department

### **OPTIMALITY CRITERION IN ONE CLASS OF CONTINUOUS MULTISTAGE OPTIMAL PARTITION SETS PROBLEMS**

**Abstract. Introduction.** *With the development of production and infrastructure, the location-allocation problems arise in the situation, where, for example, there is a necessity to find optimal locations of manufacturing enterprises and to identify areas of their service while minimizing transport costs for the delivery of manufactured products to consumers. There are several approaches to modeling and solving such problems nowadays. One of them leads to discrete location-allocation problems (for example, location problems on a graph or selection of locations from a given finite number of points), the other describes the placement of enterprises in a given territory, taking into account the continuity of product distribution in the region. The development of mathematical models and solutions for such problems is a range of research for various mathematical schools, in particular, the scientific school of E.M. Kiselyova. The studies in this school are carried out today on further generalization of the theory of optimal partition sets (OPS) and its dissemination to new classes of problems. One of these areas is the continuous problem of the OPS with the existence of additional links between the centers, taking into account the different categories of centers placed, etc.*

*It is also necessary to note the prospect of considering multistage problems of location of enterprises with a continuously distributed resource as a kind of continuous problems of OPS. Among the authors who researched discrete multistage problems, should be noted the following V.L. Bernesnev, E. Kh. Gimadi, Yu.A. Kochetov, V.A. Trubin, DB Judin and others.*

*This work is a sequential continuation of research related to the study of the properties of multistage OPS problems and their solutions. Mathematical models of these problems represent two-stage continuous problems of OPS with the first stage centers placement and take into account the fact that enterprises of the first stage should be associated with enterprises of the second stage. The latter fact has given another name for such problems - OPS problems with additional links.*

**Purpose.** *Obtaining of necessary and sufficient conditions of optimality for the OPS problems with the first stage centers placement without restrictions on their power.*

**Results.** *Two-stage continuous problem of partitioning sets with the placement of enterprises centers of the first stage is formulated in this research. The necessary and sufficient conditions for optimality for the problem are obtained. The Optimal solution to the problem of minimizing the Lagrange function is given. The theorem that the saddle point is the optimal solution of the OPS problems is proved.*

**Conclusion.** *The necessary and sufficient optimality conditions for a two-stage problem of optimal partition sets with additional links and with placement of centers of the first stage were obtained in this research. In the future, the results of work can be used during the development of numerical algorithms for solving these problems and summarized in the event of restrictions on the capacity of enterprises in the first stage.*

**Key words:** *optimal partition sets, location-allocation problems, multistage location problems, optimality criterion.*

Стаття надійшла 17.02.2017  
Прийнято до друку 27.03.2017

УДК 533.63,534.23

PACS 43.28.-g,47.85.Gj.

**ЛУКЬЯНОВ Пётр Владимирович**

Институт гидромеханики НАНУ,  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
e-mail: lpv\_mail@ukr.net

## **СНИЖЕНИЕ BVI-ШУМА РОТОРА ВЕРТОЛЁТА С ПОМОЩЬЮ ЛОПАСТИ С ДВОЙНЫМ ИЗГИБОМ**

***Аннотация.** В работе поставлена и решена задача генерации шума взаимодействия изогнутой “sin-sin”-лопасти с завихренным потоком. Общая задача состоит из двух частей: аэродинамической и акустической части. Аэродинамическая постановка включает в себя систему уравнений Эйлера и уравнение неразрывности. Акустическая задача решена на основе предложенной ранее автором модели выделения звука из нестационарного потока, которая состоит из двух уравнений для звукового потенциала и пульсаций плотности. Решение задач выполнено численно с помощью численно-аналитического подхода. Анализ расчётных данных показал эффективность использования двойного “sin-sin”-изгиба для снижения BVI-шума. В частности, удалось снизить шум на 10-20дБ в зависимости от расчётной ситуации и местоположения на поверхности лопасти.*

**Ключевые слова:** “sin-sin”-лопасть ротора, снижение BVI-шума

### **Введение**

В последнее время в автомобилестроении и вертолётостроении внедряются современные экологически чистые технологии “Blue”-технологии. Если в автомобилестроении – это гибридные двигатели, обладающие пониженным количеством выбросов в атмосферу, то в случае вертолётостроения – ещё и специальные формы и конструкции лопастей ротора, позволяющие снизить BVI-шум. Это так называемые “Blue Edge”-технологии [1], [2]. В частности, компания Eurocopter финансирует исследования в области поиска оптимальной формы лопасти ротора вертолётостроения, которая одновременно обладает и надёжными аэродинамическими характеристиками и мало шумна в тоже время. Кроме программы “Blue Edge” проводятся также исследования по программе “Blue Pulse”-активный ротор [3], [4], использующий пьезоактивные гибкие компоненты (пластины) в конструкции лопасти. Использование пьезоактивных гибких модулей предназначается для снижения внешнего шума и вибраций с целью повышения комфорта пассажиров.

В представленной ниже работе предлагается дальнейшее развитие “Blue Edge”-технологий. Поэтому кратко остановимся на имеющихся достижениях в этом направлении. С целью снижения BVI-шума лопастям ротора вертолётостроения придают различную форму: их закругляют на концах или усекают, поворачивают и изгибают лопасть [2] вдоль размаха. В недавних исследованиях [1] наметилась новая тенденция - поиск моделей лопасти с двойным изгибом, а также лопасти в виде изогнутого (наполовину расправленного) птичьего крыла, которые оказываются менее шумными по сравнению с используемыми ранее только лишь закруглёнными на конце лопастями. Например, двойной изгиб лопасти позволяет снизить шум на 4-5дБ при снижении вертолётостроения [1]. Ввиду новизны исследований, или коммерческой тайны, авторы работы [1] не указывают конкретных параметров формы дважды изогнутой лопасти. На рисунках и фото можно лишь наблюдать качественную форму этих изгибов. Поэтому, в

настоящей работе исследуется тестовая модель лопасти с двойным “sin-sin” изгибом на предмет снижения генерируемого шума взаимодействия лопасти и вихрей (BVI-шума). Результаты численных расчётов, приведенные ниже, показали, что “sin-sin”-лопасть близка по генерируемому шуму к “Blue Edge”-лопасти [1].

### Цель исследований

Выполнить расчёт звукового поля, генерируемого взаимодействием потока с лопастью с двойным “sin-sin” изгибом. Провести сравнение полученных расчётных данных с имеющимися данными расчёта для закруглённой лопасти и “Blue Edge”-лопасти.

### Постановка задачи

Пусть есть лопасть (рис.1), форма которой в плоскости её размаха имеет два изгиба: первый изгиб в виде функции  $\sin$  в пределах изменения  $0 \leq z \leq 0.8R$ . Эта часть лопасти имеет форму половины основного периода функции  $\sin$ . При этом максимальная амплитуда изгиба, множитель при  $\sin$ , составляет 0.1;0.15;0.2. Таким образом, первый изгиб лопасти выбирается не более 20%. Второй изгиб,  $0.8R \leq z \leq R$ , представляет собой четверть основного периода функции  $\sin$ , т.е. в 2 раза быстрее изменяется, чем первый изгиб, но амплитуду отклонения оставим той же, что и для первого изгиба.

На вращающуюся лопасть, её переднюю кромку, набегаёт поток со скоростью  $U_\infty$  с распределёнными вдоль размаха лопасти вихрями Тэйлора. На внешнем конце лопасти формируется концевой вихрь Скулли. Таким образом, при взаимодействии этого течения с лопастью происходит генерация BVI-шума аэродинамического происхождения (физическая постановка задачи).

Для формулировки математической модели данной задачи положим, что течение вокруг лопасти идеальное сжимаемое, а тепловые изменения не влияют на формирование течения и генерируемого им звука. Пусть есть  $Oxuz$  – прямоугольная декартова система координат (см. рис.1). Лопасть в произвольный момент времени повернута в плоскости вращения на некоторый угол  $\alpha$  и расположена под углом атаки  $\gamma$  к набегающему на неё потоку. Система уравнений, описывающая течение лопасти имеет вид:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p, \operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

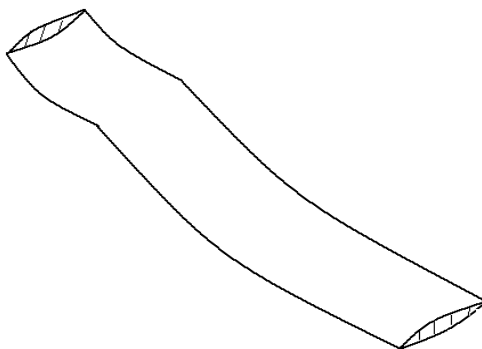


Рис.1 Лопасть с двойным “sin-sin” изгибом

Первое из уравнений – уравнение движения в форме Эйлера. Второе уравнение – уравнение неразрывности. На поверхности жёсткой лопасти задаётся условие непроницаемости течения:

$$\bar{v}_n = \bar{0}. \quad (2)$$

Уравнения (1)-(2), вместе с распределениями вихрей Тэйлора и Скулли, представляют собой аэродинамическую задачу.

Акустическая задача представляет собой следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a^2 \Delta \rho' = \operatorname{div}[\rho(\nabla(\vec{V} \nabla \varphi)) + \rho'(\nabla(\frac{\vec{V}^2}{2}) + \vec{V} \nabla \varphi) + \\ + \rho \cdot (\nabla \times \vec{V}) \times \nabla \varphi + \rho' \cdot (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V}] + \operatorname{div}[\vec{V} \cdot \operatorname{div}(\rho \nabla \varphi + \\ + \rho' \vec{V})] + \operatorname{div}[\nabla \varphi \operatorname{div} \rho \vec{V}] + \nabla a^2 \cdot \nabla \rho', \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \rho + \rho' \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \rho' = 0. \quad (4)$$

В уравнениях (3)-(4)  $\rho'$ ,  $\varphi$  – малые возмущения плотности и звуковой потенциал соответственно. В начальный момент времени  $\rho', \varphi|_{t=0} = 0$ . Граничное условие (по скоростям) для звуковой волны включено в (2).

#### Метод решения задачи

До решения данной задачи автором был решен целый ряд нестационарных задач для прямоугольной лопасти. При этом использовался численно-аналитический подход [5,6], который показал способность решения подобного рода задач. При решении поставленной выше задачи, для лопасти с двойным изгибом, он также был успешно применён. Единственной отличительной особенностью было большее количество узлов, чем для прямоугольной лопасти: по поперечной координате (вдоль сечения лопасти) задавалось не 80, а 85 расчётных точек.

**Ближнее поле.** Для численного расчёта в качестве тестовой лопасти выбиралась лопасть, которая в поперечном сечении имеет форму параболы  $y = x(1-x)$  с относительным утолщением  $c/R = 0.1$ . При этом относительное удлинение составляло  $AR = R/c = 10$ . При расчёте характеристик ближнего поля использовались уравнения (1), (2), (4) в безразмерной форме. Нормирование выполнялось на параметры невозмущённого течения –  $U_\infty$ ,  $\rho_\infty$ .

Как уже было указано выше, модификация формы лопасти вертолёт используется с целью снижения BVI-шума. Этот шум доминирует при манёврах вертолёт, то есть при сравнительно небольших числах Маха. Поэтому для изучения шумообразования данной лопасти в расчётах выбирались значения  $M = 0.2; 0.4$ . Вариация относительного изгиба лопасти составляла  $\delta = 0.1; 0.15; 0.2$ . Это значение в каждом расчётном случае задавалось одинаковым для двух *sin*-изгибов лопасти. Рассматривались два положения лопасти по отношению к набегающему потоку: под углами  $90^\circ$  и  $60^\circ$ . Передняя кромка лопасти располагалась под углами  $\gamma = 10^\circ; 5^\circ$  по отношению к плоскости вращения ротора.

Так, на рис.2а представлены пульсации безразмерной плотности  $\rho'$  для случая  $M = 0.2; \alpha = 60^\circ; \gamma = 10^\circ; \delta = 0.1$ . Наблюдаются несколько серий пиков. Первая серия пиков чётко отображает *sin*-изгибы лопасти: на графике присутствуют два слегка изрезанные сверху пика, по форме напоминающие *sin*-образную волну. Изрезанность верхушки фронтов означает наличие неустойчивости течения, обусловленной вихревой

структурой течения. Однако, как видим, форма передней кромки лопасти в определённой степени определяет распределение энергии в первой серии пиков.

Вторая серия пиков уже не имеет выраженную *sin*-образную форму. За ней, ближе к центру лопасти, заметны отдельные локальные всплески  $\rho'$  в виде двух диссипативных фронтов волны – поперечного и продольного. Амплитуды в них уже в 5-10 раз ниже амплитуд первой *sin*-образной серии. Как далее будет показано, для числа Маха  $M = 0.4$  эти фронты вообще рассыпаются по поверхности лопасти. Амплитуда в них в 10-15 раз ниже амплитуды передних *sin*-образных фронтов. Причина такой диссипации очевидна: вихри, сталкиваясь с лопастью, поначалу ещё сохраняют первоначальную концентрацию энергии, а затем распадаются по поверхности лопасти. Для угла  $\alpha = 90^\circ$  (рис.2b) синус-образная форма уже не сохраняется, точнее не формируется. Наблюдается лишь образование нескольких отдельных пиков и лишь один по своей форме отчасти напоминает искривлённую синус-волну.

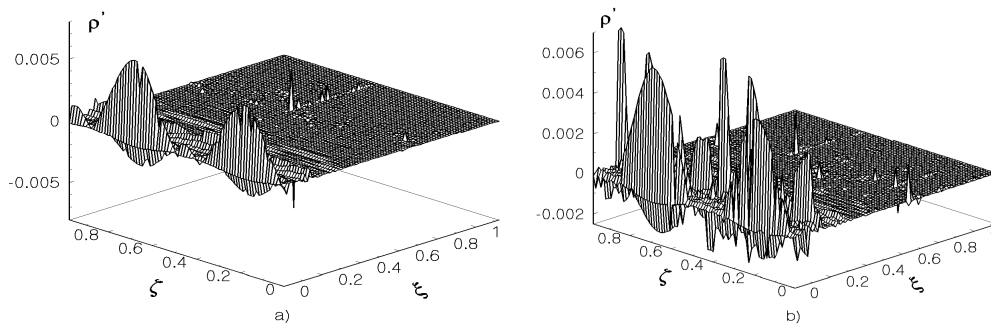
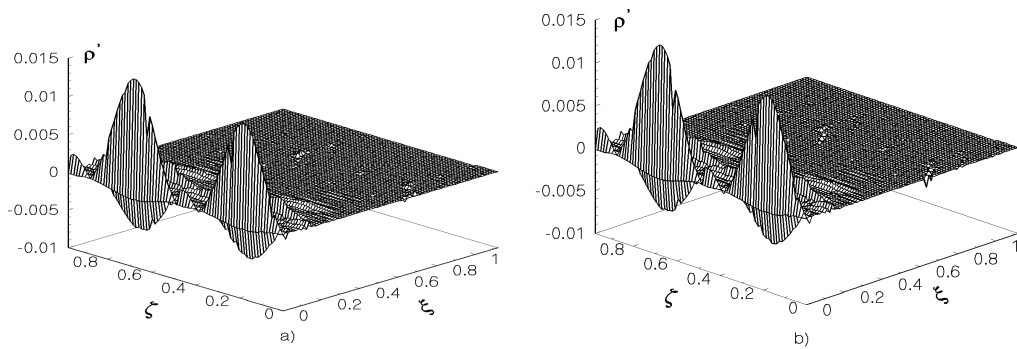
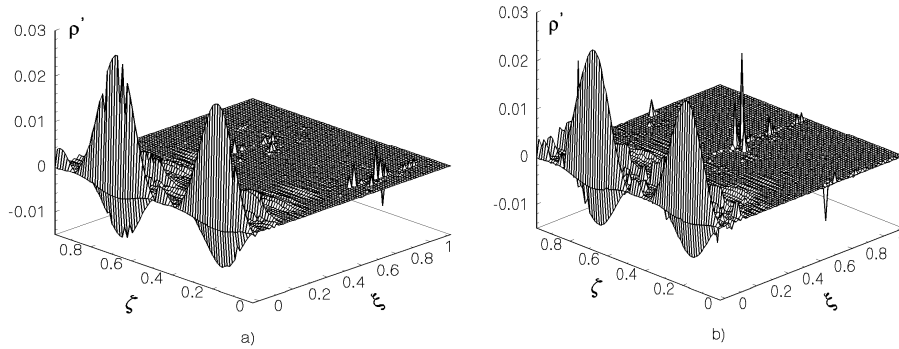
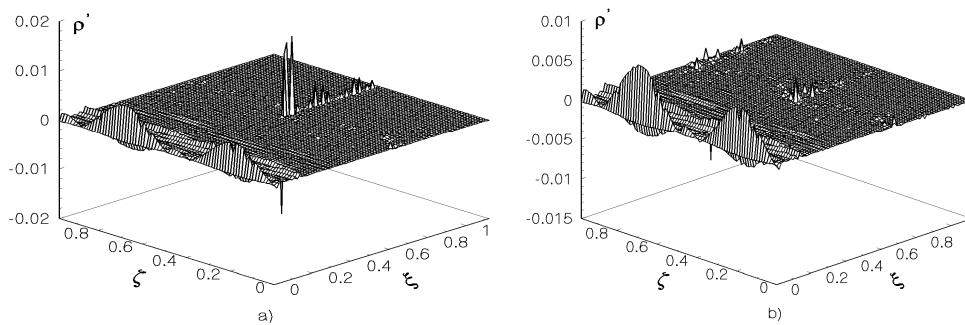


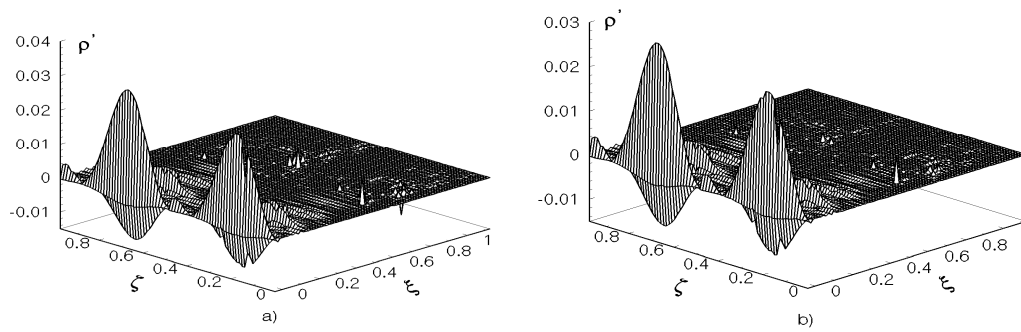
Рис.2 Распределение пульсаций плотности  $M = 0.2$ ,  $\gamma = 10^0$ ,  $\delta = 0.1$

С увеличением относительного изгиба лопасти  $\delta = 0.15$  (рис.3a,b) форма первых двух *sin*-образных пиков становится ещё более отчётливой. Это потому, что лопасть ещё больше искривлена, чем в предыдущем расчётном случае. При этом амплитуда этих пиков выросла примерно в два раза. Также поднялись уровни пиков и последующих за ней серий. Однако посередине лопасти уже практически не наблюдаются поперечная и продольная полосы пиков. Таким образом, происходит концентрация звуковой энергии (малых возмущений) в передней части лопасти. А это означает, что, изменяя форму лопасти, можно управлять BVI-шумом. Для значений  $M = 0.2$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ;  $\gamma = 10^\circ$ ;  $\delta = 0.2$  (рис.4) характер распределения амплитуд такой же, как и в случае  $\delta = 0.15$ , но они выросли по величине ещё больше. Здесь снова замечен вторичный фронт всплесков по середине лопасти.

Рис.3 Распределение пульсаций плотности  $M = 0.2$ ,  $\gamma = 10^0$ ,  $\delta = 0.15$ Рис.4 Распределение пульсаций плотности  $M = 0.2$ ,  $\gamma = 10^0$ ,  $\delta = 0.2$ 

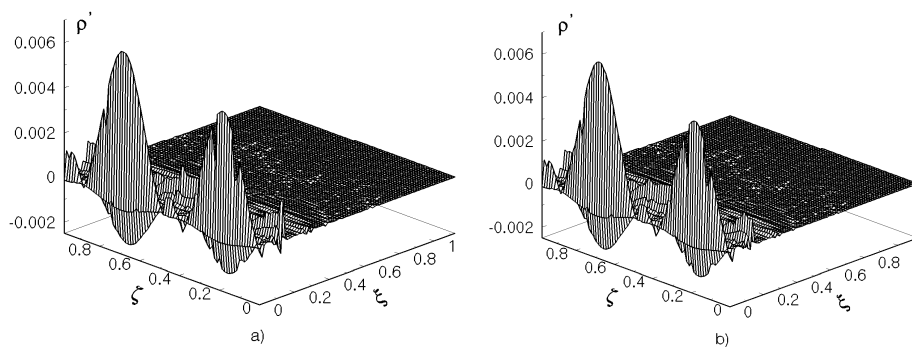
При угле атаки  $\gamma = 5^\circ$  картина  $\rho'$  несколько изменяется. Так в случае  $M = 0.2; \alpha = 60^\circ; \gamma = 5^\circ; \delta = 0.1$  (рис.5,6) наблюдаются обе *sin*-образные волны, но, в то же время, по центру лопасти присутствует узкий фронт поперёк лопасти. Для  $\alpha = 90^\circ$  он рассыпается на две зоны вдоль лопасти. С увеличением  $\delta = 0.15$  ситуация становится очень близкой к  $M = 0.2; \alpha = 60^\circ; \gamma = 10^\circ; \delta = 0.2$ .

Рис.5 Распределение пульсаций плотности  $M = 0.2$ ,  $\gamma = 5^\circ$ ,  $\delta = 0.1$

Рис.6 Распределение пульсаций плотности  $M = 0.2$ ,  $\gamma = 5^\circ$ ,  $\delta = 0.2$ 

Для больших скоростей встречного потока  $M = 0.4$  (рис.7-11) принципиального различия на графиках  $\rho'$  не наблюдается, но пики *sin*-волн уже во всех расчётных ситуациях более компактны (вытянуты) и последующие за ними серии поперечных возмущений также более отчётливо выделяются. Для значений угла  $\gamma = 10^\circ$  в середине лопасти уже не наблюдаются резкие пики (рис.3а), но зато перед этим видно, как спустя некоторое расстояние, каждый из *sin*- волн “рассыпается”. Такое явление не было присущим для лопасти без изгибов. Однако для угла атаки  $\gamma = 5^\circ$  посередине лопасти снова наблюдается ряд мелких всплесков, по амплитуде в 4-5 раз ниже *sin*-волн, но они более выражены для угла  $\alpha = 90^\circ$ , чем для угла  $\alpha = 60^\circ$ .

Если сравнить полученные результаты ближнего поля с ближним полем закруглённой лопасти [7], то мы видим, что у закруглённой лопасти не наблюдалась синус-образная форма  $\rho'$ , а лишь присутствовали отдельные резко выраженные пики.

Рис.7 Распределение пульсаций плотности  $M = 0.4$ ,  $\gamma = 10^\circ$ ,  $\delta = 0.1$

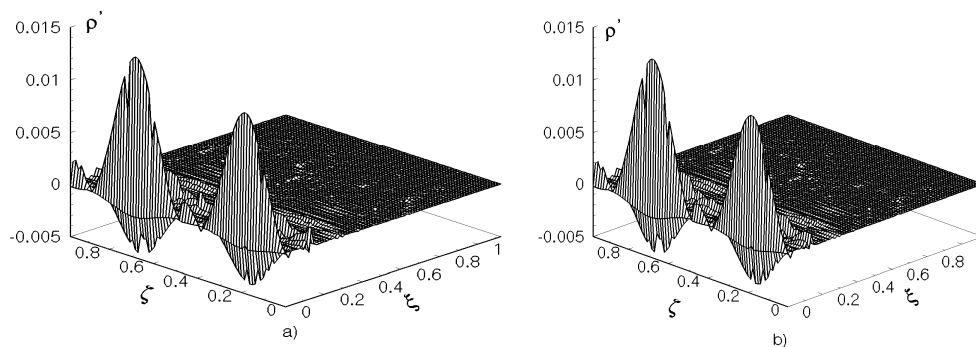


Рис.8 Распределение пульсаций плотности  $M = 0.4$ ,  $\gamma = 10^0$ ,  $\delta = 0.15$

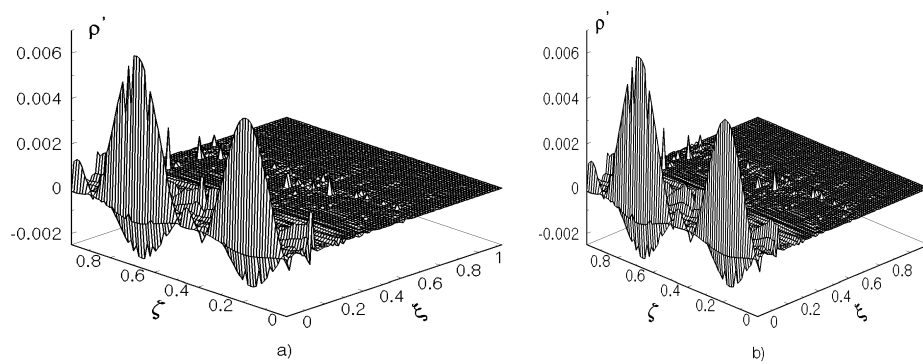


Рис.9 Распределение пульсаций плотности  $M = 0.4$ ,  $\gamma = 5^0$ ,  $\delta = 0.1$

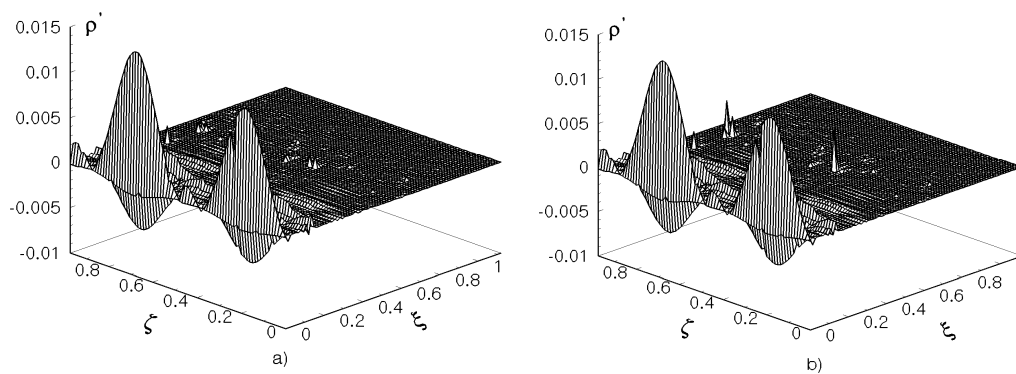
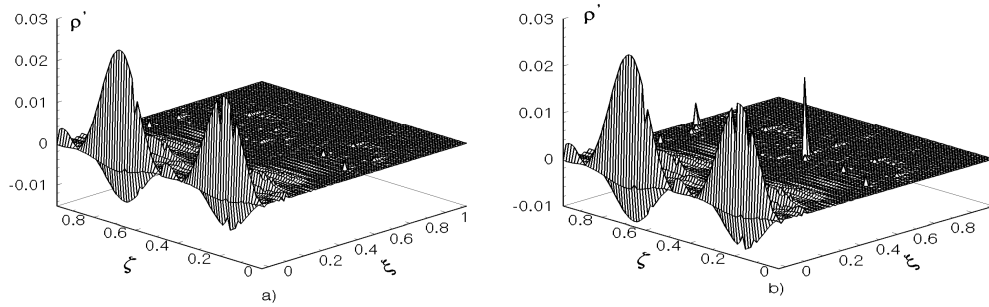


Рис.10 Распределение пульсаций плотности  $M = 0.4$ ,  $\gamma = 5^0$ ,  $\delta = 0.15$

Рис.11 Распределение пульсаций плотности  $M = 0.4$ ,  $\gamma = 5^\circ$ ,  $\delta = 0.2$ 

**Дальнее поле.** В качестве расчётной формулы для анализа дальнего звукового поля используют подход Кирхгофа, на основании которого получено следующее соотношение [8,9]:

$$\varphi(x, t_1) = \frac{-M_1^2}{4\pi} \left( \int_S \left[ \frac{F_1}{R} \right]_t^* dS_x + \int_S [F_2]_t^* dS \right),$$

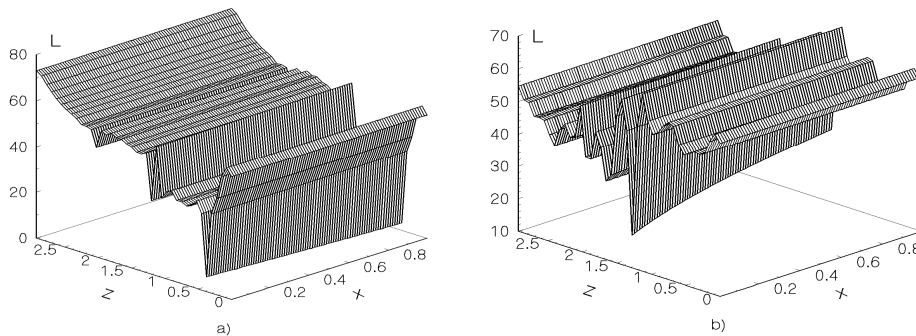
где

$$F_1 = \rho[(\nabla \varphi \cdot \nabla) \bar{v} + (\bar{v} \cdot \nabla) \cdot \nabla \varphi] + \rho'(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + \bar{v} \cdot \text{div}(\rho \nabla \varphi + \rho' \bar{v}) + \nabla \varphi \text{div}(\rho \bar{v}),$$

$$F_2 = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{1}{Ra_\infty} \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial(1/R)}{\partial n}.$$

#### Анализ результатов расчёта

Особый интерес представляет уровень давления  $L$  генерируемого шума (рис.12-18). Максимальное значение его составляет 82дБ на конце лопасти для  $M = 0.2; \alpha = 60^\circ; \gamma = 10^\circ; \delta = 0.2$ , (рис.14). Качественно похожая ситуация наблюдается для  $M = 0.2; \alpha = 60^\circ; \gamma = 10^\circ; \delta = 0.1$  (рис.12) и  $M = 0.2; \alpha = 90^\circ; \gamma = 5^\circ; \delta = 0.1$  (рис.15), но здесь уровень  $L$  ниже на 10дБ. В остальных расчётных случаях максимальный уровень  $L$  находится в районе 60дБ. Кроме того, на внешнем от оси вращения конце лопасти он значительно ниже (в районе 40дБ), чем на остальной части лопасти вдоль по её размаху. А это означает, что изогнутая по “sin-sin” форме лопасть позволяет снизить концевой BVI-шум, что и было целью модификации формы лопасти. Очень близкие результаты по уровню шума были получены в работе [1] для изогнутой “Blue Edge” лопасти. Значение уровня шума находилось в пределах  $50\text{дБ} < L < 63\text{дБ}$ , что фактически соответствует описанным выше результатам данной работы.

Рис.12 Уровень звукового давления  $M = 0.2$ ,  $\gamma = 10^\circ$ ,  $\delta = 0.1$

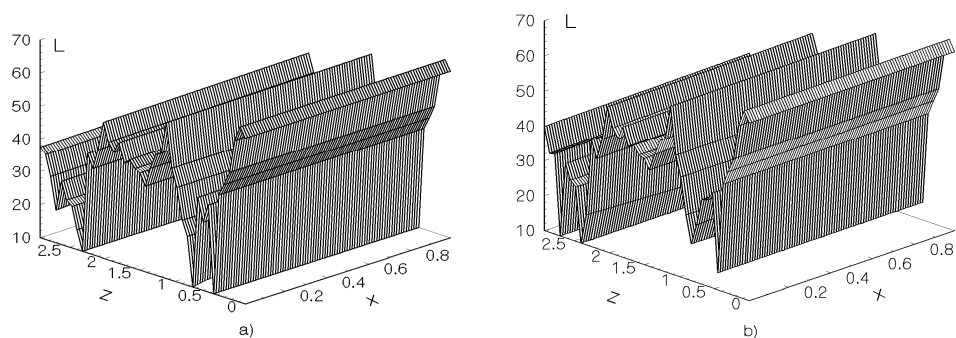


Рис.13 Урівень звукового тиску  $M = 0.2$ ,  $\gamma = 10^0$ ,  $\delta = 0.15$

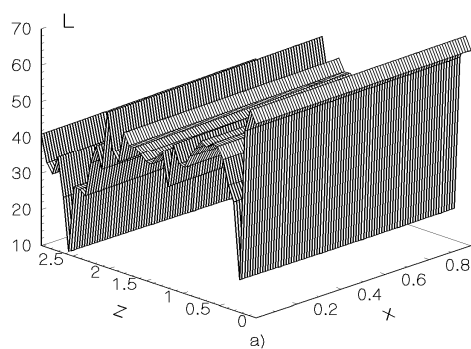


Рис.14 Урівень звукового тиску  $M = 0.2$ ,  $\gamma = 10^0$ ,  $\delta = 0.2$

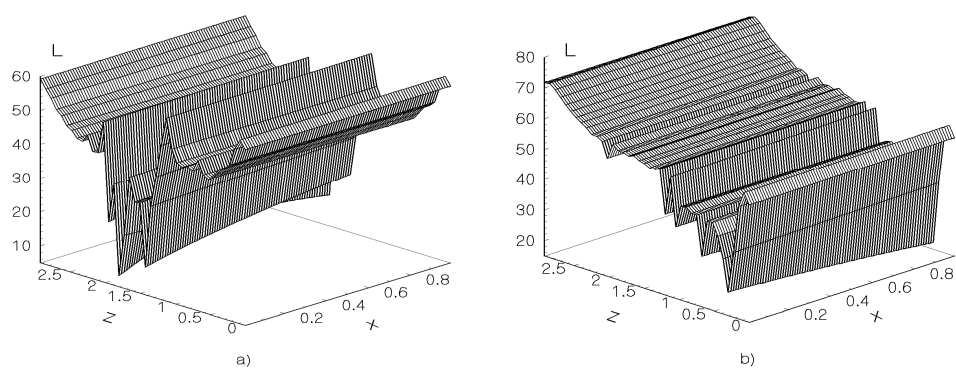
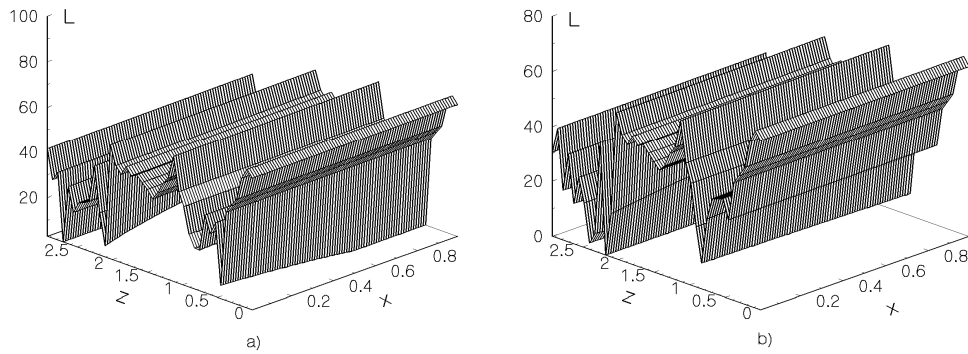
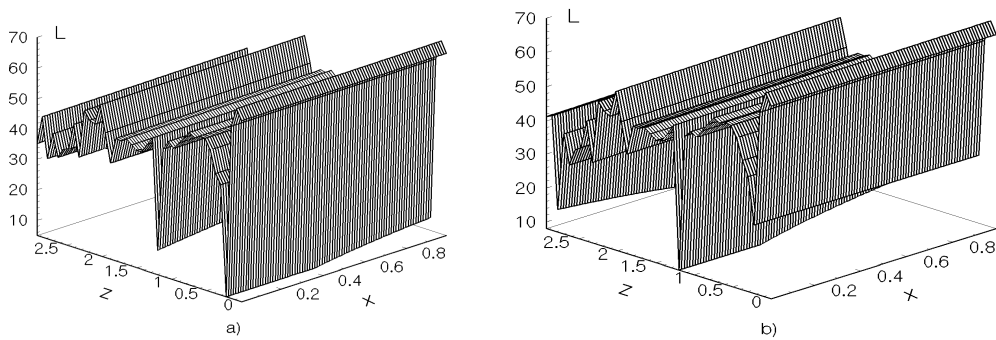
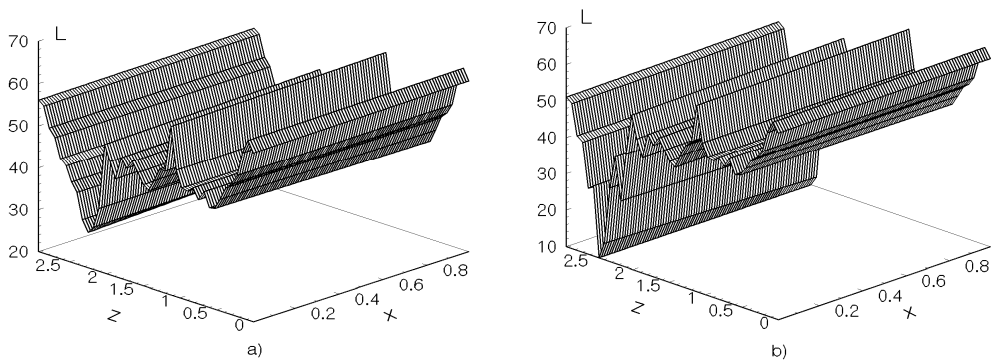


Рис.15 Урівень звукового тиску  $M = 0.2$ ,  $\gamma = 5^0$ ,  $\delta = 0.1$

Рис.16 Уровень звукового давления  $M = 0.2$ ,  $\gamma = 5^\circ$ ,  $\delta = 0.15$ Рис.17 Уровень звукового давления  $M = 0.2$ ,  $\gamma = 5^\circ$ ,  $\delta = 0.2$ Рис.18 Уровень звукового давления  $M = 0.4$ ,  $\gamma = 5^\circ$ ,  $\delta = 0.1$ 

Напомним [9], что прямоугольная лопасть, без изгиба, генерировала шум порядка 75-80дБ, максимальный уровень которого располагался на конце лопасти. То, что в отдельных случаях при расчёте изогнутой “sin-sin”-лопасти подобная ситуация остаётся, известный факт [7]: случаются отдельные расчётные ситуации, области на лопасти, где шум не удаётся снизить. Тем не менее, в целом шум изогнутой “sin-sin”-лопасти на 10-20дБ ниже в зависимости от расчётной ситуации. Подобная ситуация наблюдается и для закруглённой лопасти [7], но для неё уровень шума в основном

снижался в непосредственной области закругления лопасти. Для “sin-sin”-лопасти мы видим более равномерное распределение звуковой энергии вдоль всего размаха лопасти.

Если зафиксировать координату  $x = \text{const}$ , то на графиках видно формирование нелинейной волны, имеющей ряд локальных гребней. Подобные графики ранее уже были получены другими авторами [11,12]. Для прямоугольной лопасти, напомним, фронт волны состоял из 1-2 гребней с преобладанием по уровню на внешнем конце лопасти. Ещё один важный аспект – равномерность распределения генерируемого шума вдоль лопасти. Наиболее равномерное распределение  $L$  наблюдается для  $M = 0.2$ ,  $\delta = 0.15$ , как для  $\gamma = 10^\circ$  (рис.13), так и для  $\gamma = 5^\circ$  (рис.16). В то же время для  $\delta = 0.2$  (рис.14), в области комля лопасти, наблюдается резкое снижение уровня  $L$ , что также положительно для процесса снижения генерируемого шума в целом. Подобное снижение уровня шума наблюдается в случае  $M = 0.4$ ,  $\gamma = 5^\circ$ ,  $\delta = 0.1$ , но уже вблизи внешнего конца лопасти, что говорит о сложении и взаимном подавлении генерируемых волн. Таким образом, снижение общего уровня шума  $L$  удалось достигнуть за счёт перераспределения энергии с внешнего конца лопасти по всей её поверхности: один фронт волны распался на ряд фронтов меньшей амплитуды, что позволило снизить общий уровень генерируемого шума.

Сложная нелинейная картина  $L$  отразилась в частотном спектре генерируемого шума (рис.7-12). Изрезанность огибающей спектра шума соответствует чередующимся максимумам-минимумам нелинейной волны давления. Судя по уровню гармоник в спектре, наиболее энергоёмкими являются первые 5-6 гармоник. Но, кроме этого, заметна локальная активизация высоких частот: на всех графиках спектра в районе 830Гц наблюдается целая серия локальных всплесков достаточно высокого уровня (10дБ). Это подтверждает природу вихревого шума как такового, чья энергия распределена более равномерно в частотном спектре, захватывая область высоких частот. Напомним, что в случае, когда шум является главным образом шумом вращения (монополюсно-дипольный), его энергия сконцентрирована в первых 2-3 гармониках, чем он и разнится от вихревого шума.

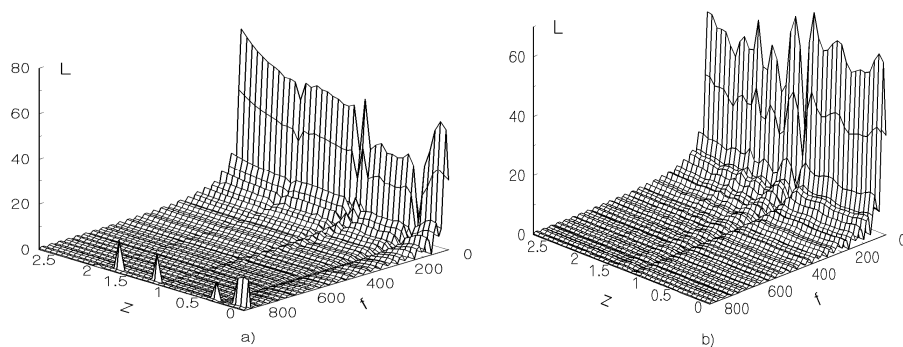


Рис.19 Частотный спектр генерируемого шума  $M = 0.2$ ,  $\gamma = 10^\circ$ ,  $\delta = 0.1$

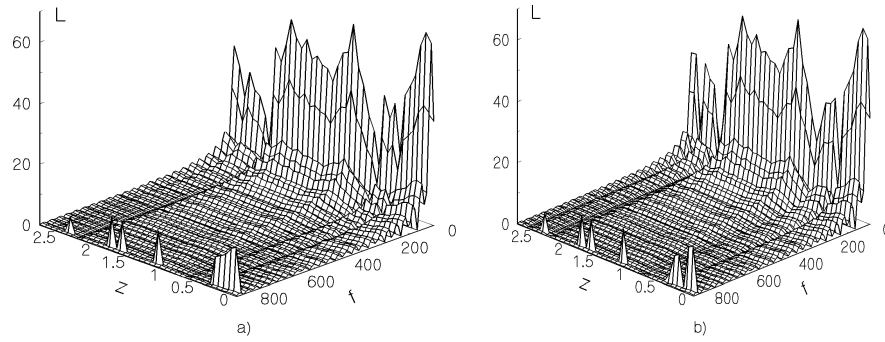


Рис.20 Частотный спектр генерируемого шума  $M = 0.2$ ,  $\gamma = 10^0$ ,  $\delta = 0.15$

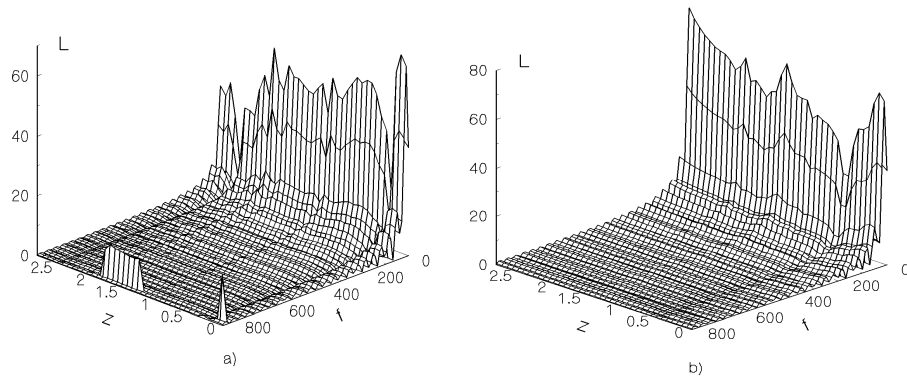


Рис.21 Частотный спектр генерируемого шума  $M = 0.2$ ,  $\gamma = 10^0$ ,  $\delta = 0.2$

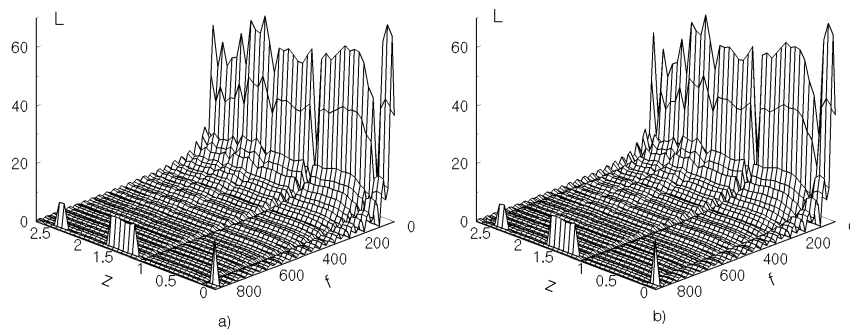
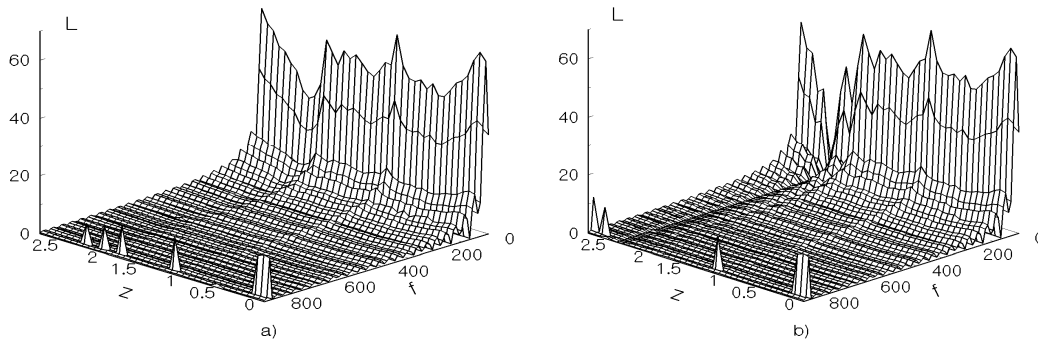


Рис.22 Частотный спектр генерируемого шума  $M = 0.2$ ,  $\gamma = 5^0$ ,  $\delta = 0.2$

Рис.23 Частотный спектр генерируемого шума  $M = 0.4$ ,  $\gamma = 5^\circ$ ,  $\delta = 0.1$ 

### Выводы

1. Решена задача снижения BVI-шума, генерируемого взаимодействием изогнутой “sin-sin”-лопастью с завихренным потоком. Получены численные характеристики звукового ближнего и дальнего полей.

2. Изучено поведение генерируемого шума для лопастей с различными степенью изгиба, углом постановки лопасти к потоку и числах Маха. Выявлено ряд интересных закономерностей. В частности, с помощью изгибов лопасти удалось снизить максимальный уровень шума, который наблюдался у неизогнутой лопасти на её конце, более равномерно распределить его по всей поверхности лопасти. При этом общий уровень шума снизился на 10-20дБ в зависимости от расчётной ситуации и области на поверхности лопасти. Звуковая энергия при этом концентрируется уже не в 2-3 первых гармониках, а в 5-6 гармониках. Наблюдается также и более активный захват энергии в высокочастотной области (830Гц).

3. Продольная модификация формы лопасти является эффективной для снижения BVI-шума.

### Список использованной литературы:

1. P.Rauch, M.Geravais, P.Crandall, A.Baud, J.-F.Hirsch, A.Walter, P.Beaumier. Blue Edge<sup>TM</sup>: The Design, Development and Testing of a New Blade Concept. / American Helicopter Society 67<sup>th</sup> Annual Forum, Virginia Beach, VA, May 3-5, 2011. 14p.
2. Bryans Edwards and Charles Cox. Revolutionary Concepts for Helicopter Noise Reduction-S.I.L.E.N.T. Program. / NASA/CR-2002-211650, 86p.
3. Christoph K.Maucher, Boris A.Grohmann, Peter Janker, Andree Altmikus, Fleurming Jeusen, Horst Baier. Actuator Design for the active trailing edge of a helicopter rotor blade. / <http://www.researchgate.net/publication/228659818>.
4. Peter C. Chen, James D. Baeder, Robert A.D.Evans and John Niemezuk. Blade-vortex interaction reduction with active twist smart rotor technology. / Smart Mater.Struct. 10, 2001, p.77-85.
5. Лукьянов П.В. Об одном численно-аналитическом подходе к решению задачи генерации звука тонким крылом. Часть I. Общая схема применения для плоской стационарной задачи. // Акустичний вісник, -2011-3(14)-С.46-52.
6. Лукьянов П.В. Об одном численно-аналитическом подходе к решению задачи генерации звука тонким крылом. Часть II. Схема применения для нестационарных задач. // Акустичний вісник, -2012-3(15)-С.45-52.
7. Лукьянов П.В. Влияние закругления конца лопасти на уровень шума взаимодействия вихрь-лопасть. // Акустичний вісник, -2015, 2(17)-С.23-37
8. Лукьянов П.В. Об одной модели аэроакустики сжимаемого газа. Часть II. Шум ближнего взаимодействия вихря-лопасти вертолѐта. // Акустичний вісник, -2013-2014, 3(16)-С.31-40.
9. Лук'янов Петро В. Генерація звуку взаємодії вихорів Тейлора і Скуллі з лопаттю змінної товщини. // Лук'янов Петро В. / Наукові вісті НТУ „КПІ”. Сер.: фіз.-мат. науки, 2014, №4. С.139-145.

10. Bryans Edwards and Charles Cox. Revolutionary Concepts for Helicopter Noise Reduction-S.I.L.E.N.T. Program./ NASA/CR-2002-211650,86p.
11. George A.R. and Lyrantzis A.S. Acoustics of Transonic Blade-Vortex Interactions. AIAA Journal.1988.v.26,N 7.p.769-776.
12. Lyrantzis and A.R.George. Far Field Noise of Transonic Blade-Vortex Interactions. American Helicopter Society Journal, July 1989,pp.30-39.

#### References:

1. P.Rauch & M.Geravaiss & P.Cranda & A.Baud, J.-F.Hirsch, A.Walter, P.Beaumier. (2011) Blue Edge<sup>TM</sup>: The Design, Development and Testing of a New Blade Concept. / American Helicopter Society 67<sup>th</sup> Annual Forum, Virginia Beach,VA,May 3-5,2011.14p.
2. Bryans Edwards and Charles Cox.(2002) Revolutionary Concepts for Helicopter Noise Reduction-S.I.L.E.N.T. Program./ NASA/CR-2002-211650,86p.
3. Christoph K.Maucher & Boris A.Grohmann & Peter Janker & Andree Altmikus & Fleurming Jeusen & Horst Baier. Actuator Design for the active trailing edge of a helicopter rotor blade./ <http://www.researchgate.net/publication/228659818>.
4. Peter C. Chen & James D. Baeder & Robert A.D.Evans and John Niemezzuk.(2001) Blade-vortex interaction reduction with active twist smart rotor technology./ Smart Mater.Struct.10,2001,p.77-85.
5. Lukianov, P.V. (2011) On one numerical-analytical approach to solving of a problem of sound generated by a thin wing. Part I. General scheme of application to planar stationary problem/Acoustic bulletin.V.14,N3,2011,pp.45-52. (in Rus)
6. Lukianov, P.V. (2012) On one model of aeroacoustics of viscous compressible gas. Part II. A scheme of application to non-stationary problem./Acoustic bulletin.V.15,N,2012,pp.45-52. (in Rus)
7. Lukianov P.V., (2015) Influence of rounding of blade tip on level BVI-noise,/Acoustic bulletin,V.17,N2,2015,pp.23-37. (in Rus)
8. Lukianov, P.V. (2013-2014) On one model of aeroacoustics of viscous compressible gas. Part II. Noise of the near helicopter blade-vortex interaction./Acoustic bulletin,v.16,n3,2013-2014,pp.31-40. (in Rus)
9. Lukianov, Petro V. (2014) Sound Generation by interaction of Taylor vortex, Scully one and the Blade of Varying Cross Section./ Research Bulletin of National Technical University "KPI",ser.:phys.-math.sciences,2014,N4,pp.139-145. (in Ukr)
10. Bryans Edwards & Charles Cox.(2002) Revolutionary Concepts for Helicopter Noise Reduction-S.I.L.E.N.T. Program./ NASA/CR-2002-211650,86p.
11. George A.R. & Lyrantzis A.S. (1988)Acoustics of Transonic Blade-Vortex Interactions. AIAA Journal.1988.v.26,N 7.p.769-776.
12. Lyrantzis & A.R.George.(1989) Far Field Noise of Transonic Blade-Vortex Interactions. American Helicopter Society Journal, July 1989,pp.30-39.

**LUKIANOV Petro,**

Institute of Hydromechanics NAS of Ukraine, PhD, Senior Researcher

#### **HELICOPTER ROTOR BVI -NOISE REDUCTION BY TWICE-BENT BLADE**

**Abstract. Introduction.** For the last time new "Blue" technologies are introduced in aircraft industry. One possibility in the direction is search of anew shape of the blade with low BVI-noise generation. These are so-called "Blue-Edges" technologies which are applied by "Eurocopter". In particular, "Eurocopter" financing "Blue Edge" program to find the optimal shape of the rotor blade which possesses both reliable aerodynamic characteristics and low noise production. In addition to this search "BluePulse" program finances study of active rotor, which uses piezoactive flexible components (plates) in the blade construction? Using of the piezoactive flexible components allows reduce the external noise and vibrations; this improves comfort of fly vehicle passengers. Presented in the paper is further development of the "BlueEdge" technologies.

**Problem setting ,method of problem solving, and results.** Let we have the blade which shape has two bends along the blade sweep. During blade turning its front edge is interacting with incoming flow of  $U_\infty$  velocity and distributed Taylor's vortexes. The external blade tip generates Scully vortex, its vorticity extends, descending, to butt blade tip (close to axis of rotation). In such way, vortex flow - blade interaction generates BVI-noise aerodynamically.

The overall mathematical problem consists of aerodynamical and aeroacoustical parts. Aerodynamical part of the problem includes system of Euler's equation and continuity equation. Aeroacoustical part is a system of the aeroacoustical equations in terms of sound potential and density perturbation in the sound wave offered by author before.

*The problem has been solved numerically with the use of numerically-analytical approach. On the base of the method using a system of the 15 equations are solved. Flow parameters, that are varied, are Mach number, angle of attack, angle of blade setting in plane of rotation, and value of blade bending. Several interesting facts have been discovered. In particular, using blade bend allowed decrease noise level that was observed before at the tip of blade without bend.*

*Analysis of calculated data also discovered effective using of the "sin-sin" twice-bent for the noise decreasing. In particular, it have been succeeded in 10-20 dB noise decreasing dependently both on calculation's situation and point position on the blade; sound energy concentrates not in 2-3 first harmonics, but in 5-6 one. More active capture of energy of high frequencies is seen.*

**Keywords:** "Blue-edge" blade, BVI-noise.

*Одержано редакцією 18.05.2017 р.  
Прийнято до публікації 12.06.2017 р.*

УДК 519.6:004.8

PACS 02.60.-x, 02.60.Pn, 02.70.Wz

**ГОЛОВНЯ Борис Петрович**

Черкаський національний університет

імені Богдана Хмельницького,

д. т. н., доцент, зав. кафедрою прикладної  
математики та інформатики

e-mail: bpgolovnya@gmail.com

## **РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПРИСТЕННОЙ ОБЛАСТИ ТУРБУЛИЗИРОВАННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ**

**Аннотация.** В работе, на основе модели турбулентности, разработанной автором, строится решение уравнения переноса энергии турбулентности в непосредственной близости от стенки. Показано, что решение хорошо соответствует известным теоретическим и экспериментальным данным.

**Ключевые слова:** моделирование турбулентности, энергия турбулентности.

### **Вступление**

Из экспериментов известно, что в пристенной области энергия турбулентности подчиняется соотношению  $k_+ = 1 \div 10 \times 10^{-3} y_+^2$ . Известные модели турбулентности в расчетах уверенно воспроизводят это соотношение, но не позволяют получить его теоретически. В работе [1] автором была предложена модель турбулентности, позволяющая получить это соотношение. В данной работе предложен вывод этой формулы.

### **1. Вывод уравнений, описывающих перенос турбулентности в непосредственной близости от стенки**

Предложенная модель турбулентности [1] позволяет теоретически рассчитать распределение энергии турбулентности в турбулизированном пограничном слое при произвольно малых числах Рейнольдса. Итак, пусть мы имеем плоскую пластину, обтекаемую турбулизированным потоком. На пластине образуется пограничный слой, ламинарный в начальной стадии и переходящий с развитием течения в турбулентный. Перенос турбулентности во внешнем потоке в этом случае можно описать системой уравнений (1)-(2) с начальными условиями (3).

$$U_e \frac{dk_e}{dx} = -\varepsilon_e, \quad (1)$$

$$U_e \frac{d\varepsilon_e}{dx} = -C_2 \frac{\varepsilon_e^2}{k_e}, \quad (2)$$

$$k_e(x_0) = k_0, \quad \varepsilon_e(x_0) = \varepsilon_0. \quad (3)$$

Система (1)-(2) имеет точное решение (4)

$$k_e = k_0 \left( \frac{\tilde{x}}{x_a} \right)^{\frac{1}{1-C_2}}, \quad \varepsilon_e = \varepsilon_0 \left( \frac{\tilde{x}}{x_a} \right)^{\frac{C_2}{1-C_2}}, \quad (4)$$

$$x_a = \frac{k_0 U_e}{\varepsilon_0 (C_2 - 1)}, \quad \tilde{x} = x_a - x_0 + x.$$

Приближенное решение системы (1)-(2) очень часто записывают в виде аппроксимационного соотношения вида (см. например Дыбан, Эпик [2])  $u' = C(x + x_0)^{-10/7}$ . Здесь  $C$  и  $x_0$  – константы, зависящие от турбулентности внешнего потока,  $x$  – расстояние от начала пластины. Так, например, в случае  $Tu_e = u'/U_e = 0.03$  хорошее согласование с экспериментальными данными дает соотношение  $u' = 10^{-4}(x + 0.4)^{-10/7}$ . Здесь  $x$  – расстояние в метрах от начала пластины,  $u'$  выражается в м/сек. Из этого выражения и уравнения (2) можно оценить диссипативный масштаб в свободном потоке. Вычисленный в  $\eta \left( \eta = \frac{U_e y}{\nu \sqrt{2Re}} \right)$  при числах  $Re < 100$  и  $Tu_e = 0.03 \div 0.05$  он оказывается равным  $L_\varepsilon = 1.5 \times 10^3 \div 2.5 \times 10^9$ . В то же время толщина пограничного слоя в этом случае хорошо известна из автомодельного решения и выраженная в  $\eta$  равна  $\delta = 3.52$ .

В этом случае внутри пограничного слоя значения функции  $f_0$  оцененные по выражению  $f_0 = 1 - \exp\left(-2.4 \frac{y}{L_\varepsilon}\right)$  оказываются величинами порядка  $10^{-4} \div 10^{-9}$ .

Отметим теперь некоторые очевидные особенности переноса турбулентности. Во первых, все изменения, обусловленные конвекцией, сосредоточены внутри пограничного слоя. Во вторых, вне слоя генерация турбулентности равна нулю в силу того, что  $\partial U / \partial y = 0$ . Поэтому вполне естественным представляется предположение о том, что значения  $k$  вне слоя практически постоянны, т.е. диффузионный перенос вне слоя исчезающе мал. В то же время, в связи с малостью  $f_0$  внутри пограничного слоя, диффузией и генерацией можно пренебречь и внутри слоя.

В итоге уравнения  $k$ - $\varepsilon$  модели приобретают вид

$$U \frac{\partial k_0}{\partial x} + V \frac{\partial k_0}{\partial y} = -\varepsilon_0, \quad (5)$$

$$U \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial y} = -C_2 \frac{\varepsilon_0^2}{k_0}. \quad (6)$$

Краевые условия имеют вид

$$y = 0, \quad k_0 = \varepsilon_0 = 0; \quad y \rightarrow \infty, \quad k_0 = k_e, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_e. \quad (7)$$

Значения  $k_e$  и  $\varepsilon_e$  рассчитывают по выражениям (4).

## 2. Теоретический анализ турбулентного течения в пограничном слое при малых числах Re

Система (5)-(6) заменой  $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_e}{k_e^{C_2}} k_0^{-C_2}$  приводится к одному уравнению:

$$U \frac{\partial k_0}{\partial x} + V \frac{\partial k_0}{\partial y} = -\frac{\varepsilon_e}{k_e^{C_2}} k_0^{C_2}. \quad (8)$$

Уравнение (8) объединим с уравнениями неразрывности и переноса импульса в ламинарном пограничном слое.

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Замена (4) не меняет внешнего вида системы (9) и она допускает решение в хорошо известных переменных  $\xi = \frac{U_e \tilde{x}}{\nu}$ ,  $\eta = \frac{U_e y}{\nu \sqrt{2\xi}}$ ,  $U = F U_e$ . Используя эти же переменные в уравнении (8) и проводя замену  $\tilde{k} = k_0/k_e$ , где  $k_e$  определяется соотношением (4), после несложных преобразований получаем (см. [130]):

$$2\xi F \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \xi} + V \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \eta} + \frac{2}{1-C_2} F \tilde{k} = \frac{2}{1-C_2} \tilde{k}^{C_2}. \quad (10)$$

Краевые условия для  $\tilde{k}$  выглядят следующим образом:

$$\tilde{k}(0) = 0, \lim_{\eta \rightarrow \infty} \tilde{k}(\eta) = 1.$$

Так как краевые условия не зависят от  $\xi$ , то согласно теореме Моргана производная по  $\xi$  в (10) может быть отброшена. Таким образом, уравнение переноса  $k$  в пограничном слое можно упростить, заменив его уравнением

$$V \frac{d\tilde{k}}{d\eta} + \frac{2}{1-C_2} F \tilde{k} = \frac{2}{1-C_2} \tilde{k}^{C_2}. \quad (11)$$

Скорости  $V$  и  $F$  определяются из автомодельной формы записи системы (9):

$$V \frac{dF}{d\eta} = \frac{d^2 F}{d\eta^2}, \quad (12)$$

$$\frac{dV}{d\eta} + F = 0. \quad (13)$$

Подставляя уравнение неразрывности (13) в (11), уравнение (11) можно привести к виду

$$V \frac{d\tilde{k}}{d\eta} - \frac{2}{C_2 - 1} \frac{dV}{d\eta} \tilde{k} = -\frac{2}{C_2 - 1} \tilde{k}^{C_2}. \quad (14)$$

Уравнение (14) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{(-V)^{A-1}} \frac{d}{d\eta} (-V)^A \tilde{k} = A \tilde{k}^{C_2}. \quad (15)$$

Здесь  $A \equiv 1/(C_2 - 1)$ . Из уравнения неразрывности (13) следует, что  $V < 0$ , поэтому запись (15) корректна. Из (15) элементарными преобразованиями имеем:

$$\frac{d}{d\eta} (-V)^A \tilde{k} = (-V)^{-3} A [(-V)^A \tilde{k}]^{C_2}. \quad (16)$$

Общее решение (16) имеет вид

$$\tilde{k} = \left\{ V^2 \left[ C(1 - C_2) + 2 \int_0^\eta \frac{1}{V^3} d\eta \right] \right\}^{\frac{1}{1-C_2}}. \quad (17)$$

Здесь  $C$  – произвольная постоянная.

Решение должно удовлетворять условиям  $\tilde{k}(0) = 0$ ,  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \tilde{k} = 1$ . Рассмотрим выражение  $2V^2 \int_0^\eta V^{-3} d\eta$ . По правилу Лопиталя, с учетом уравнения неразрывности (13), имеем:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} 2 \frac{\int_0^\eta V^{-3} d\eta}{V^{-2}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{dV}{d\eta}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{F} = \infty.$$

Так как показатель степени в (17) отрицателен, то отсюда следует, что  $\tilde{k}(0) = 0$  независимо от значений  $C$ . Аналогичным образом получаем, что

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} 2 \frac{\int_0^\eta V^{-3} d\eta}{V^{-2}} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{F} = 1.$$

Отсюда следует, что для выполнения условия  $\tilde{k}(\infty) = 1$  необходимо, чтобы  $C = 0$ . В итоге, точное решение уравнения (16) имеет вид

$$\tilde{k} = \left[ 2V^2 \int_0^\eta \frac{1}{V^3} d\eta \right]^{\frac{1}{1-C_2}}. \quad (18)$$

Оценим поведение этого решения в пристенной области. Из решения Польгаузена следует, что вблизи стенки  $F \approx 1.5 \frac{\eta}{\delta_\eta} = 1.5 \frac{\eta}{3.52} \approx 0.4\eta$ . Тогда из уравнения неразрывности (13) следует, что  $V \approx -0.2\eta$ . Подставляя это соотношение в (18) имеем

$$\tilde{k} = \left[ 0.08\eta^4 \int_0^\eta \frac{d\eta}{-0.008\eta^6} \right]^{\frac{1}{C_2-1}} = 0.5^{\frac{1}{C_2-1}} \eta^{\frac{1}{C_2-1}}. \quad (19)$$

При  $C_2=1.5$  имеем  $\tilde{k} \approx 1.56F^2$ . В случае  $Tu_e=0.03 \div 0.05$ , учитывая, что у стенки  $U_+=y_+$ , получаем  $k_{0+}=1.4 \times 10^{-3} \div 9.9 \times 10^{-3} y_+^2$ , что находится в хорошем соответствии с экспериментальными данными по поведению  $k$  в пристеночной области развитого турбулентного пограничного слоя.

Следует отметить, что, вообще говоря, соотношение (19) дает несколько большую, чем квадратичная, скорость затухания  $k$  у стенки, т.к. из приведенных выше рассуждений следует, что  $C_{\varepsilon 2}$  всегда меньше, чем 1.5.

К сожалению, в связи с несобственностью интеграла в (18), вызванной тем, что  $V(0)=0$ , выражение (18) непригодно для точных расчетов  $\tilde{k}$  по найденным значениям  $V$ . По этой причине уравнение (19) решалось численно.

### 3. Сопоставление решений упрощенного уравнения с экспериментальными данными. Обсуждение результатов

Уравнение (10) решалось на неравномерной сетке в области  $0 < \eta < 1500$  методом стационарирования. Скорости  $V$  и  $F$  брались из предварительно проведенного решения системы (12)-(13). Зависимости результатов от шагов сетки не обнаружено.

Расчетные значения  $k_0/k_e$  и  $\varepsilon_0/\varepsilon_e$  приведены на рис. 1. Как и ожидалось, все изменения параметров сосредоточены в ламинарном пограничном слое, т.е. в области  $\eta < 3.52$ .

К сожалению, экспериментальные данные о распределении  $k$  при  $Re < 1000$  автору неизвестны. Поэтому на рис. 2 приведены результаты сопоставления расчетов  $k_0$  по уравнению (19) с результатами моделирования ламинарно-турбулентного перехода, проведенного LES-методом (Янг и Вок [3]). Данные Янга и Вока получены при  $Re=1.6 \times 10^4$ . Результаты приведены в виде зависимости  $k_0/k_{\text{перегиба}}$  от  $y/y_{\text{перегиба}}$ . Здесь  $k_{\text{перегиба}}$  – значение  $k_0$  в точке перегиба на профиле  $k_0$ ,  $y_{\text{перегиба}}$  – координата этой точки. Совпадение практически точное.

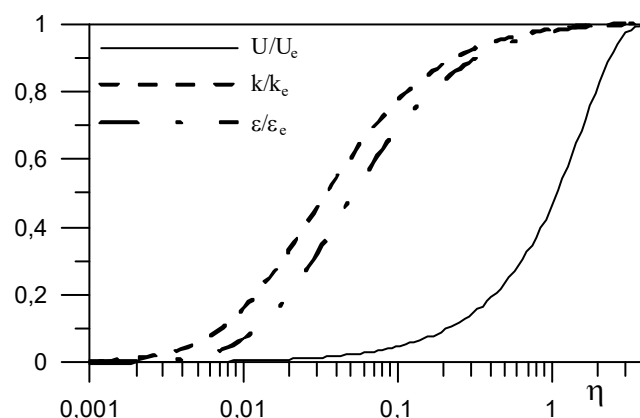


Рис. 1. Расчет распределения энергии и диссипации при малых  $Re$

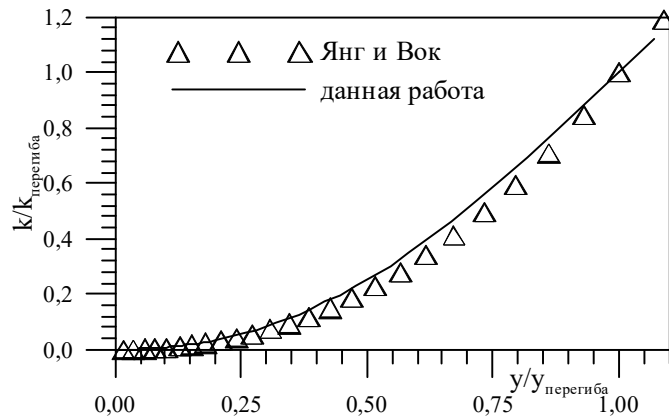


Рис. 2. Сопоставление расчетов  $k$  с результатами LES-моделирования Янга и Вока [3] при  $Re=1.6 \cdot 10^4$ .

Более того, на рис. 3 приведено сопоставление расчетов  $k_0$  с расчетами течения в развитом пограничном слое, проведенными по моделям Нагано-Тагавы [4], Чена [5] и Лаундера-Шармы [6]. Результаты также представлены в виде зависимости  $k/k_{перигиба}$  от  $y/y_{перигиба}$ . Соответствие по крайней мере с двумя расчетами из трех очень хорошее.

Чтобы пояснить смысл этого соответствия, запишем уравнение переноса  $k_0$  в виде

$$f_0 \frac{\partial}{\partial y} D_{diff} \frac{\partial k_0}{\partial y} = conv(k_0) - (f_0 P - \varepsilon_0) \quad (11)$$

Здесь  $conv(k_0)$  – оператор конвективного переноса.

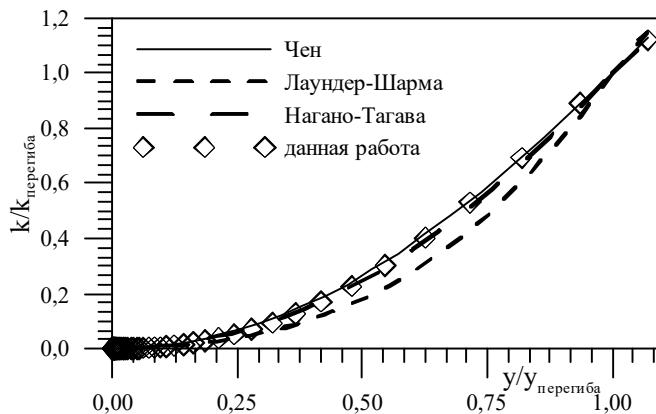


Рис. 3. Сопоставление результатов расчетов  $k$  с расчетами энергии турбулентности по трем моделям.

Как известно, точка перегиба – это точка изменения знака второй производной. В непосредственной близости от стенки профиль  $k_0$  имеет выпуклость вниз, т.е. вторая производная положительна. Тогда из (11) следует, что в этой области  $conv(k_0) > f_0 P - \varepsilon_0$ , т.е. распределение  $k_0$  в основном определяется конвекцией. На некотором расстоянии от стенки профиль  $k_0$  становится выпуклым вверх, т.е. вторая производная становится отрицательной, т.е.  $conv(k_0) < f_0 P - \varepsilon_0$ . Таким образом можно сказать, что в области  $y < y_{перигиба}$  распределение  $k_0$  в основном определяется конвективным переносом, а в области  $y > y_{перигиба}$  – генерацией и диссипацией. Распределение  $k_0$  в области преимущественного влияния конвекции хорошо описывается уравнением (14). Более

того, это распределение, вычисленное в переменных  $k/k_{\text{перегиба}}$  от  $y/y_{\text{перегиба}}$  сохраняется практически неизменным начиная от самого начала пластины.

### Выводы

В работе получено теоретическое решение для распределения энергии турбулентности в непосредственной близости от стенки. Решение очень хорошо согласуется с известными экспериментальными и расчетными данными и является дополнительным подтверждением верности модели турбулентности [1].

### Список использованной литературы:

1. Golovnya B.P. Modelling of the fluctuating component in the form of the sum of an infinite number of random quantities// Int.J. of Heat and Mass Transf. - V 52 - 2009 - pp.5218-5228
2. Дыбан Е.П., Эпик Э.Я. Тепломассобмен и гидродинамика турбулизированных потоков. - Киев. - Наукова думка. - 1985 - 295 с.
3. Yang, Z., Voke, P.R. Large-Eddy Simulation Studies of Bypass Transition.// В кн. Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2, ed. W. Rodi and F. Martelli. : Amsterdam. 1993.
4. Nagano Y. Tagawa M. An improved (k-ε) Model for Boundary Layer Flows. // J. of Fluid Eng. - 1990. - V. 112. - P.33-39.
5. Chien K.-Y. Prediction of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds- Number Turbulence Model // AIAA Journal – 1982 - V.20 - P.34-38.
6. Launder B.E., Sharma B.I. Application of the Energy-Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc. // Letters in Heat and Mass Transfer – 1974 - V. 1 - P. 131-138.

### References:

1. Golovnya B.P. Modelling of the fluctuating component in the form of the sum of an infinite number of random quantities// Int.J. of Heat and Mass Transf. - V 52 - 2009 - pp.5218-5228
2. Dyban E.P., Epik E.Ya. Heat-and-mass transfer an hydrodynamics of turbulized flows. - Kyev. – Naykova dumka. – 1985 - 295 c. (in Rus)
3. Yang, Z. & Voke, P.R. Large-Eddy Simulation Studies of Bypass Transition.// В кн. Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2, ed. W. Rodi and F. Martelli. : Amsterdam. 1993.
4. Nagano Y. Tagawa M. An improved (k-ε) Model for Boundary Layer Flows. // J. of Fluid Eng. - 1990. - V. 112. - P.33-39.
5. Chien K.-Y. Prediction of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds- Number Turbulence Model // AIAA Journal – 1982 - V.20 - P.34-38.
6. Launder B.E., Sharma B.I. Application of the Energy-Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc. // Letters in Heat and Mass Transfer – 1974 - V. 1 - P. 131-138

### GOLOVNYA Boris,

The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Doctor of Science, Chair of Department of Applied Mathematics and Informatics

### CALCULATION OF THE DISTRIBUTION OF THE TURBULENCE ENERGY IN THE WALLED TURBULIZED BOUNDARY LAYER INTRODUCTION

**Abstract. Introduction.** In the works [1]-[2], the author proposed a new technique for designing turbulence models that differed significantly from the classical approach to developing such models. The equations of the model obtained are simple and contain much less adjusting functions than existing models for simulation of turbulent flows in the presence of hard surfaces.

An important stage in approbation of new models of turbulence is their verification on problems with a known result. As a rule, the list of such problems includes the results of experiments approved in the conferences on modeling turbulence.

One of the well-known and experimentally verified facts is a following statement. In close proximity to the wall, the turbulence energy is proportional to the square of the distance from the wall, and the turbulent friction – to the cube of the distance. All models of turbulence are required to ensure the fulfillment of these ratios. In all models known to the author this was tested by solving on the complete equations of the model in the immediate vicinity of the wall.

At the same time, the author does not know any simplified version of any model of turbulence for the calculation of currents in the immediate vicinity of the wall. In this paper, a simplified version is proposed.

**Purpose.** *Approbation of the developed model. Demonstration of the possibilities of the approach to the construction of models of turbulence.*

**Results.** *By using the estimations of the model terms in the near-wall region and rejection of small ones, a simplified version of the turbulence model developed by the author was proposed. The simplified version makes it possible to simulate turbulence in the immediate the near-wall region, without taking into account the effect of the external flow. Furthermore. In the immediate vicinity of the wall, a simplified version allows an analytical solution that well corresponds to the experimental and simulation data of different authors. The numerical solution of the equations of the simplified model in a more extended region also corresponds well to a variety of data. Analysis of the results of calculations makes it possible to propose a new explanation of the behavior of turbulence in the near-wall region.*

Одержано редакцією 07.09.2017 р.  
Прийнято до публікації 25.09.2017 р.

УДК 519.6:004.8, 536.24

PACS 02.60.-x, 02.60.Pn, 02.70.Wz,  
51.20.+d, 82.40.Ck

**ГОЛОВНЯ Борис Петрович**

Черкаський національний університет  
імені Богдана Хмельницького, д.т. н.,  
доцент, завідувач кафедри прикладної  
математики та інформатики  
e-mail: bpgolovnya@gmail.com

**ХАЙДУРОВ Владислав Володимирович**

Київський міжнародний університет,  
викладач кафедри комп'ютерних наук  
e-mail: allif0111@gmail.com

## ДЕЯКІ ШВИДКІСНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

**Анотація.** У статті проведений чисельний аналіз серії методів безумовної оптимізації на нелінійних задачах, які дають можливість зменшити час пошуку чисельного розв'язку великого класу нелінійних ОЗТ. Також у роботі запропоновані суттєві модифікації класичного методу Ньютона, які дають можливість отримати шуканий чисельний розв'язок нелінійних задач значно швидше у порівнянні з класичним методом Ньютона. Модифікації методу Ньютона зі змінним кроком дають значно швидшу збіжність та дають можливість отримати досить швидко розв'язки нелінійних ОЗТ.

**Ключові слова:** обернена задача теплопровідності (ОЗТ), пряма задача теплопровідності (ПЗТ), методи безумовної оптимізації, квадратичний функціонал.

### Вступ

Експериментальні методи дослідження теплофізичних процесів та їх систем є найбільш достовірним джерелом інформації про тепловий стан об'єкту [7]. Особливого значення теорія і практика розв'язання обернених задач набувають у наш час, коли в силу обставин що склалися, об'єкти енергетики, промисловості, транспорту, господарства, комунікацій, будівель та споруд відпрацювали свій плановий ресурс і потребують уникнення техногенних катастроф, а саме потребують термінового оновлення, модернізації і реконструкції. Першим кроком в реалізації програми реконструкції перерахованих вище об'єктів є діагностика їх технічного стану і визначення залишкового ресурсу, тобто часу, протягом якого даний об'єкт може надійно і ефективно працювати, не ставлячи під загрозу життя людей і навколишнє

середовище. При проведенні діагностики безпосереднє визначення параметрів, що обмежують надійну роботу об'єкта ускладнене, а часто просто неможливе. Тому, як правило, про ці параметри судять за результатами непрямих вимірювань, що є прерогативою обернених задач. Таким чином, в основі діагностики технічного стану лежать теорія і практика розв'язання обернених задач, а це вимагає подальших досліджень з розробки методів вирішення цих завдань, ефективних алгоритмів і програмних продуктів.

До основних проблем під час вирішення прикладних обернених задач теплопровідності (ОЗТ) відносять коректність постановки задачі, час розв'язку систем алгебраїчних рівнянь для дискретного аналогу рівняння теплопровідності, об'єм обчислень під час оптимізації квадратичного функціоналу у обернених задачах (кількість обчислень на 1 ітерацію), стійкість та збіжність методів безумовної оптимізації.

Відомо, що чисельний розв'язок лінійних задач прямих та обернених теплопровідності отримується значно швидше, ніж нелінійних задач, оскільки дискретний аналог лінійних задач вимагає розв'язання лінійної системи рівнянь, а для нелінійних – нелінійної [1;5;7]. Під час знаходження чисельного розв'язку нелінійних задач виникає ряд проблем пошуку розв'язку поставлених задач.

Більшість сучасних методів та алгоритмів розв'язку прикладних задач, які зводяться до розв'язання обернених задач теплопровідності, використовують багаторазовий виклик процедури розв'язку прямої задачі теплопровідності (ПЗТ). Тому, очевидно, що одним із найефективніших шляхів суттєвого зменшення часу пошуку чисельного розв'язку ОЗТ є зменшення часу розв'язку ПЗТ для відповідної ОЗТ [4;5]. У класичній постановці некоректних задач, у тому числі ОЗТ, присутній квадратичний функціонал, який потрібно мінімізувати. Тому не менш ефективним шляхом прискорення отримання розв'язку ОЗТ, зокрема нелінійних, є модифікація існуючих методів безумовної оптимізації відповідного квадратичного функціоналу.

Для лінійних та нелінійних ОЗТ кількість викликів процедури розв'язку ПЗТ на одну ітерацію під час застосування градієнтних методів пропорційна кількості шуканих параметрів розв'язуваної ОЗТ. З ростом розмірності задачі росте кількість викликів процедури ПЗТ. Якщо, наприклад, двовимірна ОЗТ на відновлення початкового розподілу температури розглядуваної області [4] розв'язується на сітці  $34 \times 34$  (з граничними вузлами), то кількість викликів процедури розв'язку ПЗТ  $32^2$ . Якщо ж цю саму двовимірну задачу розв'язується на сітці  $66 \times 66$  (з граничними вузлами), то кількість викликів процедури розв'язку ПЗТ  $64^2$  і т. д.

### **Мета роботи**

Розробка чисельних методів, які зменшують кількість обчислень для отримання розв'язку нелінійних обернених задач теплопровідності та апробація цих методів на конкретних задачах.

### **Математична постановка задачі**

У області  $D \times [0, \tau]$  розглядається рівняння теплопровідності [5]:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \nabla T) \quad (1)$$

Повний розв'язок задачі теплопровідності у заданій області містить такі відомості:

–значення температури у всіх внутрішніх точках розрахункової області задачі, тобто  $\forall x \in D, \forall t \in [0, \tau]$  відомий розподіл  $T(x, t)$ . Це означає, що відомі розподіли у початковий момент часу

$$T_{init}(x) = T(x, 0) \quad (2)$$

та кінцевий момент часу

$$T_{fin}(x) = T(x, \tau); \quad (3)$$

–граничні умови:

$$\partial D = \partial D_D + \partial D_N, \quad x \in \partial D_D : T = T(x, \tau); \quad x \in \partial D_N : \partial T / \partial n = p(x, \tau), \quad (4)$$

де  $\partial D$  – границя розрахункової області,  $\partial D_D$  – це частина границі (можливо, порожня), на якій задана умова Діріхле та  $\partial D_N$  – частина границі, на якій задана умова Неймана, а  $n$  – це нормаль до границі розрахункової області задачі;

–залежність параметрів задачі від координат та температури:

$$\rho = \rho(x, T), \quad C = C(x, T), \quad k = k(x, T), \quad (5)$$

де

$\rho$  – густина тіла,

$C$  – питома теплоємність тіла,

$k$  – коефіцієнт температуропровідності.

Враховуючи вищевказані відомості про повний розв’язок задачі теплопровідності, можна сформулювати пряму задачу для рівняння теплопровідності в області  $D \times [0, \tau]$ .

Дано рівняння (1), початковий розподіл температури (2), граничні умови (4), залежності параметрів від координат і температури (5). Потрібно знайти кінцевий розподіл температури (3) і, як проміжний результат, значення температури у всіх внутрішніх точках розрахункової області у рівнянні (1) для  $\forall t \in [0, \tau]$ .

Першою ОЗТ у роботі розглядається наступна ОЗТ. Дано рівняння (1), кінцевий розподіл температури (3), граничні умови (4), залежності параметрів від координат та температури (5). Треба знайти початковий розподіл температури (2) і, як проміжний результат, значення температури у всіх внутрішніх точках області для  $\forall t \in [0, \tau]$ . ОЗТ вважається розв’язаною, якщо знайдено такий початковий розподіл температури  $\overline{T_{init}}(x) = \overline{T}(x, 0)$ , що розв’язок прямої задачі з використанням у якості початкової умови цього розподілу  $T(\overline{T_{init}})$  співпадає з потрібним кінцевим розподілом  $T_{fin}$ .

Інакше, потрібно знайти початковий розподіл температури  $\overline{T_{init}}$  такий, що

$$J(\overline{T_{init}}) = \|T(\overline{T_{init}}) - T_{fin}\| \rightarrow \min. \quad (6)$$

У якості норми у (6) використовується норма  $L_2$ , тобто  $\|x\| = \sqrt{\int_D x^2 dD}$  або, у дискретному випадку,  $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$ . Ясно, що для заданого початкового розподілу  $T_{init}$  значення  $T(T_{init})$  отримується в результаті розв'язку диференціального рівняння (1). Для скорочення записів введемо для рівняння (1) позначення (7). Тут підкреслюється, що розв'язок отримано з використанням шуканого параметру  $L(T, \theta) = 0$ , у даному випадку, з початковою умовою  $\theta = T(x, 0) = T_{init}(x)$ :

$$L(T, \theta) = 0. \quad (7)$$

Можна сказати, що диференціальне рівняння (7) виступає для задачі (6) в ролі обмеження. Тобто, спираючись на сучасну класифікацію, маємо справу із задачею пошуку глобального мінімуму функціоналу (6) з обмеженням у вигляді диференціального рівняння (7). Задачі пошуку екстремуму з обмеженнями записуються з використанням множників Лагранжа, тобто задача ставиться у вигляді задачі на безумовний екстремум:

$$\int_D (T(\theta) - T_{fin})^2 dD + \lambda L(T, \theta) \rightarrow \min.$$

Тому потрібно знайти початковий розподіл температури  $\theta = \overline{T_{init}}$  таке, що розподіл  $T(\theta)$  дає мінімум функціоналу

$$J(\theta) = \int_D (T(\theta) - T_{fin})^2 dD \rightarrow \min, \quad (8)$$

причому для довільних початкових умов  $\theta = \overline{T_{init}}$  значення  $T(\theta)$  знаходиться в результаті розв'язку диференціального рівняння (7).

Другою задачею у даній роботі є задача на пошук граничної умови [3]. Дано рівняння (1), початковий розподіл температури (2), кінцевий розподіл температури (3), граничні умови на частині границі у вигляді (4), залежності параметрів від координат та температури (5). Треба знайти граничні умови (4) на тій частині границі розрахункової області, на якій вони не задані (невідомі) і, як проміжний результат, значення температури у всіх внутрішніх точках області. ОЗТ вважається розв'язаною, якщо знайдено такий розподіл температури або температурний потік на границі області (де вона не задана була до цього), що розв'язок прямої задачі з використанням у якості знайдених граничних умов умови цього розподілу  $T(\theta_{bound})$  співпадає з потрібним кінцевим розподілом  $T_{fin}$ .

Аналогічно третя задача у даній роботі на пошук коефіцієнта теплопровідності [6]. Дано рівняння (1), початковий розподіл температури (2), кінцевий розподіл температури (3), граничні умови на частині границі у вигляді (4), розподіл густини та питомої теплоємності тіла, які залежать від координат та температури (5). Треба знайти розподіл значень теплопровідності у (5) і, як проміжний результат, значення температури у всіх внутрішніх точках області. ОЗТ вважається розв'язаною, якщо

знайдено такий розподіл значень температуропровідності, що розв'язок прямої задачі з використанням у якості знайдених граничних умов умови цього розподілу  $T(\theta_{cond})$  співпадає з потрібним кінцевим розподілом  $T_{fin}$ .

### Методика розв'язку

Чисельний розв'язок розглянутих у роботі задач отримано методом скінченних елементів.

Будемо мінімізувати функціонал (8), розв'язуючи систему рівнянь [1; 2; 5]

$$\left\{ \frac{\partial J}{\partial (\theta_i)} = 0 \right\}, i = \overline{1, N}, \quad (9)$$

де

$\theta_i$  – шукане значення температури в  $i$ -му вузлу розрахункової сітки;

$N$  – загальна кількість вузлів, у яких потрібно знайти значення температури.

Система (9) буде розв'язуватись методом Ньютона та його модифікаціями.

Тоді завдання оптимізації можна поставити в такий спосіб. Серед існуючих чисельних методів оптимізації типу Ньютона вибрати найбільш ефективні для розв'язку ОЗТ і скоротити в них кількість викликів процедури розв'язку ПЗТ.

### Методи мінімізації квадратичного функціоналу

Методи типу методу Ньютона замінюють розв'язок системи рівнянь виду  $F_i(\bar{x}) = F_i(x_1, \dots, x_n) = 0$  розв'язком послідовності систем виду [4-6]:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\bar{x}^k) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\bar{x}^k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\bar{x}^k) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\bar{x}^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} - x_1^k \\ \dots \\ x_n^{k+1} - x_n^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1(\bar{x}^k) \\ \dots \\ F_n(\bar{x}^k) \end{pmatrix} \quad (10)$$

У якості матриці системи в (10) використовується Гессіан, тобто матриця, що складається з других похідних рівнянь системи:

$$H(\theta^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J_1}{\partial \theta_i^2}(\theta^{(k)}) & \dots & \frac{\partial^2 J_1}{\partial \theta_1 \partial \theta_n}(\theta^{(k)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 J_n}{\partial \theta_n \partial \theta_1}(\theta^{(k)}) & \dots & \frac{\partial^2 J_n}{\partial \theta_n^2}(\theta^{(k)}) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

де  $k$  – номер ітерації методу.

Розв'язки подібних задач можуть бути отримані тільки чисельно, тобто у вигляді таблиць значень. Перед тим, як записати формули для розглянутих методів у [5], запишемо класичний метод Ньютона для поставленої ОЗТ.

$$\begin{aligned} G^k \Delta \theta^k &= -R^k \\ \theta^{k+1} &= \theta^k + \Delta \theta^k \end{aligned} \quad (12)$$

де  $G = (G_{ij}) = (\partial^2 J / \partial \theta_i \partial \theta_j)$  – матриця Гессе,  $\Delta \theta = (\Delta \theta_1, \dots, \Delta \theta_n)^T$  – вектор-стовпчик приростів параметрів,  $R = (R_1, \dots, R_n)^T = (\partial J / \partial \theta_1, \dots, \partial J / \partial \theta_n)^T$  – вектор-стовпчик похідних цільового квадратичного функціоналу.

Використання методів, описаних у [5], для (12), веде до модифікацій класичного методу Ньютона зі змінним кроком.

Перша модифікація методу зі змінним кроком на основі [5] матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta_k J'(\bar{\theta}^{(k)})) &= \min J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot J'(\bar{\theta}^{(k)})), \beta > 0, \\ \bar{z} &= \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}(\bar{\theta}^{(k)}) J'(\bar{\theta}^{(k)}), \\ J(\bar{z} - h_k J'(\bar{z})) &= \min J(\bar{z} - h \cdot J'(\bar{z})), h > 0, \\ \bar{\theta}^{(k+1)} &= \bar{\theta}^{(k)} - 2h_k \cdot (H(\bar{\theta}^{(k)}) + H(\bar{z}))^{-1} J'(\bar{\theta}^{(k)}), \end{aligned} \quad (13)$$

де

$\bar{\theta}^{(k)}$  .. – вектор невідомих задачі на ітерації  $k$ ;

$H$  – матриця Гессе;

$h_k$  – крок методу на ітерації  $k$ .

Метод (13) має другий порядок точності.

Аналогічно, друга модифікація методу Ньютона зі змінним кроком на основі [5] матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta_k J'(\bar{\theta}^{(k)})) &= \min J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot J'(\bar{\theta}^{(k)})), \beta > 0, \\ \bar{z} &= \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}(\bar{\theta}^{(k)}) J'(\bar{\theta}^{(k)}), \\ J(\bar{z} - h_k J'(\bar{z})) &= \min J(\bar{z} - h \cdot J'(\bar{z})), h > 0, \\ \bar{\theta}^{(k+1)} &= \bar{\theta}^{(k)} - \frac{h_k}{2} \cdot (H(\bar{\theta}^{(k)}) \cdot H(\bar{z}))^{-1} (H(\bar{\theta}^{(k)}) + H(\bar{z})) J'(\bar{\theta}^{(k)}). \end{aligned} \quad (14)$$

Метод (14) має другий порядок точності.

Третя модифікація методу Ньютона зі змінним кроком на основі [5] матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta_k J'(\bar{\theta}^{(k)})) &= \min J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot J'(\bar{\theta}^{(k)})), \beta > 0, \\ \bar{z} &= \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}(\bar{\theta}^{(k)}) J'(\bar{\theta}^{(k)}), \\ J(\bar{z} - h_k J'(\bar{z})) &= \min J(\bar{z} - h \cdot J'(\bar{z})), h > 0, \\ \bar{\theta}^{(k+1)} &= \bar{\theta}^{(k)} - h_k H^{-1} \left( \frac{\bar{\theta}^{(k)} + \bar{z}}{2} \right) J'(\bar{\theta}^{(k)}). \end{aligned} \quad (15)$$

Слід зауважити, що метод (15) має третій порядок точності.

Можна прискорити методи (13), (14), (15), використовуючи для знаходження вектора  $\bar{\theta}^{(k+1)}$  метод найшвидшого спуску.

Тестування розроблених методів проводилося на ряді задач. Деякі з них наведені нижче.

*Задача 1.* Знайти глобальний мінімум функціоналу:

$$J(\theta(\bar{x})) = \int_{\Omega} (T(\theta, \bar{x}, t_f) - \Theta(\bar{x}))^2 d\bar{x} \rightarrow \min, \bar{x} = (x_1, x_2), \quad (16)$$

де

$\Omega$  – розрахункова область;

$\theta(\bar{x})$  – невідома (шукана) функція;

$T(\theta, \bar{x}, t_f)$  – шуканий розв'язок задачі, який залежить від  $\theta(\bar{x})$ ;

$\Theta(\bar{x})$  – заданий розподіл температури у момент часу  $t_f$ .

Розрахункова область  $\Omega$  разом із сіткою зображена на рисунку 1:

Розрахункова область, зображена на рисунку 1, представляє собою квадрат зі стороною 2 з центром у початку координат. З квадрату вирізано коло з центром у початку координат радіуса 0,5 та чотири квадрати зі сторонами 0.2 з центрами у точках  $(-0.5; -0.5)$ ,  $(-0.5; 0.5)$ ,  $(0.5; -0.5)$ ,  $(0.5; 0.5)$  відповідно.

Додаткове обмеження квадратичного функціоналу (16) записується у вигляді диференціального рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla(k \nabla T) + f, \\ t &\in [0, t_f], t_f = 0.3, \\ k(T) &= T^2 - T + \sin T + 1, \quad f(x_1, x_2, T) = \cos(T - x_1 + x_2) + x_1^2 + x_2^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Граничні умови (17) мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} T(-1, x_2, t) &= \sin \pi x_2, \\ \left. \frac{\partial T(\bar{x}, t)}{\partial x_1} \right|_{(1, x_2, t)} &= \left. \frac{\partial T(\bar{x}, t)}{\partial x_2} \right|_{(x_1, -1, t)} = \left. \frac{\partial T(\bar{x}, t)}{\partial x_2} \right|_{(x_1, 1, t)} = \left. \frac{\partial T(\bar{x}, t)}{\partial n} \right|_{\Gamma_{inside}} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

де  $\vec{n}$  – нормаль до границі області (у даному випадку до внутрішньої  $\Gamma_{inside}$ ).

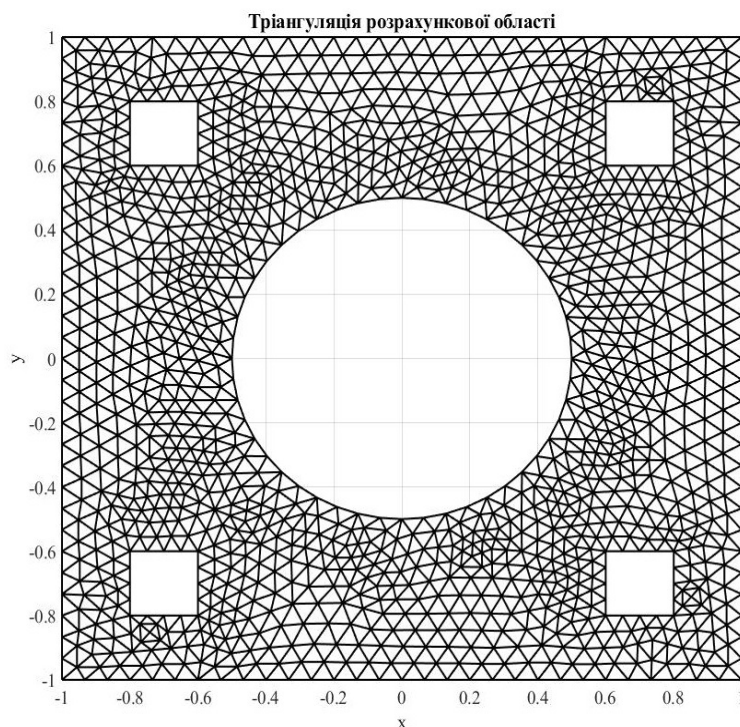


Рис. 1. Розрахункова область задачі з накладеною на нею сіткою.  
Тріангуляція: 1348 вузлів сітки; 2472 елементи; 232 граничних елементи

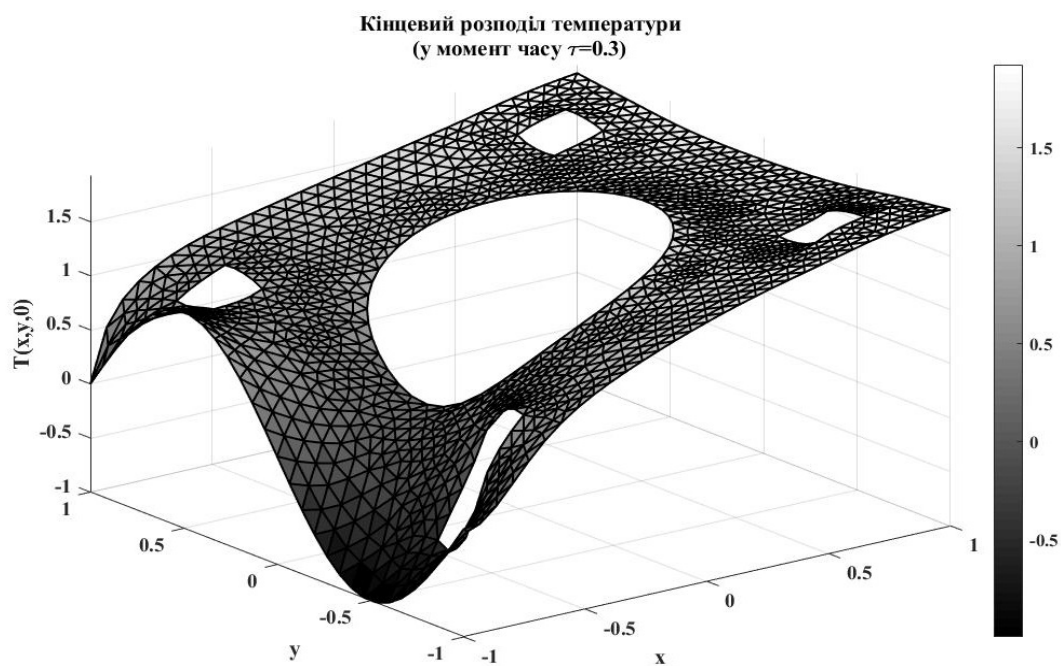
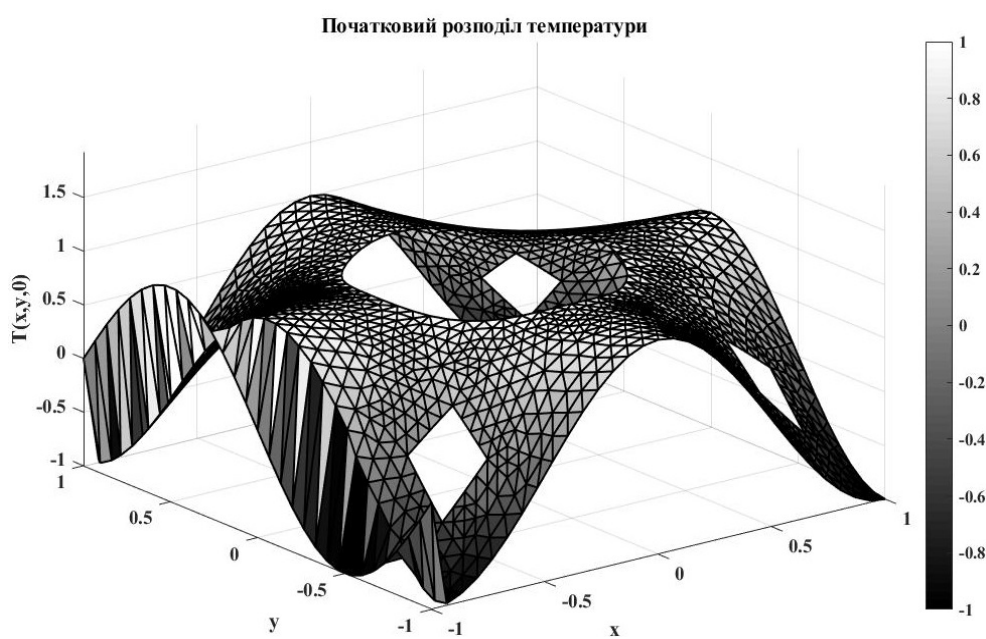
Розподіл температури для (17) з граничними умовами (18) для рівняння (16) представлено так:

$$T_{fin}(\bar{x}) = T(\bar{x}, t_f), \quad (19)$$

причому, розподіл  $T_{fin}(\bar{x})$  представлено на рис. 2:

Результати чисельних експериментів наведено на рис. 3-6.

На основі отриманих результатів можна стверджувати, що модифікації методів Ньютона працюють на нелінійних задачах на пошук початкової умови значно ефективніше, ніж класичний метод Ньютона.

Рис. 2. Розподіл температури в кінцевий момент часу ( $t=0.3$ )Рис. 3. Температурне поле в момент часу  $t=0$

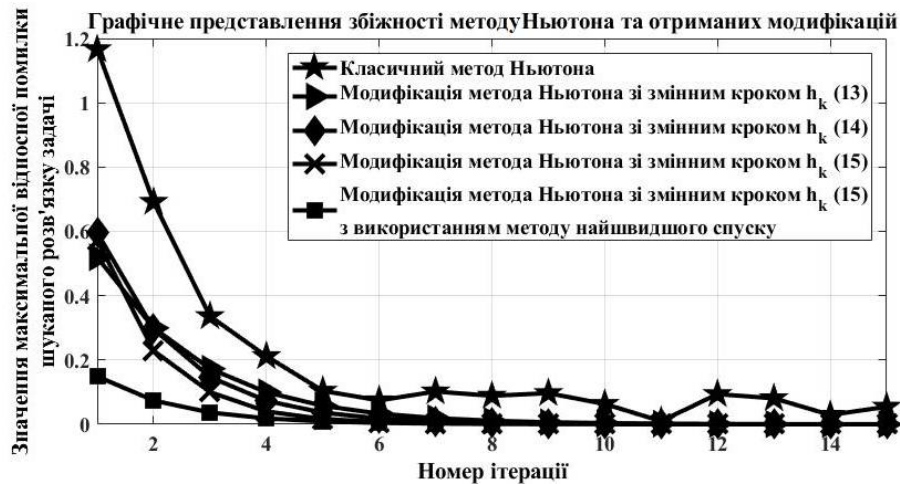


Рис. 4. Порівняльний аналіз роботи методів на поставленій нелінійній задачі за критерієм збіжності відповідних методів



Рис. 5. Порівняльний аналіз розглянутих методів на поставленій задачі за критерієм кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ з нульовим наближенням до початкової умови



Рис. 6. Порівняльний аналіз розглянутих методів на поставленій задачі за критерієм кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ з наближенням до початкової умови за допомогою ряду Фур'є [4] (4 члени розкладу в ряд)

Задача 2. Знайти глобальний мінімум функціоналу:

$$J(\theta(y)) = \int_{\Gamma_1} \left( \frac{\partial T(\theta, x, y)}{\partial x} \Big|_{\Gamma_1} - \Theta(y) \right)^2 dy \rightarrow \min, \quad (20)$$

де

$\theta(y)$  – шукана зовнішня гранична умова другого роду правої частини розрахункової області;

$T(\theta, x, y)$  – шуканий розв’язок задачі;

$\Gamma_1$  – границя, на якій потрібно знайти розподіл температури – це права зовнішня границя розрахункової області для  $y \in (0.2; 0.8)$ ;

$\Theta(y)$  – заданий температурний потік на правій частині розрахункової області  $\Gamma_1$ .

Додаткове обмеження для (20) у вигляді диференціального рівняння має вигляд:

$$\begin{aligned} \nabla(k \nabla T) &= -f, \\ k &= k(T) = \frac{T^2 + \sin\left(\frac{T}{100}\right) + 2}{100}, \\ f &= f(x, y) = 10((x-1)^2 + (y-1)^2), \end{aligned} \quad (21)$$

причому розрахункова область  $\Omega$  для рівняння (21) зображена на рисунку 7:

Розрахункова область задачі, яка зображена на рисунку 7, представляє собою прямокутник розміром  $2 \times 1$ , ліва нижня вершина якого лежить у початку координат. З прямокутника вирізано малий прямокутник розміром  $1 \times 0.5$  з центром у точці  $(1; 0.5)$  та чотири чвертини кіл радіусом  $0.2$  з центрами у вершинах великого прямокутника.

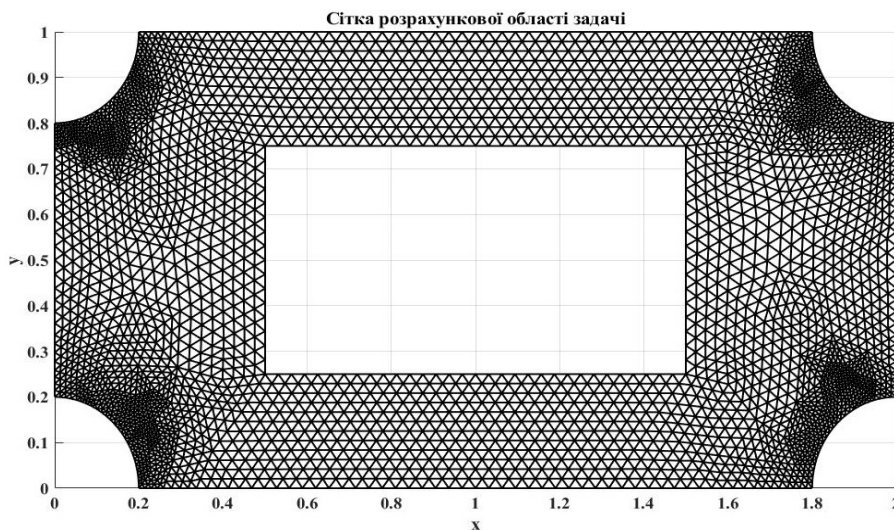


Рис. 7. Розрахункова область задачі із тріангуляцією на ній:  
932 вузли; 1680 елементів; 184 граничних елементів

Граничні умови (21) мають наступний вигляд:

$$T|_{\Gamma_{inside}} = 50, \quad \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_{outside} \setminus \Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \Theta(y), \quad (22)$$

де  $\Gamma_{inside}$  – вся внутрішня границя розрахункової області,  $\Gamma_{outside}$  – вся зовнішня границя розрахункової області,  $\bar{n}$  – нормаль до зовнішньої границі області,  $\Gamma_2$  – внутрішня права границя вирізаного прямокутника у розрахунковій області  $\Omega$ .

Результати чисельних експериментів наведено на рис. 8-13.

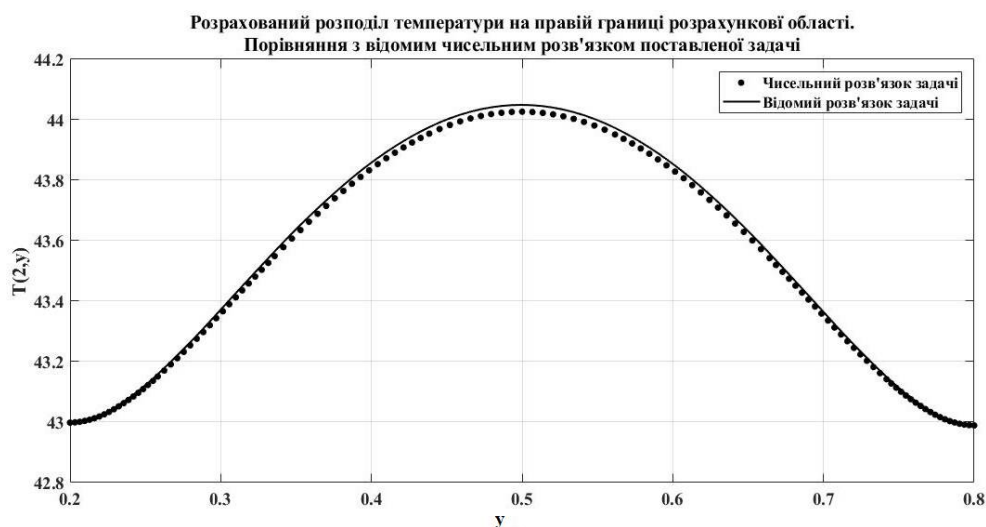


Рис. 8. Результат знаходження зовнішньої граничної умови на правій частині розрахункової області

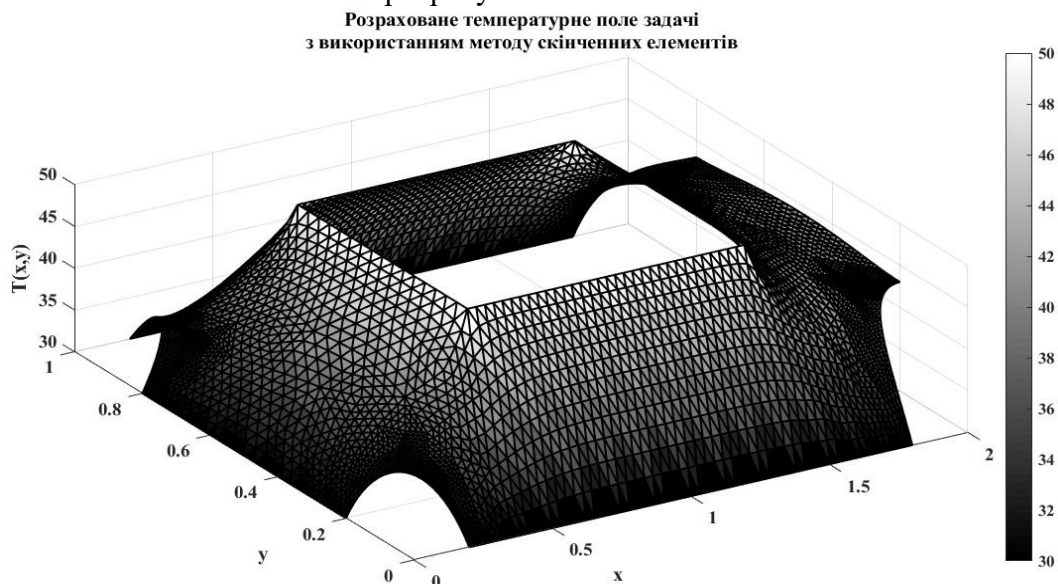


Рис. 9. Розраховане температурне поле при відновленій граничній умові

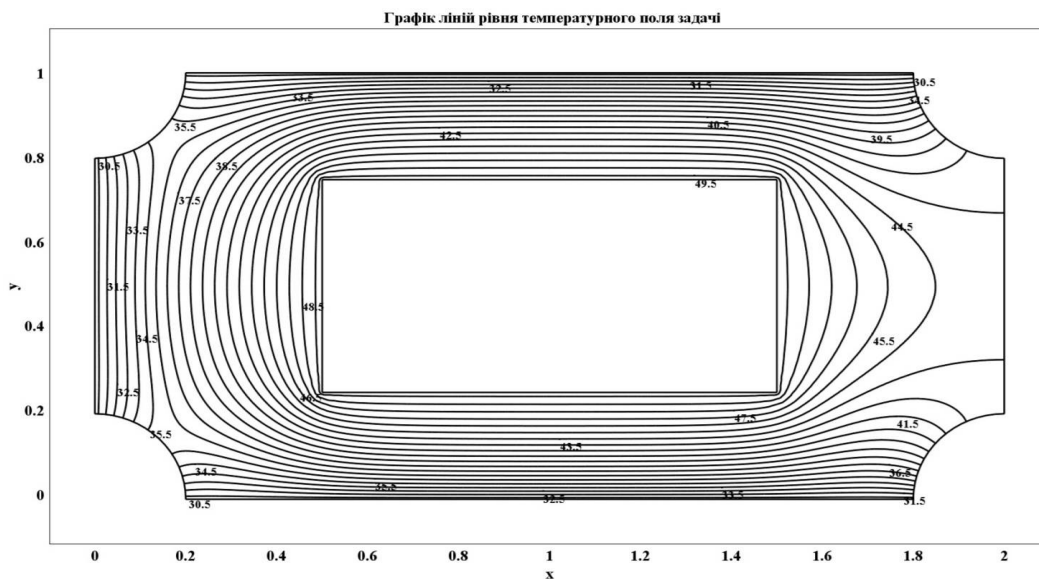


Рис. 10. Представлення температурного поля у вигляді ліній рівня

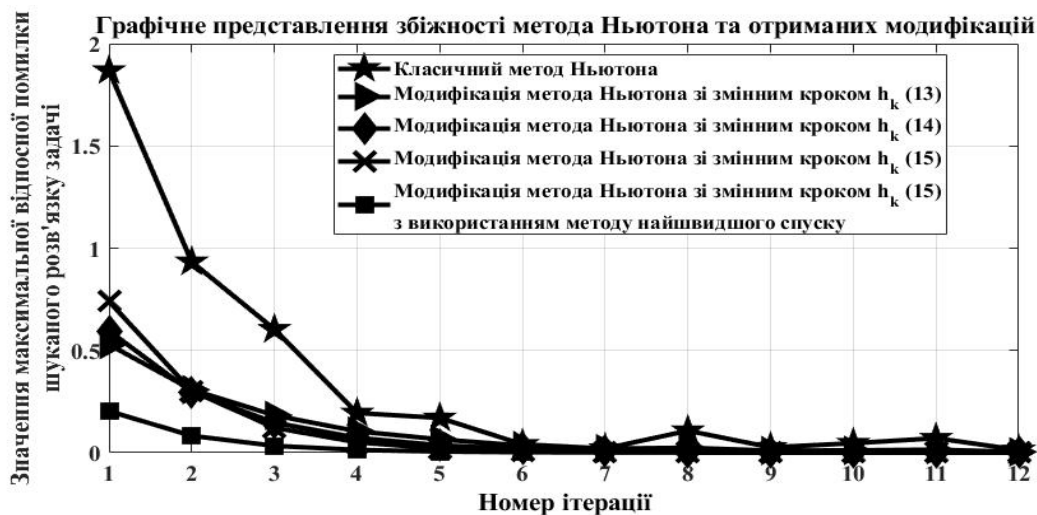


Рис. 11. Порівняльний аналіз роботи алгоритмів за критерієм збіжності



Рис. 12. Порівняльний аналіз роботи алгоритмів за критерієм кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ з нульовим наближенням до граничної умови



Рис. 13. Порівняльний аналіз роботи алгоритмів за критерієм кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ з відповідним розкладом граничної умови за повною системою тригонометричних функцій (4 члени розкладу в ряд)

На основі отриманих результатів можна стверджувати, що модифікації методів Ньютона (13)-(15) працюють на нелінійних задачах на пошук граничних умов значно ефективніше, ніж класичний метод Ньютона.

Тепер розглянемо наступну задачу у такій математичній постановці.

*Задача 3.* Знайти глобальний мінімум функціоналу:

$$J(\theta(x, y)) = \int_0^1 \int_0^1 \left( T(\theta, x, y, t_f) - T_{fin}(x, y) \right)^2 dx dy \rightarrow \min, \quad (23)$$

де

$T(\theta, x, y, t_f)$  – розв'язок задачі;

$\theta(x, y)$  – шуканий розподіл коефіцієнта температуропровідності у всій розрахунковій області (одиничний квадрат з початком координат у лівій нижній його вершині);

$T(\theta, x, y, t_f)$  – розраховане температурне поле у момент часу  $t_f$  розв'язок задачі;

$T_{fin}(x, y)$  – розподіл температури на всій розрахунковій області задачі.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \theta(x, y, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \theta(x, y, T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + f, \\ f(x, y) &= \frac{4\pi^2 t^2 \cos(2\pi tx)}{(\cos(2\pi tx) + \cos(3\pi ty))^2 + 1} - 3\pi y \sin(3\pi ty) - 2\pi x \sin(2\pi tx) + \\ &+ \frac{2\pi^2 t^2 (\cos(2\pi tx) + \cos(3\pi ty)) (4\sin^2(2\pi tx) + 9\sin^2(3\pi ty))}{\left( (\cos(2\pi tx) + \cos(3\pi ty))^2 + 1 \right)^2}, \\ (x, y) &\in [0; 1]^2, t \in [0, t_f], t_f = 0.5. \end{aligned} \quad (24)$$

Початкова умова має вигляд:

$$T(x, y, 0) = 2. \quad (25)$$

Граничні умови задачі мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} T(x, 0, t) &= 1 + \cos(2\pi tx), \quad T(x, 1, t) = \cos(2\pi tx) + \cos(3\pi t), \\ T(0, y, t) &= 1 + \cos(3\pi ty), \quad T(1, y, t) = \cos(3\pi ty) + \cos(2\pi t). \end{aligned} \quad (26)$$

Додаткова умова у момент часу  $t_f = 0.5$ :

$$T(x, y, 0.5) = T_{fin}(x, y) = \cos(\pi x) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi y\right). \quad (27)$$

Результати чисельних експериментів наведено на рис.14-21.

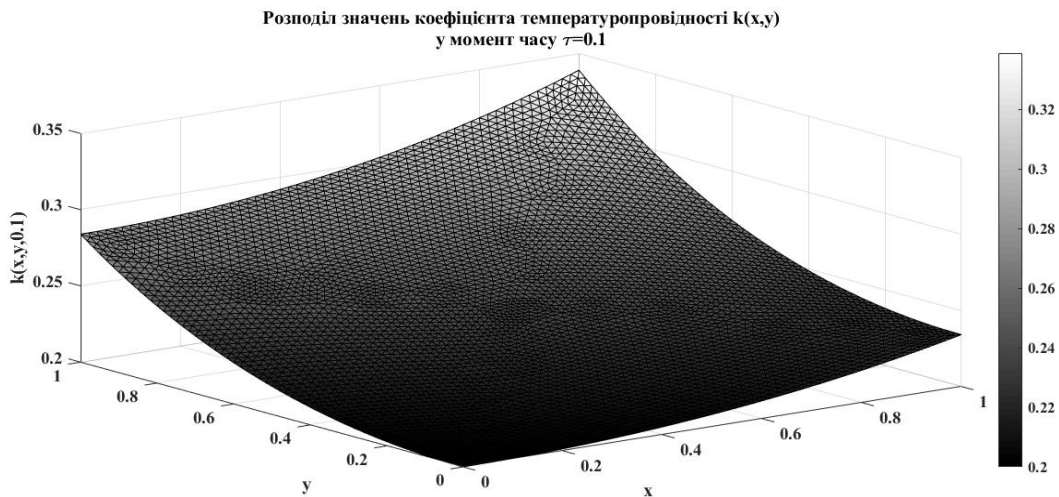


Рис. 14. Відновлений розподіл коефіцієнта теплопровідності у момент часу  $t=0.1$

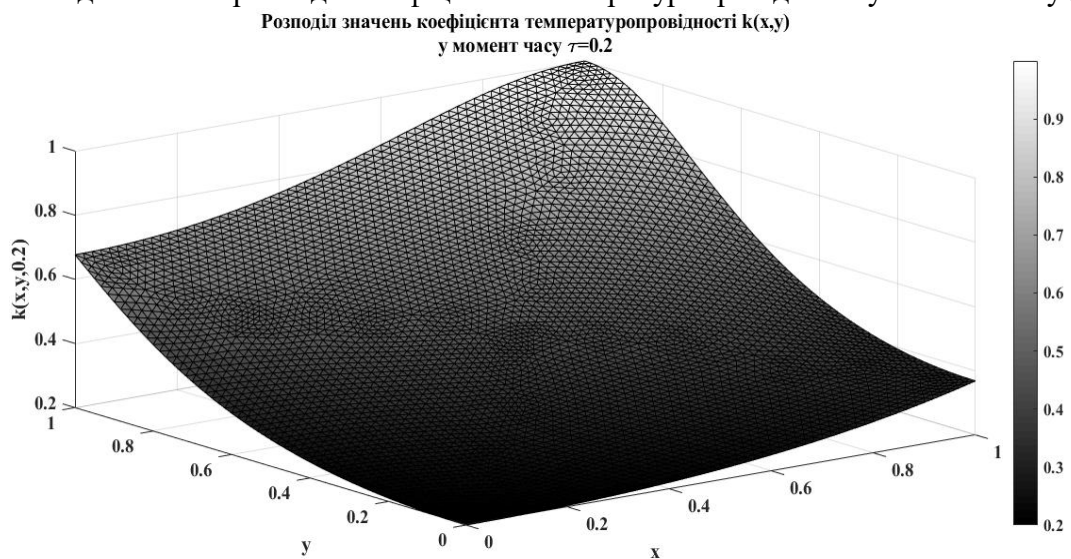


Рис. 15. Відновлений розподіл коефіцієнта теплопровідності у момент часу  $t=0.2$

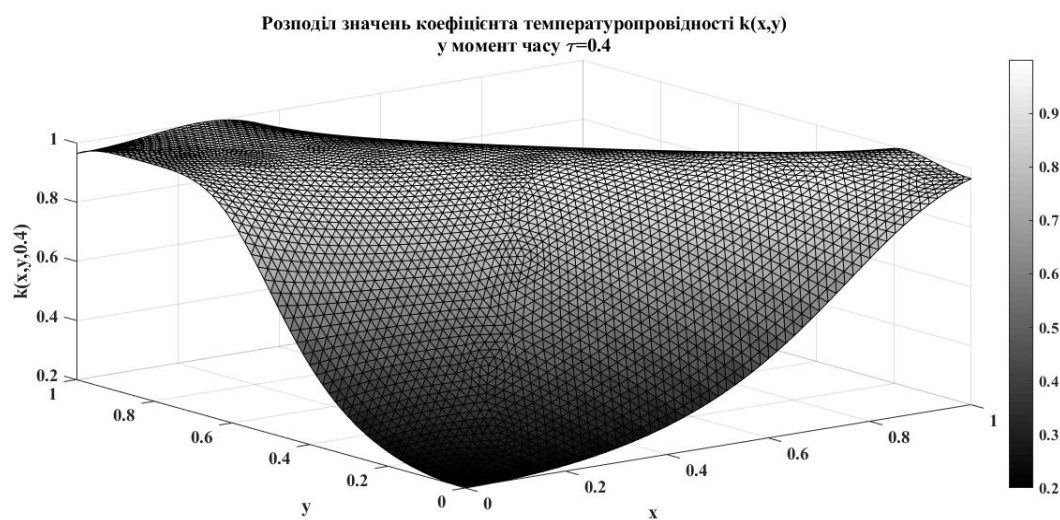


Рис. 16. Відновлений розподіл коефіцієнта теплопровідності у момент часу  $t=0.4$

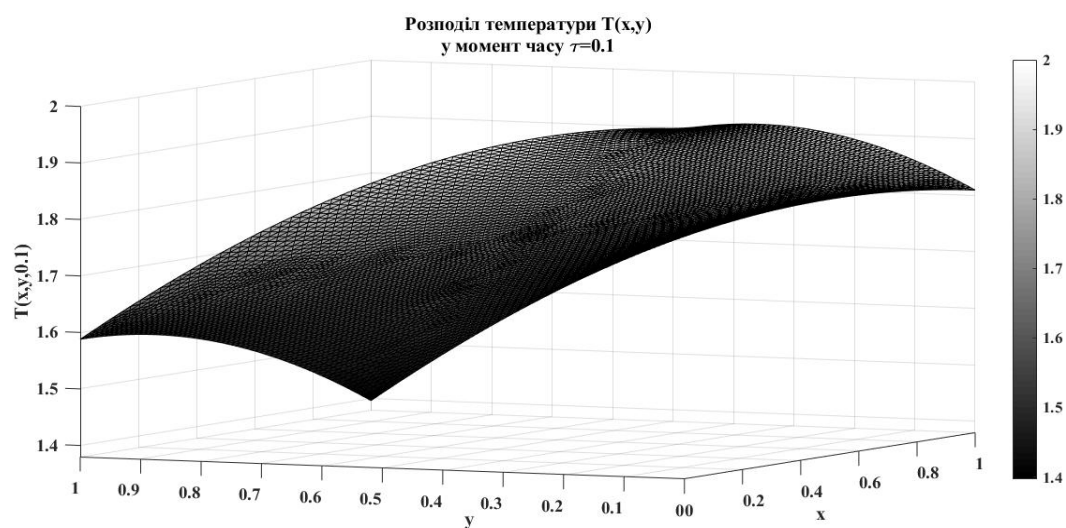


Рис. 17. Розраховане температурне поле у момент часу  $t=0.1$  на основі відновленого коефіцієнта теплопровідності

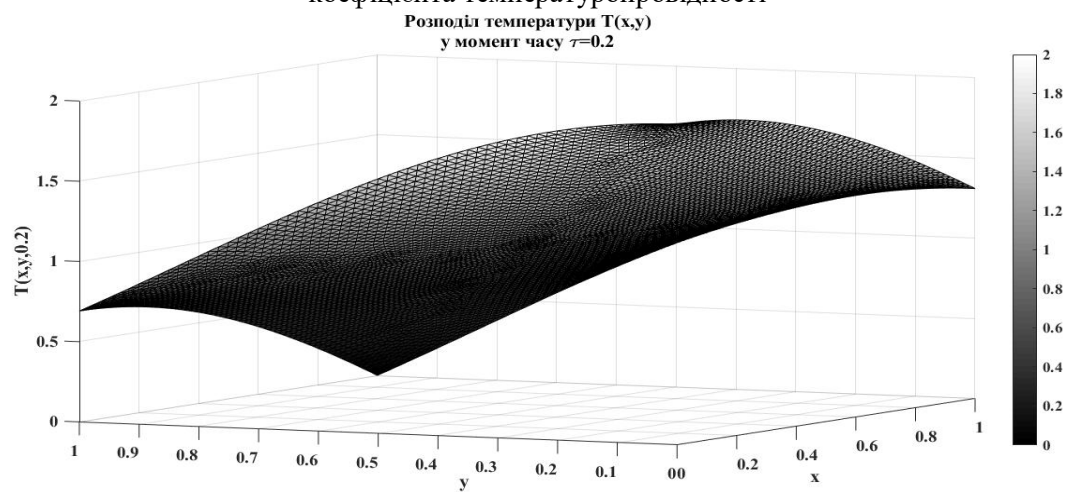


Рис. 18. Розраховане температурне поле у момент часу  $t=0.2$  на основі відновленого коефіцієнта теплопровідності

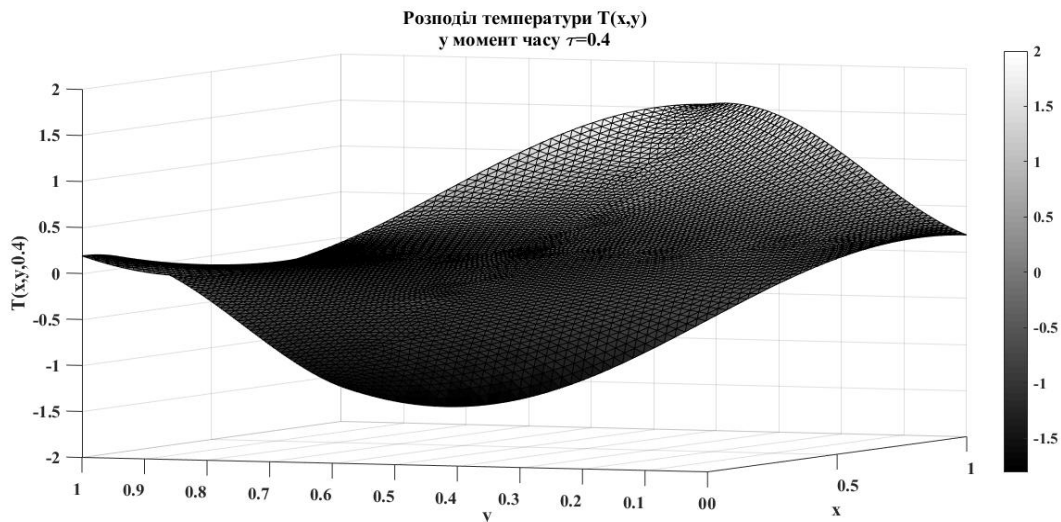


Рис. 19. Розраховане температурне поле у момент часу  $t=0.4$  на основі відновленого коефіцієнта теплопровідності



Рис. 20. Порівняльний аналіз роботи кожного методу за критерієм кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ

Під час тестування методів слід зазначити, що знову ж модифікації методів Ньютона (13)-(15) працюють на нелінійних задачах пошуку коефіцієнта теплопровідності значно ефективніше, ніж класичний метод Ньютона. Тестування методів (13), (14) і (15) було проведено на різних нелінійних задачах, у тому числі на задачах (16)-(19), (20)-(22) і (23)-(27). Розглянуті у роботі завдання були вирішені на сітках різної розмірності. У кожному разі при вирішенні даних нелінійних задач найбільше викликів функції має метод Ньютона. Для кожного завдання число викликів функції при вирішенні даним методом бралось за 100%.

### Висновки

На основі отриманих результатів можна стверджувати, що змінний крок під час мінімізації квадратичного функціоналу подібних нелінійних ОЗТ є необхідною умовою зменшення загальної кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ. Тестування методів (13), (14) та (15) було виконано на різних двовимірних задачах. Показано помітне прискорення розрахунків у порівнянні з класичним методом Ньютона.

#### Список використаної літератури:

1. Klibanov M.V. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problem. / M.V. Klibanov, L. Beilina. – USA.: Springer, 2012. – 407p. ISBN 978-1-4419-7804-2.
2. Isakov V., Inverse Problems for Partial Differential Equations. / V. Isakov. – USA.: Springer, 2005 – 40p.
3. Truffart, B. A General Optimization Algorithm to Solve 2-D Boundary Inverse Heat Conduction Problems Using Finite Elements. / B. Truffart, Y. Jarny, D. Delaunay. First International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, Palm Coast, FL, pp. 53-60, 1993.
4. Головня Б.П. «Про один метод знаходження чисельного розв'язку двовимірної оберненої задачі теплопровідності» Б.П. Головня, В.В. Хайдуров // Науковий журнал. Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: технічні науки. 2015. – Черкаси. – с. 49-55.
5. Головня Б.П. «Эффективные методы решения нелинейных обратных задач теплопроводности». Б. П. Головня, В. В. Хайдуров // Науковий журнал. Вісник Черкаського університету. Серія: прикладна математика. 2014. – Черкаси. – с. 87-98.
6. Хайдуров В.В. «Ефективні методи чисельного розв'язку точкових обернених задач теплопровідності». В. В. Хайдуров // Науковий журнал «Молодий вчений». Серія: технічні науки. 2016. – №6 (33). Херсон. – с. 49-55.
7. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности: в 2 томах. Том 2: Приложения / Ю.М. Мацевитый. – К.: НАН Украины, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного, 2003.

#### References:

1. Klibanov M.V. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problem. / M.V. Klibanov, L. Beilina. – USA.: Springer, 2012. – 407p.
2. Isakov V., Inverse Problems for Partial Differential Equations. / V. Isakov. – USA.: Springer, 2005 – 40p.
3. Truffart, B. A General Optimization Algorithm to Solve 2-D Boundary Inverse Heat Conduction Problems Using Finite Elements. / B. Truffart, Y. Jarny, D. Delaunay. First International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, Palm Coast, FL, pp. 53-60, 1993.
4. Golovnya B.P. «Pro odyn metod znakhodzhennya chysel'noho rozv'yazku dvovymirnoyi obrnenoyi zadachi teploprovodnosti» B.P. Golovnya, V.V. Haydurov // Naukovyy zhurnal. Visnyk Cherkas'koho derzhavnoho tekhnolohichnoho universytetu. Seriya: tekhnichni nauky. 2015r. Cherkasy, Ukrayina. s. 49-55. (in Ukr)
5. Golovnya B.P. «Éffektyvnye metody reshenyya nelyneynykh obratnykh zadach teploprovodnosty». B. P. Golovnya, V. V. Haydurov // Naukovyy zhurnal. Visnyk Cherkas'koho universytetu. Seriya: prykladna matematyka. 2014r. Cherkasy, Ukrayina. s. 87-98. (in Ukr)
6. Haydurov V.V. «Efektyvni metody chysel'noho rozv'yazku tochkovykh obrnenykh zadach teploprovodnosti». V. V. Haydurov // Naukovyy zhurnal «Molodyy vchenyy». Seriya: tekhnichni nauky. 2016r., №6 (33). Kherson, Ukrayina. s. 49-55. (in Ukr)
7. Matsevytyy Yu.M. Obratnye zadachy teploprovodnosti: v 2 tomakh. Tom 2: Prylozhenyya / Yu. M. Matsevytyy. – K.: NAN Ukrainy, Ynstytut problem mashynostroenyia ym. A.N. Podhornoho, 2003. (in Rus)

#### GOLOVNYA Boris,

The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Doctor of Science, Chair of Department of Applied Mathematics and Informatics

#### HAYDUROV Vladyslav,

Kyiv International University, lecturer of the Department of Computer Science

#### SOME HIGH-SPEED METHODS FOR SOLVING NONLINEAR INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS

**Abstract.** In the article a numerical analysis of a series of methods of unconditional optimization on nonlinear problems was carried out, which enable to reduce the time of searching for a numerical solution of a large class of nonlinear IHCP. Also in the work, we proposed significant modifications of the classical Newton method, which give an opportunity to obtain the desired numerical solution of nonlinear problems much faster than in the classical Newton method. Modifications of the Newton method with an alternating step give much faster convergence and give the opportunity to obtain fairly fast solutions of nonlinear IHCP.

**Introduction.** Experimental methods for the study of thermal processes and their systems are the most reliable source of information about the thermal state of the object [7]. Of particular importance there are the theory and practice of solving the inverse problems in our time, when, due to

the circumstances, the objects of energy, industry, transport, economy, communications, buildings and structures have worked out their planned resource and need to avoid man-made disasters, namely need urgent renovation, modernization and reconstruction. The first step in implementing the program of reconstruction of the above objects is the diagnosis of their technical condition and determination of the residual resource, that is, the time during which this object can operate reliably and effectively without endangering people's lives and the environment. When conducting a diagnosis, the direct determination of the parameters limiting the reliable operation of the object is complicated, and often simply impossible. Therefore, as a rule, these parameters are judged by the results of indirect measurements, that is the prerogative of inverse tasks. Thus, the theory and practice of solving the inverse problems lie at the basis of the diagnostics of the technical condition, which requires further research on the development of methods for solving these problems, effective algorithms and software products.

The main problems in solving applied inverse heat conduction problems (IHCP) include the correctness of the statement of the problem, the time of the solution of systems of algebraic equations for the discrete analogue of the heat conduction equation, the volume of computations during the optimization of the quadratic functional in inverse problems (the number of calculations per iteration), stability and convergence of unconditional optimization methods.

It is known that the numerical solution of linear problems of direct and inverse thermal conductivity is obtained much faster than nonlinear problems, since a discrete analog of linear problems requires solving a linear system of equations, and for nonlinear ones it is nonlinear [1; 5; 7]. When finding a numerical solution of nonlinear problems, a number of problems arises in solving the problems.

Most modern methods and algorithms for solving applied problems, which are reduced to the solution of inverse heat conduction problems, use the multiple challenge of the procedure for solving the direct heat conduction problem (DHCP). Therefore, it is obvious that one of the most effective ways to significantly reduce the search time for a numerical IHCP solution is to reduce the time of the DHCP solution for the corresponding IHCP [4, 5]. In the classical statement of incorrect tasks, including IHCP, there is a quadratic functional that needs to be minimized. Therefore, the modification of existing methods of unconditional optimization of the corresponding quadratic functional is no less effective way of accelerating the solution of IHCP, in particular nonlinear ones.

For linear and nonlinear IHCP, the number of calls for a procedure for solving DHCP for one iteration during the application of gradient methods is proportional to the number of desired parameters of the IHCP to be solved. As the dimension of the task grows, the number of calls for the DHCP procedure increases. If, for example, a two-dimensional IHCP to restore the initial temperature distribution of the considered area [4] is solved on a grid of  $34 \times 34$  (with boundary nodes), the number of calls to the DHCP  $32^2$  solution procedure. If this same two-dimensional problem is solved on the  $66 \times 66$  grid (with boundary nodes), then the number of calls for the procedure for resolving DHCP  $64^2$ , etc.

**Purpose.** Development of numerical methods that reduce the number of calculations for obtaining a solution of nonlinear inverse heat conduction problems and approbation of these methods for specific problems.

**Results.** When testing methods, it should be noted that again, the modifications of Newton's (13) - (15) methods work on nonlinear problems in finding the coefficient of heat conductivity much more efficiently than the classical Newton method. Testing of methods (13), (14) and (15) was carried out on various nonlinear problems, including problems (16) - (19), (20) - (22) and (23) - (27). The problems considered in the work were solved on grids of different dimensions. In any case, when solving data of nonlinear problems, the greatest function calls are Newton's method. For each task, the number of function calls in solving this method was taken 100%.

**Conclusions.** On the basis of the obtained results it can be argued that an alternating step during minimization of the quadratic functional of similar nonlinear IHCP is a necessary condition for reducing the total number of calls to the DHCP procedure. Testing methods (13), (14) and (15) were performed on various two-dimensional problems. A marked acceleration of calculations compared with the classical Newton method is shown.

The correctness of the formulation of the problem, the time of solving algebraic equations for a discrete analogue of the heat equation, the amount of computation for the optimization of a quadratic

*functional in inverse problems (the number of calculations per iteration), the stability and convergence of unconditional optimization methods are among the main problems of solving inverse heat conduction problems. In this paper, a numerical analysis of a series of methods of unconditional optimization on nonlinear problems that enable us to reduce the time for searching for a numerical solution of a large class of nonlinear inverse heat conduction problems is carried out.*

**Key words:** *inverse heat conduction problem (IHCP), direct heat conduction problem (DHCP), unconditional optimization methods, quadratic functional.*

*Стаття надійшла 20.09.2017*

*Прийнято до друку 30.10.2017*

## СЕКЦІЯ «ІНФОРМАТИКА»

УДК 004.75

PACS 07.05.Mh, 84.35.+i, 05.65.+b,  
07.05.Fb, 07.05.Kf

ВОЄВОДИН Є. В.

Черкаський національний університет  
імені Богдана Хмельницького, аспірант  
e-mail: targetjump@gmail.com

### ПОРІВНЯННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ СТРАТЕГІЙ РОЗПОДІЛЕННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ САМООРГАНІЗАЦІЙНИХ КАРТ КОХОНЕНА В СИСТЕМАХ ОРКЕСТРУВАННЯ ВІРТУАЛЬНИХ КОНТЕЙНЕРІВ

**Анотація.** У статті описуються основні етапи методу розподілення динамічної послідовності віртуальних контейнерів з використанням самоорганізаційних карт Кохонена та можливі параметри його конфігурації. Описаний метод дає змогу побудувати модель, що базується на неявних зв'язках між віртуальними контейнерами та вузлами в кластері. Також, у статті описані різного роду експерименти, зокрема упаковка кластеру до першого відхилення та упаковка кластеру до повноти. Експерименти проводяться на кластерах різної розмірності, демонструючи особливості поведінки описаного методу в різних варіаціях його конфігурації.

Описана методологія проведення експериментів може бути використана для дослідження кластерів та пошуку ефективної конфігурації карти Кохонена та топології кластеру. Зроблені висновки можуть бути використанні для розробки більш ефективних методів розподілення з використанням штучних нейронних мереж.

**Ключові слова:** розподілення, балансування, самоорганізаційні карти Кохонена, штучні нейронні мережі, віртуалізація, контейнер, система оркестрування.

#### Вступ

Системи оркестрування віртуальних контейнерів (СОВК) займають важливу нішу в інформаційних технологіях, зокрема у високонавантажених та розподілених системах. Одиницею віртуалізації в СОВК є віртуальний контейнер (далі просто контейнер), який являє собою виконавче середовище, існуюче в межах однієї СОВК і є обмежене її ресурсами. Контейнер описує ряд вимог якими він має бути забезпечений для повноцінної роботи. У загальному випадку до таких вимог можна віднести кількість ядер центрального процесору (ЦП) та кількість оперативної пам'яті (ОП) потрібної йому для роботи. У залежності від конкретної СОВК, конфігурація контейнера може описувати набір додаткових вимог.

Основною задачею СОВК є забезпечення контролю повного життєвого циклу контейнерів у кластері. Однією з невід'ємних частин життєвого циклу контейнера є його створення. Процес створення включає в себе пошук вузла, тобто вільного місця в кластері, яке б задовольняло вимоги його конфігурації. Для виконання цієї задачі СОВК використовують різні стратегії розподілення.

Використання стратегії розподілення заповненням чи то стратегії розподілення поширенням є стандартним рішенням для СОВК. Перевага першої в тому, що її змогами досягається використання малої кількості вузлів, що зменшує потребу в додаткових апаратних ресурсах, але концентрація багатьох контейнерів на одному вузлі породжує низький рівень відмовостійкості. У свою чергу, більш високий рівень відмовостійкості [1] досягається з використанням стратегії розподілення поширенням, за рахунок розміщення контейнерів на вільних вузлах, але в такому випадку з'являється проблема простою вільних апаратних ресурсів. Обидві стратегії не аналізують

динамічну послідовність та не будують моделі зв'язків, у результаті з'являються випадки, в яких балансування здійснюється неефективно. Це негативно впливає на СОВК, що змушує систему приймати критичне рішення відносно запиту балансування, зокрема: не приймати нових запитів, затримати запит до тих пір поки не з'являться апаратні ресурси, або ж почати створення нового вузла з подальшим запуском контейнера на ньому, що також потребує часу. Використання евристичних методів, включаючи самоорганізаційні карти Кохонена (СКК), дозволяє аналізувати зв'язки елементів динамічної послідовності та діяти більш ефективно.

#### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Про неефективність існуючих методів у своїй роботі описує Є.В. Воеводін. Автор порівнює між собою методи розподілення заповненням і розподілення поширенням, наводячи їх переваги та недоліки. У ході порівняння автор показує, за яких умов існуючі стратегії здійснюють неефективне балансування, та описує можливу поведінку СОВК у критичних випадках. У роботі також описуються можливі способи оптимізації процесу балансування, зокрема з використанням евристичних методів.

У своїй іншій роботі Є.В. Воеводін описує, як можна використати СКК для реалізації евристичної стратегії балансування контейнерів. Також автор проводить ряд експериментів, які показують, для яких динамічних послідовностей стратегії з використанням СКК здійснюють балансування більш ефективно. Так, наприклад, динамічну послідовність контейнерів з вимогами до оперативної пам'яті 1 Гб, 3 Гб, 4 Гб, 3 Гб, 5 Гб стратегія розподілення заповненням не може розподілити їх повністю на трьох вузлах місткістю 6 Гб, тоді коли стратегія з використанням СКК успішно справляється з цією задачею.

Алгоритм параметричної оптимізації на основі моделі поведінки рою світлячків описують В. Курейчик та інші [2]. В основі поведінки рою лежить самоорганізація, яка забезпечує досягнення спільних цілей на основі взаємодій низького рівня. Автори розробляють метод, який базується на динамічній області прийняття рішення кожним агентом, що гарантує знаходження всіх локальних оптимумів цільової функції за поліноміальний час. Ефективність методу автори доводять експериментально, порівнюючи його з мурашиним алгоритмом та методом рою часток.

**Метою** статті є опис, експериментальна перевірка та порівняння різних конфігурацій методу балансування динамічної послідовності віртуальних контейнерів з використанням СКК.

#### **Теоретичні основи методу**

У даному дослідженні для розв'язання задачі розподілення динамічної послідовності контейнерів використовується СКК. СКК – це штучна нейронна мережа [4-5], яка навчається без учителя і за своєю суттю добре підходить для розв'язання задач кластеризації. СКК дають змогу відображати простір більшого виміру в простір меншого виміру, зберігаючи топологічні властивості вхідного простору.

Оскільки СКК може приймати на вхід багато елементів, то можна представити вимоги контейнера у вигляді вхідних даних для СКК, відповідно вузли в кластері є вихідним шаром (рис. 1), або ж так званою картою. Тобто карта – є відображенням динамічної послідовності контейнерів в одновимірний простір вузлів. Таке відображення дозволяє формувати групи схожих за вимогами контейнерів на основі неявних залежностей.

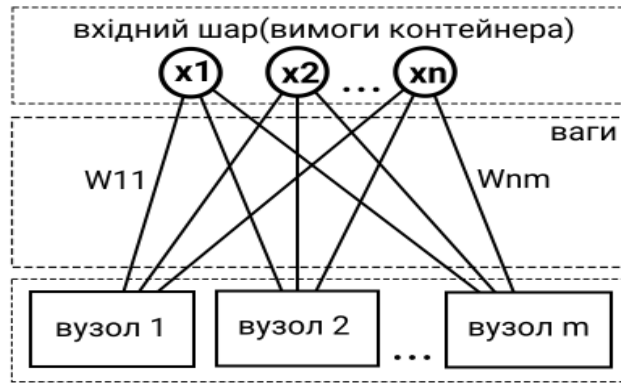


Рис. 1. Візуальна схема СКК

Для початку опишемо основні етапи роботи алгоритму СКК та можливі варіації конфігурацій на різних етапах алгоритму.

Етап перший – ініціалізація вагових коефіцієнтів  $w_{ij}$ . Ініціалізувати вагові коефіцієнти СКК можна по-різному. Одним з основних методів ініціалізації є ініціалізація випадковими маленькими значеннями [6], наприклад, з проміжку  $[0,1]$ . У такому випадку є сенс у тому, щоб нормалізувати множину вхідних даних, тоді всі значення з множини також будуть з числового проміжку  $[0,1]$ . Для нормалізації вхідних значень можна використати формулу:

$$\bar{z}_i = \frac{\bar{x}_i - \min(\bar{x})}{\max(\bar{x}) - \min(\bar{x})},$$

де  $\bar{x}$  – вектор вхідних даних;  $\bar{z}$  – нормалізований вектор.

Іншим основним методом ініціалізації є встановлення значень вагових коефіцієнтів рівними значенням випадково обраних векторів із вхідних даних. Якщо множина вхідних даних більша, ніж розмір карти, то має сенс у ході вибору випадкових векторів розбити всю множину на стільки відрізків, скільки нейронів у карті, та взяти кожний такий вектор, який знаходиться усередині якогось із отриманих відрізків.

Етап другий – змагання. У ході змагання знаходиться відстань від вхідного вектору до кожного з нейронів. В якості функції пошуку відстані, у межах даної роботи, буде використовуватись Евклідова відстань. Тоді відстань до нейрона-переможця можна виразити наступним чином:

$$\|\bar{x}(t) - \bar{w}^{(c)}(t)\| = \min_{j \in \{1, \dots, M\}} \|\bar{x}(t) - \bar{w}^{(j)}(t)\|,$$

де  $c$  – індекс нейрона-переможця;  $t$  – номер ітерації;  $\bar{x}(t)$  – вектор вхідних даних на ітерації  $t$ ;  $\bar{w}^{(j)}(t)$  – вектор вагових коефіцієнтів для нейрона з індексом  $j$  на ітерації  $t$ ;  $M$  – кількість нейронів у СКК. Нейрон-переможець – це нейрон, який знаходиться найближче до вхідного вектору.

Етап третій – кооперація. У ході третього етапу потрібно знайти топологічну околицю навколо нейрона-переможця, тобто знайти нейрони, чиї вагові коефіцієнти потрібно адаптувати до вхідних даних. Позначимо функцію сусідства між нейронами, як  $h_{cj}(t)$ , тоді функція константного впливу (ФКВ) буде мати вигляд:

$$h_{cj}(t) = \begin{cases} 0, & d > \sigma(t) \\ const, & d \leq \sigma(t) \end{cases}$$

де  $c$  – індекс нейрона-переможця;  $j$  – індекс нейрона, що пробуджується;  $d$  – відстань від нейрона-переможця до нейрона з індексом  $j$ . Опишемо відстань наступною формулою:

$$d = \|ne_c - ne_j\|,$$

де  $ne_c$  – позиція нейрона-переможця,  $ne_j$  – позиція нейрона, що пробуджується. У свою чергу,  $\sigma(t)$  відповідає за радіус впливу, в якості такої функції оберемо наступну:

$$\sigma(t) = \frac{R}{1 + \frac{t}{T}},$$

де  $R = const$  – початковий радіус;  $T$  – загальна кількість ітерацій.

Основна ідея ФКВ у тому, що нейрони які підлягають адаптації, змінюють значення вагових коефіцієнтів незалежно від того, наскільки далеко вони знаходяться від нейрона-переможця.

У якості функції впливу також може виступати і функція Гауса (ФВГ) [5]:

$$h_{cj}(t) = e^{-\frac{d^2}{2\sigma(t)^2}},$$

де  $\sigma(t)$  – це функція визначення топологічної околиці, в якості якої можна використати функцію експоненціального розпаду [7]:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{\frac{t}{T}},$$

де  $\sigma_0 = const$  – початкова ширина топологічної околиці;  $t$  – номер ітерації;  $T$  – загальна кількість ітерацій.

На відміну від ФКВ, ФВГ дає змогу змінювати вагові коефіцієнти нейронів по-різному, чим далі цільовий нейрон від нейрона-переможця – тим слабше він адаптується до вхідних даних, окрім цього, зі збільшенням ітерації зменшується топологічна околиця.

Етап четвертий – адаптація. У ході адаптації значення вагових коефіцієнтів СКК змінюються у напрямку вхідного вектору. Коригування вагових коефіцієнтів здійснюється за формулою:

$$\bar{w}^{(j)}(t+1) = \bar{w}^{(j)}(t) + \alpha(t)h_{cj}(t)[\bar{x}(t) - \bar{w}^{(j)}(t)],$$

де  $\alpha(t)$  – функція швидкості навчання, яка, у свою чергу, дозволяє керувати інтенсивністю адаптації вагових коефіцієнтів на відповідній ітерації.

У якості такої функції, як і в ФВГ, можна використати експоненціальну функцію розпаду, але дещо з іншими параметрами:

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{\frac{t}{n}},$$

де  $\alpha_0 = const$  – початкове значення швидкості;  $n = const$  – дозволяє контролювати, як швидко зменшується значення функції;  $t$  – це номер ітерації.

Процес навчання СКК здійснюється за  $T$  ітерацій, де на кожній наступній ітерації з вибірки обирається випадковий вхідний вектор  $\vec{x}$ , та проходять вищеописані етапи – змагання, кооперації та адаптації.

#### Основні результати дослідження

Для проведення експерименту була реалізована стратегія балансування у COVK *Docker Swarm* [8]. Реалізація складається з двох основних частин. Перша – ініціалізація стратегії, у ході ініціалізації здійснюється конфігурація та навчання СКК на основі попередньо вказаної множини конфігурацій. Друга – розподілення контейнерів. Щоб розподілити один контейнер потрібно зробити наступне:

1. Перетворити конфігурацію контейнера у вектор вхідних даних.
2. Знайти вектор відстаней, так само, як і на етапі змагання.
3. Відсортувати послідовність вузлів за значеннями векторів відстаней.
4. З отриманої послідовності виключити всі вузли, які не задовольняють вимоги конфігурації.
5. Якщо після вилучення не залишається вузлів, то повернути помилку, в іншому ж випадку – повернути відфільтрований список вузлів.

У ході експерименту використовується генератор псевдовипадкових конфігурацій (ГПВК), який дає змогу отримувати динамічні послідовності конфігурацій контейнерів за попередньо заданих вимог та обмежень. У контексті даного дослідження вимоги описані в таблиці 1.

Опис вимог для ГПВК

Таблиця 1

| Класифікація     | Ймовірність | Опис вимог             |
|------------------|-------------|------------------------|
| Низькі вимоги    | 50%         | [ОП 1], [ОП 2], [ОП 3] |
| Середні вимоги   | 33%         | [ОП 4], [ОП 6]         |
| Високі вимоги    | 12%         | [ОП 8], [ОП 16]        |
| Надвисокі вимоги | 5%          | [ОП 32]                |

Динамічна послідовність формується за допомогою значень, які генерує ГПВК. Спочатку ГПВК обирає якусь конкретну класифікацію, керуючись ймовірностями, описаними у заданій таблиці, далі з описаної множини вимог (конфігурацій) обирається випадкове значення, яке, при потребі, стає наступним елементом динамічного ряду.

Перший експеримент полягає у тому, щоб здійснювати паралельну упаковку до першого відхилення запиту. Експеримент проводиться для кількох стратегій паралельно, при цьому використовується одна й та ж динамічна послідовність конфігурацій контейнерів. Під відхиленням запиту мається на увазі ситуація, коли стратегія не може розподілити наступну конфігурацію у динамічному ряді, оскільки у кластері просто немає вузла, який відповідає її вимогам. Провівши такий експеримент

кілька разів, скажімо, 1000, можна визначити, для якої кількості динамічних послідовностей контейнерів одна стратегія була більш ефективна за іншу, тобто, частіше розподіляла більше контейнерів.

Для початку визначимо залежності для коефіцієнтів  $R$  для ФКВ та  $\sigma_0$  для ФВГ. Нехай у нас є кластер, який складається із 10 вузлів 32Гб ОП кожен, тоді, провівши описаний експеримент для стратегії розподілення заповнення попарно з ФВГ та ФКВ, можна визначити, при яких значеннях коефіцієнтів стратегії є максимально ефективними.

З графіку (рис. 2) видно, що ефективність розподілення стратегії, яка базується на ФВГ, є максимальною при  $\sigma_0 = 4$ , тоді коли з використанням ФКВ максимальної ефективності вдається досягти при  $R = 3$ .

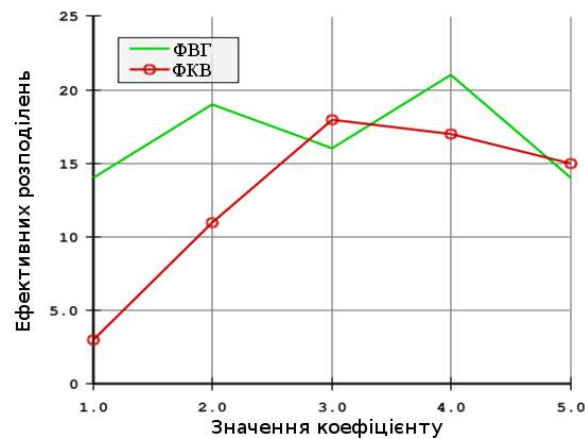


Рис. 2. Ефективність розподілення ФВГ та ФКВ для різних коефіцієнтів

Оскільки у описаному алгоритмі СКК використовується з одновимірною топологією, то має сенс визначення залежності величини коефіцієнта від розміру кластера. З отриманих даних для ФВГ така залежність буде мати вигляд  $\sigma_0 = 0.25n$ , а для ФКВ  $R = 0.33n$ , де  $n$  – це кількість вузлів у кластері.

Для дослідження поведінки функцій для кластерів інших розмірностей на базі отриманих залежностей проведемо аналогічний експеримент, здійснюючи одночасне розподілення стратегіями з використанням ФВГ та ФКВ. Кожний кластер, що бере участь в експерименті, складається із вузлів розмірністю 32 Гб ОП, кількість вузлів варіюється.

Для роз'яснення значень на графіку (рис. 3) візьмемо, наприклад, значення ефективності розподілень для 50 вузлів. Для 225 динамічних рядів із 1000 використання ФВГ було більш ефективне, ніж ФКВ, у свою чергу для 272 – навпаки, а в 503 випадках використання обох функцій було однаково ефективними. Однак, як можна бачити з графіку, для невеликих розмірів кластеру використання обох функцій є однаково ефективним, але з ростом розміру кластера більш ефективним є використання ФКВ.

Проведемо той же дослід, але застосовуючи в ході навчання карти функцію швидкості росту  $\alpha(t)=1$ , тобто модифікація вагових коефіцієнтів базується тільки на значенні, що повертається функцією впливу.

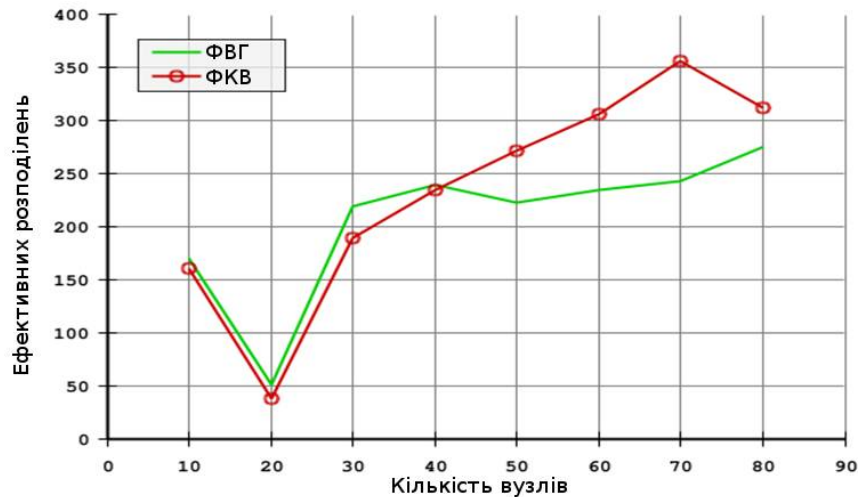
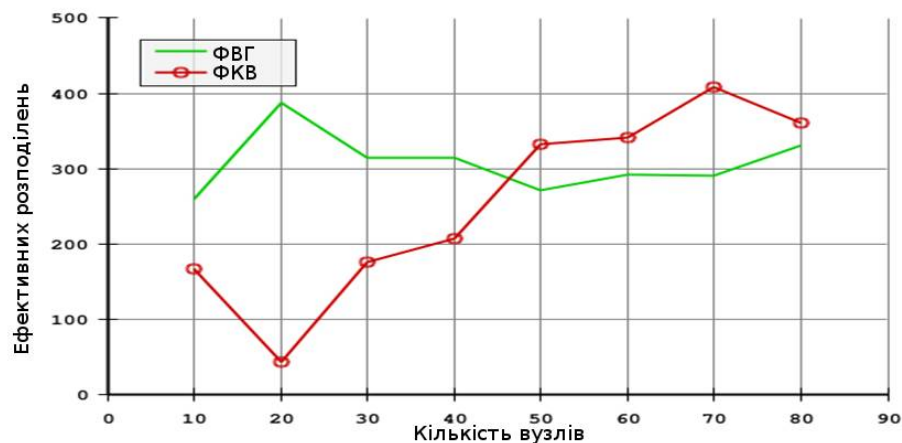


Рис. 3. Ефективність розподілення ФВГ та ФКВ

З графіку (рис. 4) видно, що для малих та середніх розмірів кластеру використання ФВГ дозволяє досягти максимально ефективних результатів, тоді як ФКВ продовжує бути більш ефективною для великої кількості вузлів. Так, наприклад, для 20 вузлів використання ФВГ дає змогу досягти не менш ефективного розподілення, ніж з використанням ФКВ для 956 динамічних рядів із 1000, тоді коли для 70 вузлів використання ФКВ є не менш ефективним у 705 випадках.

Рис. 4. Ефективність розподілення ФВГ та ФКВ  
зі сталою швидкістю росту рівній 1

Провівши описаний експеримент ще раз для однієї і тієї ж функції, але з використанням різних методів ініціалізації, можна бачити (рис. 5), що значення розподілень знаходяться приблизно в тому ж діапазоні, з невеликим відхиленням у бік ініціалізації векторами з вибірки для ФКВ.

Інший експеримент полягає у тому, щоб запаковувати кластери до тих пір, поки у кластері не буде місця хоча б для конфігурації з найменшими потребами, при цьому, як і у попередньому експерименті, використовувати одну й ту ж динамічну послідовність конфігурацій контейнерів. Провівши такий експеримент достатню кількість разів, скажімо, 1000, і взявши середнє значення розподілень, можна проаналізувати, яка із стратегій в середньому може розподілити більше контейнерів, при цьому зробивши меншу кількість помилок.

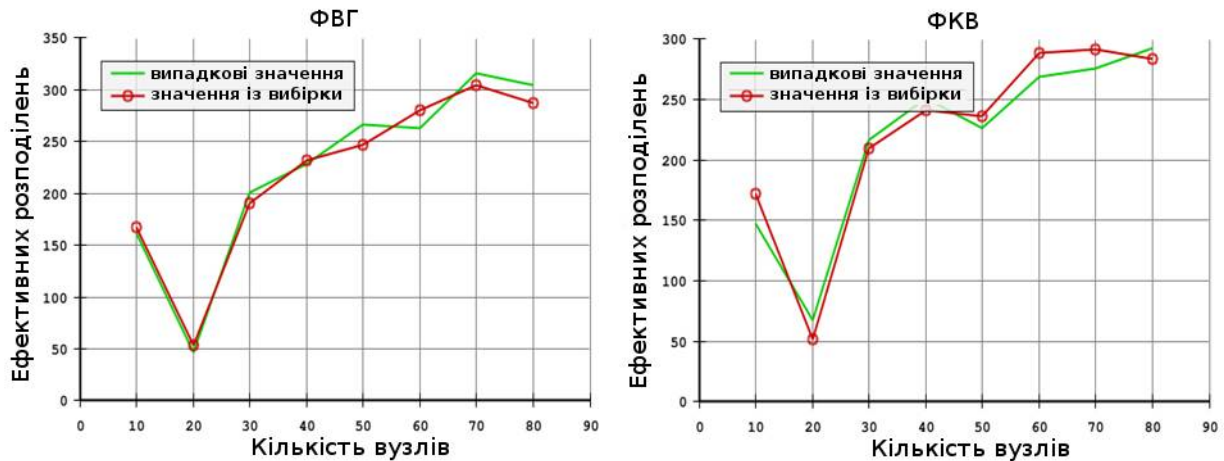


Рис. 5. Ефективність розподілення ФВГ та ФКВ з використанням різних методів ініціалізації

Почнемо з того, що знайдемо залежність між коефіцієнтом для функцій впливу та кількістю вузлів у кластері, базуючись на середньому значенні запакованих контейнерів та зроблених помилок.

З графіків (рис. 6) видно, що кількість розподілених контейнерів у середньому складає близько 65 контейнерів для кластеру із 10 вузлів по 32Гб кожен. Однак, максимальне середнє значення для ФКВ досягається при  $R=1$ , відповідно залежність радіусу від кількості вузлів має наступний вигляд  $R=0.1n$ , у свою чергу для ФВГ  $\sigma_0 = 0.25n$ , де  $n$  – це кількість вузлів у кластері.

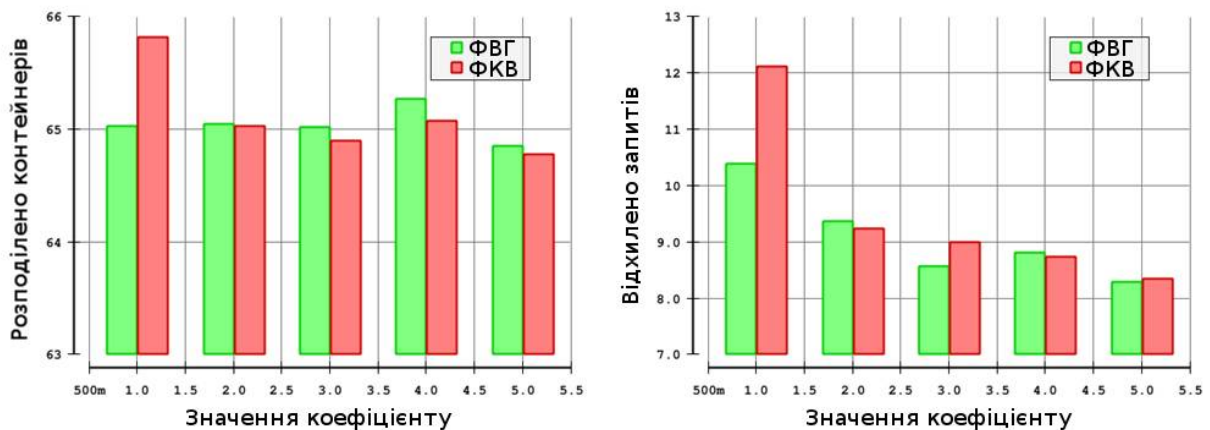


Рис. 6. Ефективність розподілення ФВГ та ФКВ для різних коефіцієнтів

Визначивши залежності для коефіцієнтів функцій впливу, проведемо експеримент для кластерів різної розмірності. Результат такий, що кількість середніх розподілень стратегіями з використанням ФКВ та ФВГ є майже еквівалентними, з мізерною перевагою ФКВ. Але при цьому, у більшості випадків, заповнення кластеру з меншою кількістю помилок вдається здійснити з використанням ФВГ, особливо для кластерів невеликої розмірності (рис. 7).

При використанні  $\alpha(t)=1$  середні значення майже не змінюються, окрім того, що кількість відхилених запитів при використанні ФКВ для кластерів великого розміру зменшується.

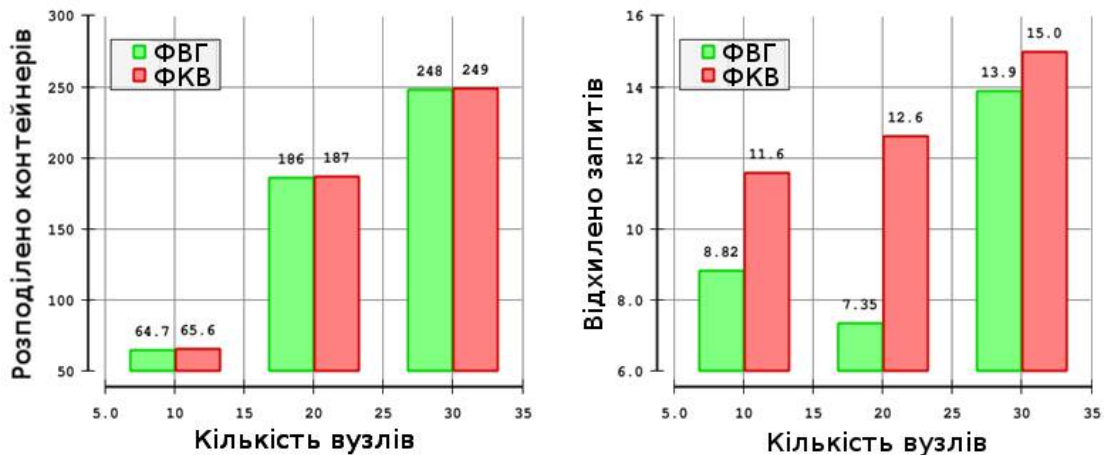


Рис. 7. Графіки розподілень та відхилень для невеликих кластерів

При проведенні того ж експерименту та порівнянні функцій самих із собою при використанні різних методів ініціалізації, можна спостерігати значне зменшення кількості відхилень для ФКВ з використанням ініціалізації випадковими значеннями, коли для ФВГ кількість відхилень не значно зростає.

### Висновки

У ході дослідження було описано основні етапи роботи СКК та можливі параметри їх конфігурації. Також був описаний алгоритм роботи стратегії розподілення, що базується на СКК. У ході проведених експериментів було виявлено, що для кластерів невеликої розмірності (10-30 вузлів) використання функції впливу Гауса дозволяє досягти максимальної ефективності, особливо коли швидкість навчання ігнорується. Для кластерів більшої розмірності (70-80) максимальної ефективності вдається досягти з використанням ФКВ. Водночас використання ініціалізації випадковими значеннями дає змогу зменшити кількість відхилень запитів на розподілення. У результаті дослідження можна стверджувати, що ефективність стратегії розподілення динамічної послідовності контейнерів з використання СКК залежить від конфігурацій останньої та топологічних властивостей кластеру.

Для покращення ефективності алгоритму роботи СКК є сенс провести дослідження різних топологій карти з подальшим аналізом груп, які утворилися в ході її навчання.

### Список використаної літератури:

1. Таненбаум Э. Распределенные системы принципы и парадигмы / Э. Таненбаум, М. ван Стеен. – СПб: Питер, 2003. – 877 с.
2. Курейчик В. В. Алгоритм параметрической оптимизации на основе модели поведения роя светлячков / В. В. Курейчик, Д. В. Заруба, Д. Ю. Запорожец. // Известия ЮФУ. Технические Науки. – 2015. – №6. – С. 263.
3. Ritter H. Neural Computation and Self-Organizing Maps. An Introduction / H. Ritter, T. Martinetz, K. Schulten., 1992. – (Addison-Wesley).
4. Городич О. Самоорганізація нейромереж та класифікація даних / О. Городич, Ю. Щербина. // ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ. Сер. прикл. матем. інформ. – 2003. – №7. – С. 234–247.
5. Хайкин С. Нейронные сети полный курс / Саймон Хайкин. – Москва: Вильямс, 2006. – 1104 с.
6. Sun M. Improving the Self-Organizing Feature Map Algorithm Using an Efficient Initialization Scheme / M. Sun, T. Liu, H. Chang. // Tamkang Journal of Science and Engineering. – 2002. – Vol. 5, №1. – С. 35–48.
7. Hasan S. Multistrategy Self-Organizing Map Learning for Classification Problems [Електронний ресурс] / S. Hasan, S. Shamsuddin. – 2011. – Режим доступу до ресурсу: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3157650/>.
8. Docker Swarm overview [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу:

<https://docs.docker.com/swarm/overview/>

#### References:

1. Tanenbaum E. & Steen M. (2003). *Principles and paradigms of distributed systems*. St. Petersburg: Piter. (in Rus)
2. Kurejchuk V. V. & Zaruba D. V. & Zaporozhec D. Ju. (2015). Algorithm of parametric optimization based on the firefly swarm pattern. *Izvestija JuFU. Tehnicheskie Nauki (Tidings of SFedU. Engineering Sciences)*, 6. (in Rus)
3. Ritter H. & Martinetz T. & Schulten K. (1992). *Neural Computation and Self-Organizing Maps. An Introduction*. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing.
4. Horodnych O. & Scherbyna Yu. (2003). Self-organizing neural network and its application for data classification. *VISNYK L'VIV. Ser. prykl. matem. inform. (VISNYK LVIV UNIV. Ser. Appl. Math. Comp. Sci)*, 7, 234-247. (in Ukr)
5. Hajkin S. (2006). *The complete course of neural networks*. Moscow: Vil'jams. (in Rus)
6. Sun M. Liu T. Chang H. (2002). Improving the Self-Organizing Feature Map Algorithm Using an Efficient Initialization Scheme. *Tamkang Journal of Science and Engineering*, 5(1), 35-48.
7. Hasan S. (2011). *Multistrategy Self-Organizing Map Learning for Classification Problems*. Retrieved from <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3157650/>.
8. *Docker Swarm overview*. (n.d). Retrieved from <https://docs.docker.com/swarm/overview/>.

**VOIEVODIN Yevhenii,**

The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, PhD-student

#### **COMPARISON OF THE EFFICIENCY OF DISTRIBUTION STRATEGIES BASED ON SELF-ORGANIZING KOHONEN MAPS IN VIRTUAL CONTAINERS ORCHESTRATION SYSTEMS**

**Abstract.** *The paper starts from the description of the basic functions of orchestration systems, including distribution of dynamic virtual containers sequence. The positive and negative aspects of existing containers distribution strategies are discussed next. Recent studies and publications mention inefficiency of existing distribution strategies and describe alternative methods that can be used to optimize them. These methods include self-organizing maps.*

*The paper covers a detailed overview of the structure of Kohonen maps and the main stages of their work, which are: initialization, competition, cooperation and adaptation. The author describes detailed map configuration options for each of the stages, such as different initialization approaches, different influence functions and their parameters. Then the author defines the algorithm for distributing containers between nodes in a cluster based on self-organized maps.*

*Also, the article covers two types of experiments, they are: packing cluster until the first packing request is rejected and packing cluster until it is full. The first one demonstrates in how many cases, the differently configured strategies, will pack more containers for the same dynamic sequence. The second experiment shows the average number of containers that can be packed. The experiment is done for the same dynamic sequences; differently configured strategies try to fill up dedicated clusters until they are full. As a result experiments show that strategies based on self-organizing maps behave differently in case different map configurations are used. So, for instance, using the Gaussian influence function is more efficient for small clusters, while using the constant influence function is more efficient for large clusters. The findings can be used to develop more efficient methods using artificial neural networks.*

**Key words:** *distribution, balancing, self-organizing Kohonen map, artificial neural networks, virtualization, container, orchestration system.*

*Стаття надійшла 10.04.2017  
Прийнято до друку 29.05.2017*

УДК 004.77 519.2

PACS: 84.35.+i, 84.40.Ua

ДЄЄВ Костянтин Сергійович  
Черкаський національний університет  
імені Богдана Хмельницького,  
викладач кафедри автоматизації та  
комп'ютерно-інтегрованих технологій  
e-mail: kostic2006@ukr.net

## МОДЕЛЮВАННЯ АБСТРАКТНОГО МЕРЕЖЕВОГО ПАКЕТНОГО ФІЛЬТРА З МОЖЛИВІСТЮ КЛАСИФІКАЦІЇ ОДНОРАНГОВОЇ ВЗАЄМОДІЇ

**Анотація.** У роботі розглянуто модель абстрактного мережевого пакетного фільтра який дозволяє проводити класифікацію однорангової взаємодії виду точка-точка. Модель відповідає математичного опису, апроксимованого за допомогою полінома представлення пакетного заголовку та протокольних повідомлень мережевого рівня. З використанням апарату методу групового врахування аргументів (МГВА) розроблено модель абстрактного мережевого пакетного фільтра з можливістю класифікації однорангової взаємодії. Метою даної роботи є створення гнучкої абстракції функцій типового мережевого фільтра в умовах переважаючого в глобальних мережах типу трафіку. В роботі наведено модифікації алгоритму МГВА, проведена оптимізація вибору ключових вхідних параметрів, зокрема при формуванні шару класифікації та вибору масиву вхідної тестової послідовності.

**Ключові слова:** класифікація трафіку, мережевий фільтр, однорангова взаємодія, якість обслуговування в пакетних мережах.

### Вступ

Необхідність проведення пакетної обробки на високих швидкостях виникає внаслідок зростання попиту на доступ до мережі Інтернет загалом, зокрема, за допомогою бездротових мобільних пристроїв. Проведення моніторингу такої активності має чіткі переваги – можна приблизно оцінити напрямок розвитку окремої технології, щоб в майбутньому спрогнозувати необхідну ємність для розширення зовнішніх каналів зв'язку [1]. Застосування таких пристроїв як NAT чи IDS робить їх центральними сервісними елементами пакетної мережі, оскільки за умовами їх режиму роботи весь трафік має проходити через них. Створення ефективної моделі взаємодії однорангових додатків дозволить встановлювати класифікатори мережевого трафіку не лише як апаратні системи аналізу трафіку, але й як програмні комплекси пост-обробки перехопленого трафіку [2]. Деякі системи мережевого моніторингу та систем мережевої безпеки обробляють набір пакетів як одне ціле, залежно від типу протоколу корисного навантаження верхнього рівня, базуючись на інформації, яка була отримана з пакетних заголовків.

### 1. Моделювання однорангової взаємодії в глобальних мережах

В той час коли існує велика кількість рішень від відомих розробників апаратних мережених пристроїв, розробники відкритих систем стикаються зі труднощами, пов'язаними з необхідністю проводити оптимізації у програмному забезпеченні для досягнення достатньої швидкодії або через дефекти у реалізації апаратних схем мережених адаптерів, які використовуються для аналізу мережевого трафіку [3]. Деякі дослідники скаржаться, що зростання швидкості підключення не відповідає закону Мура, інші стверджують, що запропоновані швидкості здебільшого не використовуються масово.

Суттєвою перевагою МГВА є однозначність інтерпретованих даних і зв'язків в коротких вибірках спостережень, тоді як мінімум критерію вказує на оптимальну наближену модель з більш простою структурою і підвищеною точністю у порівнянні до

структури імітаційної моделі. Слід зазначити, що за допомогою МГВА можуть бути отримані лише наближені моделі. З використанням апарату методу групового врахування аргументів (МГВА) розроблено модель абстрактного мережевого пакетного фільтра з можливістю класифікації однорангової взаємодії типу точка-точка. Модель тотожна поняттю математичного представлення, апроксимованого за допомогою полінома опису пакетного заголовку та протокольних повідомлень мережевого рівня. За своєю структурою алгоритм МГВА можна охарактеризувати як підхід у навчанні порядкових систем ідентифікації зображень, що загалом реалізують за допомогою перцептронів чи нейромереж. Основною відмінністю багат шарового алгоритму МГВА є оперування з неперервними змінними (саме такою варіативністю характеризується мережевий трафік та однорангова взаємодія). За своєю точністю такий підхід з перцептронами в нейромережах не поступається поліноміальним алгоритмам МГВА, при наявності достатньо довгої тренувальної навчальної вибірки, низької дисперсії хибних спрацьовувань та великій кількості рівнів класифікаційних шарів[4]. Як вже було зазначено, лише неперервні змінні дозволяють визначити мінімум селективного критерію, формуючи спрощену структуру наближеної моделі. МГВА повно характеризує підвищення точності отримання наближених моделей мережевого трафіку, а у розглянутому випадку з одноранговою взаємодією та відповідною класифікацією він забезпечує найбільш ефективне використання ресурсів. МГВА використовуються в різних сферах попереднього аналізу даних та знаходження відношень, моделювання складних систем, оптимізації та прогнозуванні. Індуктивні підходи МГВА надають можливість автоматично знаходити залежності в потоках даних, вибирати оптимальну схему реалізації моделі, підвищувати точність класифікації застосованих алгоритмів, тощо. Метод складається з декількох алгоритмів для вирішення деяких специфічних завдань. В нього входить набір параметричних алгоритмів, а також алгоритми адитивних аналогій, бінарного розкладу та ймовірнісні алгоритми. Підхід самоорганізації проходить через підбір моделей, що кожного разу спрощується та на виборі наближеного розв'язку згідно з мінімумом визначеного критерію. При чому кількість шарів і нейронів в прихованих шарах, структуру, вагові коефіцієнти та інші оптимальні параметри нейромережі знаходяться автоматично. В той же час гарантується знаходження найточнішої моделі класифікації, оскільки метод не пропускає найкращого рішення під час перебору всіх варіантів [1]. В запропонованій моделі будь-які ознаки мережевої взаємодії, що можуть мати вплив на вихідний результат класифікації використовуються як вхідні параметри. Інтерпретаційні взаємозв'язки у протокольних заголовках обираються ще до аналізу даних, обираючи тим самим продуктивні вхідні змінні. Реалізований алгоритм має багат шарову структуру, завдяки чому можливе застосування паралельних обчислень для його реалізації. З попереднього рівня на наступний передається не один, а декілька кращих результатів класифікації мережевої взаємодії, що може використовуватися для підвищення точності інших моделей чи алгоритмів їх моделювання. Отримання моделі абстрактного мережевого пакетного фільтра з можливістю класифікації однорангової взаємодії типу точка-точка ділиться на кілька етапів. Етап формування починається з вибору ключових змінних, а закінчується визначенням найбільш точної моделі з переведенням її на наступний рівень класифікації.

Кількість рівнів класифікації може бути визначена за формулою (1):

$$C_N^K = \frac{N!}{K!(N-K)!} \quad (1)$$

Для формування ряду класифікації опис об'єкта  $O = f(x_1, \dots, x_n)$  замінюється кількома рядами окремих записів вигляду  $o_1 = f(x_1, x_2)$ . В нього входять всі ефективні аргументи повного опису. Вихідними аргументами наближеної моделі, що формуються при цьому виступають функції що перенесені у вищий ряд за критерієм найвищої подібності. Таким чином означені параметри наближеної моделі на першому ряді класифікації (2) використовуються і походять з матриці досліджень:

$$o_1 = f(x_1, x_2), o_2 = f(x_2, x_3), \dots, o_A = f(x_{N-1}, x_N), \text{ де } A = C_N^2. \quad (2)$$

Для опису моделей другого ряду класифікації за параметри функції “O” приймаються моделі попереднього ряду (3), що переведені на вищий ряд класифікації – “P”:

$$p_1 = f(o_1, o_2), p_2 = f(o_2, o_3), \dots, p_B = f(o_{M-1}, o_M), \quad (3)$$

де кількість класифікаційних моделей  $B$  визначається за формулою (4):

$$B = C_M^2 (C_N^2 - C_P^2). \quad (4)$$

При створенні моделей третього ряду класифікації за параметри функції “Q” приймають моделі попереднього ряду (5), що переведені у вищий шар класифікації – “O”:

$$q_1 = f(p_1, p_2), q_2 = f(p_2, p_3), \dots, q_C = f(p_{L-1}, p_L), \quad (5)$$

де кількість класифікаційних моделей  $C$  визначається за тією ж біноміальною формулою (6):

$$C = C_L^2 ((C_M^2 - C_Q^2) - (C_N^2 - C_P^2)). \quad (6)$$

Перевірка та визначення рядів класифікації для значимих параметрів визначення однорангової взаємодії зупиняється відповідно до правила зупинки (як результат, формування запису фільтра мережевої активності), що описане нижче. У першому ряді реалізована лінійна регресія, у другому ряді - квадратична регресія, у третьому - регресія 3-го ступеня і т. д. Кожна конкретна модель ідентифікованої взаємодії є функцією пари аргументів, тому вагові коефіцієнти можна легко визначити за даними навчальної послідовності за малою кількістю вузлів інтерполяції (перша ітерація). Виключаючи проміжні незв'язні змінні (друга ітерація), ми можемо отримати наближену модель зі спрощеною структурою. Ступінь подібності можна оцінити за величиною середньоквадратичної похибки (середня для всіх функцій  $f$ , які вибирають для всіх змінних у відповідному потоці даних що проходить класифікацію). Як тільки досягнутий мінімум похибки або незміщеності, ідентифікацію однорангової взаємодії необхідно зупинити. З практики, її зупинку слід провести дещо раніше від досягнення повного мінімуму, як тільки похибка класифікації почне зменшуватись повільніше. Це гарантує отримання коректних результатів класифікації. Для отримання математичного опису, як критерій селекції при використанні критерію регулярності використовують середньоквадратичну похибку, виміряну на окремій перевіірочній послідовності мережевих даних.

$$\Delta^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\varphi_i - \varphi'_i); \delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\varphi_i - \varphi'_i)}{\sum_{i=1}^N \varphi_i^2} \cdot 100\%. \quad (7)$$

Перше рівняння (7) описує абсолютну похибку на послідовності для перевірки істинності, а друге – середньоквадратичну похибку на тій же послідовності. Для розрахунку критерію незміщеності всі експериментальні точки групуються, тобто розміщуються в ряд за величиною дисперсії (8):

$$\Delta^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{(\varphi_i - \bar{\varphi}_i)^2}{\bar{\varphi}_i} \right]^2 \quad (8)$$

і діляться на дві частини: точки з парними номерами утворюють послідовність  $R_1$ , а точки з непарними – послідовність  $R_2$ . За алгоритмом МГВА після кожного ряду селекції вибирається по  $F$  рівнянь регресії виду (9):

$$\begin{aligned} \text{1-й ряд:} & \quad o = f(x_i, x_j); R_1 = N_n; R_2 = N_{n-1}; o'(r) = f(x_i - x_j) \\ \text{2-й ряд:} & \quad p = f(o_i, o_j); R_1 = M_{n-1}; R_2 = M_{n-2}; o''(r) = f(x_i - x_j) \\ \text{3-й ряд:} & \quad q = f(p_i, p_j); R_1 = L_{n-2}; R_2 = L_{n-3}; o'''(r) = f(x_i - x_j) \\ & \quad \dots \\ \text{N-ний ряд:} & \quad z = f(z'_i, z'_j); R_1 = Z_{z+1}; R_2 = Z_z; o'^z(r) = f(x_i, x_j) \end{aligned}$$

Слід зазначити про суттєві переваги алгоритму класифікації мережевого трафіку та виділення взаємодії однорангових додатків в окремий сервісний клас при застосуванні його до однорангової взаємодії. Тестова вибірка даних являє собою таблицю агрегованих пакетних заголовків мережевої взаємодії [5], яка містить  $N$  параметрів (точок) спостережень множини з  $M$  змінних. Структура тестової вибірки наступна. Третина точок належать до навчальної послідовності, а остача, що залишилася формує перевіірочну послідовність. Перед розбиттям точки впорядковуються за значенням відхилення. Навчальна послідовність використовується для визначення вагових коефіцієнтів полінома, а перевіірочна послідовність використовується для вибору структури наближеної моделі, для якої зовнішній критерій регулярності  $CR(s)$  прямує до нуля:

$$CR(s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\varphi_i - \hat{\varphi}_i(B))^2 \rightarrow 0 \quad (9)$$

Іншим варіантом може бути застосовування підходу за критерієм зустрічного контролю  $CVCR(s)$ , цей варіант бере до уваги всю інформацію з послідовності даних і може бути підрахований без перерахування всієї матриці для кожної перевіірочної точки, яка буде характеризувати особливість конкретного P2P-дodatка:

$$CVCR(s) = \frac{1}{N} \sum_1^N [\varphi_i - \varphi_i(B) \cdot ref]^2 \rightarrow \min \quad (10)$$

Для тестування моделі абстрактного мережевого пакетного фільтра з можливістю класифікації однорангової взаємодії типу точка-точка на відповідність за критерієм балансу вхідна послідовність даних поділяється на дві частини. Критерій дозволяє провести вибір моделі, яка буде строго монотонною на обох послідовностях. Критерій балансу буде знаходити єдину ефективну наближену модель, якщо її вагові коефіцієнти будуть лінійні, а вони є завжди такими у випадку однорангової взаємодії. Шари класифікації нарощуються доти, доки критерій незміщеності рішень класифікатора зменшується. Для отримання плавної перебірної кривої, яка дає змогу визначити правило зупинки перебірної процедури, повний пошук ведеться на групах моделей однакової складності. Наприклад, перший рівень може використовувати інформацію з кожної однієї колонки вибірки даних так, що повний пошук ведеться серед усіх можливих моделей виду:

$$\varphi = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_j + \dots + a_N x_z, \text{ де } i = 1, 2, \dots, M. \quad (11)$$

Нелінійні функції можуть бути враховані як нові вхідні параметри у послідовності даних. Вихідні параметри визначається наперед та залежить від сервісного профілю мережевого трафіку досліджуваної мережі. На наступному рівні перебираються всі виявлені наближені моделі у відповідності зі схемою зображеною на рис. 1:

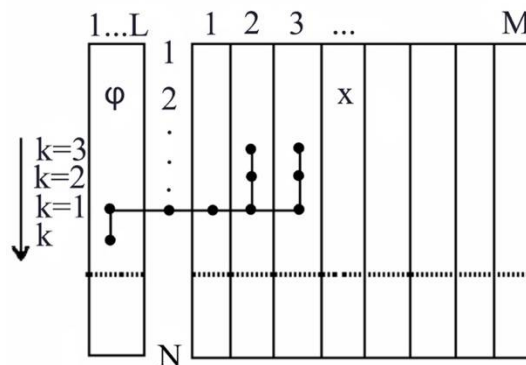


Рис. 1. Схема перебору нелінійних змінних у вхідній вибірці заголовків

Моделі оцінюються на відповідність за критерієм, доки значення критерію зменшується. Для обмеження часу обчислень пропонується під час повного перебору моделей впорядковувати змінні відповідно до значень критерію  $CR(s)$ , після деякого часу обчислень або кількох рівнів ітерації.

На рис. 2 зображено процес уточнення моделі магістрального каналу зв'язку на основі заголовків IP за допомогою використання альтернативних засобів аналізу мережевої взаємодії [6], а саме: використання оптимальних форм часткових описів для визначення дискримінаційного критерію. Процедура повного перебору продовжується до вибраної множини кращих змінних, поки мінімальне значення зовнішнього критерію  $CVCR(s)$  не буде знайдене. Це дає можливість задавати значно більшу кількість змінних на вході та зберегти ефективні змінні між рівнями для знаходження оптимальної моделі. Результатом такого моделювання є модель оптимальної складності, яка для трафіку комп'ютерної мережі загального призначення та

однорангової взаємодії, може ідентифікувати такий обмін та віднести його до відповідного сервісного класу.

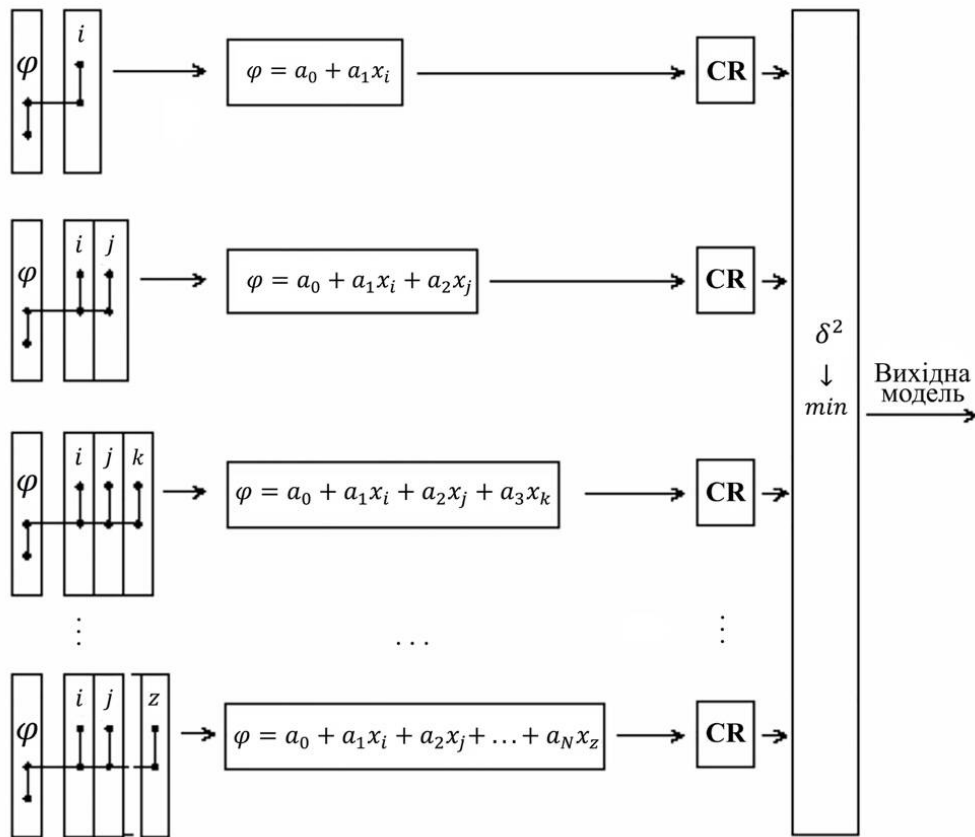


Рис. 2. Визначення оптимальної моделі класифікації мережових пакетів за МГВА

## 2. Задача створення гнучкого мережевого класифікатора пакетів

Задача пакетного фільтра [7] – допомогти класифікатору обрати ті пакети, які відповідають деякому сформованому наперед відношенню із мінімальним системним навантаженням. Він має спрощувати обробку пакетів абстрагуючись від складнощів реалізованого апаратного та програмного забезпечення. Підтримка повного набору додатків має відбуватись без огляду цілей, для яких необхідна статистика по пакетах, що надходять. Обмеження деякими типами пакетів не є вдалою ідеєю. Системи, які є наразі у відкритому доступі засновані на використанні бібліотеки PCAP, не є достатніми у цьому відношенні. Основною задачею є створення гнучкої системи пакетної класифікації системи для широкого спектру застосування, і в окремому випадку, для гарантування якості сервісу для абонентів бездротових мереж третього покоління. За основні метрики було обрано пропускну здатність та простоту використання й інтеграції з існуючими системами аналізу та обробки. Проблеми, які було вирішено у розрізі покращення пропускну здатності та отримані висновки мають важливе значення для розробників, які у подальшому планують проводити дослідження комплексів пакетної обробки. Запропоноване поняття об'єднаного потоку вигідно використовувати як абстракцію рівня ядра для пакетної обробки. На відміну від раніше відомих визначень потоку (*TCP flow*, *Cisco NetFlow*, *IPFix*), об'єднаний потік [5] – це набір мережових пакетів, що підпадають під правила, сформовані адміністратором. Наприклад, такому групуванню можуть відповідати усі пакети, портом призначення

яких, є порт 80 протоколу TCP зі встановленим значенням SYN параметра TCP-заголовка та мультимедійне навантаження з негарантованою доставкою UDP і протоколом верхнього рівня RTP. Схематично класифікацію зображено на рис. 3.

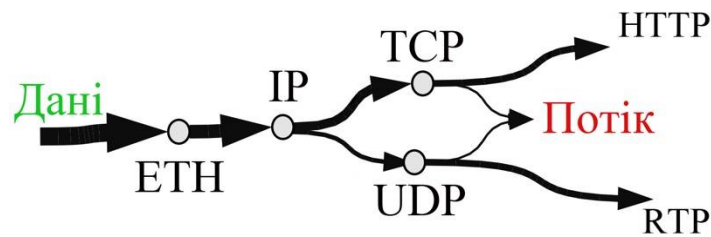


Рис. 3 Класифікація на основі потоку

Кожен потік даних після проходження функціональної обробки (наприклад, фільтрація, постановка в чергу, підрахунок) формує структуру, яка називається *flowgraph* – граф потоку. Якщо необхідно, у гілках графа може відбуватися модифікація пакета (функціонал приховування чи трансляції NAT). Треба зазначити, що поняття потоку [8] досить часто використовується у галузі мережевої взаємодії. Системи обробки пакетів дозволяють проводити над пакетами ряд маніпуляцій, групуючи їх у ланцюжки, але водночас мають можливість отримання додаткової інформації у відповідності до результату, отриманому на попередньому кроці [2]. Найяскравішими прикладами таких структур в ОС Linux є Netfilter/iptables.

#### Висновки

У роботі розглянуто спосіб моделювання пакетного мережевого фільтру, який може бути застосований для класифікації однорангових взаємодій. Створена абстрактна модель отримана під час реалізації гнучкої системи класифікації мережевих пакетів може використовувати як допоміжний елемент забезпечення якості обслуговування в комп'ютерній мережі. Застосовуючи операцію перевірки збігу за регулярним виразом, стає можливим розподіл пакетного навантаження та паралельне виконання функцій пошуку. Результатом роботи є визначення та створення моделі оптимальної складності, яка головним чином застосовна до трафіку комп'ютерної мережі загального призначення та однорангової взаємодії. Задача класифікації мережевих пакетів з виконанням частини функцій по ідентифікації має важливе практичне значення, оскільки дозволяє побудувати масштабовану систему класифікації пакетів, яка може ідентифікувати інформаційний обмін та віднести його до відповідного сервісного класу при обмеженому апаратному чи програмному забезпеченні.

#### Список використаної літератури:

1. Narang A., Williamson C. A longitudinal study of P2P traffic classification // IEEE Commun. Mag., Baltimore, MD, USA, July/Aug., 2011. Vol. 27. P. 141–148.
2. Karagiannis, T. Should Internet service providers fear peer-assisted content distribution /T. Karagiannis, P. Rodriguez //International Conf. on emerging Networking EXperiments and Technologies (CoNEXT '08). - San Jose, CA, USA, Jan., 2008, Vol. 16. P. 313-326.
3. Yu F. High speed deep packet inspection with hardware support // Passive and Active Measurement Conf. (PAM 2005). Mineapolis, USA, 2006. Vol. 10. P. 325–328.
4. Sen S., Patsche O. D., Wang Y. Accurate, scalable in-network identification of P2P traffic using application signatures // IEEE Network Operations and Management Symposium (NOMS 2008). Taormina, Sicily, Italy, Oct., 2007. Vol. 22. P. 219–232.
5. Sen S., Wang J. Analyzing peer-to-peer traffic across large networks // Networking, IEEE/ACM Transactions. St. Petersburg, Russia, Sept., 2012. Vol. 14. P. 219–232.
6. Constantinou F., Mavrommatis P. Identifying known and unknown peer-to-peer traffic // 5th IEEE International Symposium on Network Computing and Applications (NCA '11). Madrid, Spain, Dec., 2011.

Vol. 10. P. 25–30.

7. Олифер В. Г., Олифер Н. А. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы: учебник для вузов. 3-е изд., 2006. 958 С.
8. Duffield N., Lund C., Thorup M. Estimating flow distributions from sampled flow statistics // IEEE/ACM Trans. Netw., Antibes Juanles-Pins, France, Apr., 2013. Vol. 16. P. 933–946.

#### References:

1. Narang A. & Williamson C. (2011). A longitudinal study of P2P traffic classification. IEEE Commun. Mag. Baltimore, USA. 27. 141–148.
2. Karagiannis T. & Rodriguez T. (2008). Should Internet service providers fear peer-assisted content distribution. Conf. on emerging Networking Experiments and Technologies (CoNEXT '08). California, USA. 16. 313–326.
3. Yu F. (2006). High speed deep packet inspection with hardware support. Passive and Active Measurement Conf. (PAM 2005). Mineapolis, USA. 10. P. 325–328.
4. Sen S. (2007). Accurate, scalable in-network identification of P2P traffic using application signatures. IEEE Network Operations and Management Symposium (NOMS 2008). Sicily, Italy. 22. 219–232.
5. Sen S. & Wang J. (2012). Analyzing peer-to-peer traffic across large networks. Networking, IEEE/ACM Transactions. St. Petersburg, Russia. 14. 219–232.
6. Constantinou F. & Mavrommatis P. (2011). Identifying known and unknown peer-to-peer traffic. 5th IEEE International Symposium on Network Computing and Applications (NCA '11). Madrid, Spain. 10. 25–30.
7. Олифер В. & Олифер Н. (2006). Computer Networks: Principles, Technologies and Protocols for Network Design. Wiley. 958. (in Rus)
8. Duffield N. & Lund C. & Thorup M. (2013). Estimating flow distributions from sampled flow statistics. IEEE/ACM Trans. Netw. Antibes Juanles-Pins, France. 16. 933–946.

#### DIEIEV Kostiantyn,

The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, a lecturer of chair of automation and computer-integrated technologies

#### MODELING OF ABSTRACT NETWORK PACKET FILTER WITH ABILITY TO CLASSIFY PEER TO PEER TRANSFERS

**Abstract. Introduction.** *The paper considers the model of the abstract network packet filter that allows us to examine the classification of a peer-to-peer interaction with point-to-point type. The model corresponds to the mathematical description approximated by the polynomial representation of the packet header and protocol communications of the network layer. Using the apparatus of the group method of data handling (GMDH) a model of abstract network packet filter with the possibility of classification of peer-to-peer interaction was developed. The work includes modifications to the GMDH algorithm, optimization of the choice of key input parameters, in particular in the formation of a selection series and selection of an input sample array. The need for batch processing at high speeds is due to increased demand for access to the Internet in general, in particular, with the help of wireless mobile devices. The monitoring of such activity has clear advantages - one can roughly estimate the direction of the development of a separate technology in order to predict in the future the necessary capacity for the expansion of external communication channels. The use of such devices as NAT or IDS makes them the central service elements of the packet network, since under their operating conditions all traffic should pass through them. Creating an effective peer-to-peer interaction model will allow classifiers of network traffic to be set up not only as hardware traffic analysis systems, but also as post-processing software for intercepted traffic. Some network monitoring and network security systems process a set of packets as a single entity, depending on the type of payload protocol of the upper level, based on the information received from the packet headers.*

**Purpose.** *The purpose of this work is to create a flexible abstraction of the functions of a typical network filter for conditions of prevailing peer-to-peer interaction in global networks, the goal is to have flexible traffic classification. Analyze factors that influence complexity of defined model and provide optimal selection of input fields it's depends on.*

**Results.** *System for identifying network packets allows us to build a scalable packet classification system that can split information exchange and assign it to the appropriate service class with limited hardware or software.*

**Conclusion.** The paper discusses how to model a packet network filter that can be used to classify peer-to-peer interactions. Created abstract model obtained during the implementation consists of flexible classification system for network packets and can be used as an auxiliary element for quality of service in the computer networks. Applying the regular expression check operation allows the batch load distribution and parallel execution of the search functions. The result of this was definition and creation of model with optimal complexity, which is mainly applicable to the traffic of the general-purpose computer network and peer-to-peer interaction.

**Key words:** traffic classification, network filter, peer-to-peer interaction, quality of service in packet networks.

Стаття надійшла 27.04.2017

Прийнято до друку 29.05.2017

УДК 378.147:004.25(07)

PACS 01.50.H-; 01.40.G-; 01.40.Ha; 01.50.H-;  
01.50.hv

**ГРИШКО Людмила Вениаминовна**  
Черкаський національний університет  
імені Богдана Хмельницького, к.п. н.,  
доцент кафедри прикладної математики і  
інформатики  
e-mail: from4lu@gmail.com

## О ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ АСПЕКТАХ ОБУЧЕНИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

**Аннотация.** В статье рассматриваются психологические закономерности приема и обработки информации, функционирование психических приемов памяти и мышления у программиста, особенности развития личности студента в процессе обучения, существующие подходы к познавательной деятельности студентов.

Рассмотрены способы взаимодействия компонентов памяти, которые используются в работе программиста и к которым относят кратковременную память, долговременную память, рабочую память. Также описаны синтаксические и семантические аспекты, существующие в программировании.

В программировании важной составляющей является понимание программистом внутренней семантической структуры программы. В связи с этим автор рассматривает этот аспект процесса обучения студентов основам программирования. Также автором рассмотрены проблемы сложности содержания учебного материала и его объема.

Автор полагает, что акцентирование внимания на обозначенных аспектах в процессе обучения студентов основам программирования способствуют развитию и формированию профессиональных качеств будущих программистов.

**Ключевые слова:** учебно-познавательная деятельность студента, развитие личности студента, основы программирования, программист, психология программирования, компоненты памяти, семантические и синтаксические знания, содержание учебного материала.

### Введение

Психологи различают два основных вида деятельности, связанные с познавательными процессами человека – *учение* и *обучение*. Согласно [1], "учение - целенаправленный процесс усвоения учащимися знаний, овладение умениями и навыками", "обучение – целенаправленный процесс передачи и усвоения знаний, умений, навыков и способов познавательной деятельности человека".

Польский ученый Ч. Куписевич считает, что обучение детерминировано целью, содержанием и действиями, с помощью которых субъект учится, приобретает

определенные знания, умения и навыки. Обучение разворачивается в результате собственной активности субъекта и носит, главным образом, процессуальный характер. Оно может протекать в различных формах, базируется на познании (прямом или косвенном) и индивидуальном опыте, вызывает изменения в поведении личности [2].

Различают две основные направленности процесса обучения: обучение понятиям и формированию умений (навыков) [3]. При обучении понятиям основное внимание уделяется представлению и разъяснению нового концептуального и фактического учебного материала: определению понятий, описания их свойств и отношений, обобщам и развернутому описанию процессов и т.п. При формировании умений главное внимание уделяется созданию проблемных ситуаций, которые повторяются и постепенно усложняются и требуют от студента выполнения определенных действий.

С другой стороны, Л. Фридман [4] выделяет следующие этапы учебной деятельности:

1) начально-мотивационный, который содержит следующие основные учебные действия:

- а) осознание учащимся основной учебно-проблемной ситуации, которая вводит его в предмет будущей работы по изучению учебного материала;
- б) формулировка основного учебного задания;
- в) самоконтроль и самооценка возможностей предстоящей деятельности по изучению учебного материала;

2) операционально-познавательный, на котором учащийся изучает учебный материал, овладевает знаниями, умениями и навыками в процессе выполнения основного учебно-познавательного задания;

3) контрольно-оценивающий, на котором учащийся обобщает изученный учебный материал, проводит корректировку ошибочных действий, анализирует работу, которая выполнена, оценивает свою деятельность в целом.

### **Основная часть**

Условием успешного обучения в вузе есть интерес студентов к учебному предмету, ходу обучения и его результату. Этот интерес связан со многими факторами: содержанием учебного предмета, уровнем его сложности; организацией процесса обучения; системой контроля и оценки знаний; личностными качествами самого преподавателя; системой ценностей студента, его ближайшего окружения; взаимоотношениями в студенческом коллективе. Поэтому одной из важных задач педагогики высшей школы является активизация учебно-познавательной деятельности студентов ([5], [6] и др.). При этом целенаправленная деятельность преподавателя должна быть направлена на разработку и использование такого содержания, форм, методов, приемов и средств обучения, которые способствуют повышению познавательного интереса, активности, творческой самостоятельности студентов в усвоении знаний, формировании навыков и умений, применении их на практике [7]. В курсе по основам программирования творческий подход студентов к учебной деятельности формируется путем привлечения их к решению различных, постоянно усложняющихся, задач на лабораторных занятиях, во время самостоятельной работы, при подготовке рефератов и докладов, при выполнении курсовых работ, разработке коллективных проектов.

Точкой отсчета начала повышенного интереса психологов к программированию является выход первого издания книги Вейнберга "The Psychology of Computer Programming" более 30 лет назад. Предметом исследования психологии программирования является деятельность программиста, психологические закономерности приема и обработки информации, функционирование психических

приемов памяти и мышления у программиста, его работоспособности, вопросы профессионального отбора.

В исследованиях J.G. Greeno [8], которые основаны на информационном подходе к психологии обучения, запоминания и решения задач, предложена схема взаимодействия компонентов памяти, которые используются в работе программиста и к которым относят кратковременную память, долговременную память, рабочую память. Согласно этому исследованию, постановка задачи (проблемы), которая должна быть запрограммирована, поступает в кратковременную память, в которой заранее анализируются сведения, поступившие предложения. В долговременной памяти находятся знания синтаксиса языка, методов построения алгоритмов, описания структур данных и т.п. В рабочей памяти сведения из кратковременной и долговременной памяти объединяются в новые структуры. В процессе решения задачи, т.е. генерации программы, новые сведения, хранящиеся в краткосрочной и долгосрочной памяти и понятия, относящиеся к проблеме, объединяются в рабочей памяти, а результат используется для генерации решения или, в случае обучения, запоминаются в долговременной памяти для дальнейшего использования. Как отмечено в [9]: "Хорошие программисты всегда немножко ленивы. Они сидят и ждут озарения, вместо того, чтобы воплощать в жизнь идею, что первой пришла им в голову". Это происходит благодаря тому, что опытный программист сохраняет в памяти сложные многоуровневые знания о понятиях и методах программирования и в процессе осмысления задачи определяет, какие из этих знаний следует применить. Часть этих знаний называют семантическими знаниями [10]. Эти знания относятся к общим для программирования понятиям и не связанным с конкретным языком программирования. К семантическим знаниям относят определение понятий нижнего уровня, например, как хранятся данные в памяти компьютера, как работает оператор ветвления, как происходит вызов подпрограммы, какие бывают типы данных. К ним относятся определения понятий среднего уровня, например, обмен значений двух переменных, алгоритм поиска большего из двух значений, а также более сложные алгоритмы, такие как алгоритмы сортировки, бинарный поиск, обход бинарного дерева поиска т.п. Эти знания хранятся в виде общих содержательных фреймов, в значительной степени не зависящих от знаний синтаксиса конкретных языков программирования или средств программирования, таких как пакеты подпрограмм или среды программирования.

В долговременной памяти сохраняются и синтаксические знания. Эти знания более конкретные и подробные, а потому легче забываются по сравнению с семантическими знаниями. К синтаксическим знаниям относятся такие элементы как синтаксис оператора присваивания, ветвления, повторения; зарезервированные слова; имена библиотечных функций и стандартных модулей.

Программистам, психологам и педагогам известно, что обычно трудно изучить первый язык программирования, а второй подобный изучить относительно легко потому, что легче выучить новое синтаксическое представление, если уже известна соответствующая семантическая структура.

Б. Шнейдерман указывает на различия между семантическими и синтаксическими знаниями в долговременной памяти программиста. Семантические знания содержатся в процессе, который является интеллектуальной потребностью осмысленного обучения, включая решение задач и изучения учебной литературы (учебников, справочников), что помогает закрепить новые понятия совместно с имеющимися семантическими знаниями. Синтаксические знания носят инструктивный характер, заучиваются механически и не очень пересекаются с уже имеющимися системами семантических знаний. Получению новых синтаксических знаний могут препятствовать полученные

ранее синтаксические знания, поскольку происходит добавление новых сведений, а не их интеграция. Исследования психологов подтверждают, что при изучении новых языков программирования программисты очень легко понимают семантику основных конструкций языка, но часто ошибаются при кодировании. Наш опыт работы показывает, что, например, студенты, уже имеющие опыт написания программ на языке Pascal, при программировании на языке C не ставят точку с запятой перед служебным словом "else" в операторе ветвления и не обращают внимание на различия идентификаторов, в которые входят одинаковые символы (буквы алфавита) в одной и той же последовательности, но в разных регистрах (строчные и прописные).

Исследователи предполагают, что процесс написания программы решения поставленной задачи состоит из двух фаз. На первой фазе сведения об условиях задачи поступают в систему мышления программиста и через кратковременную память попадают в рабочую память, где они анализируются. Аналогично из долговременной памяти программиста пересылаются обобщенные сведения (семантические и синтаксические) для дальнейшего анализа задачи. На второй фазе, при построении общего плана решения задачи, происходит ее пошаговое уточнение. Сначала решение задачи представляется в обобщенных терминах. Затем это представление развивается в более подробные планы до генерации конкретных кодов, отражающих самые мелкие детали.

Одной из характеристик профессиональных качеств программиста является понимание программ. Понимание программ необходимо при отладке и при модификации программ, а также при обучении. Б. Шнейдерман в своих исследованиях предполагает, что для понимания программы программист строит многоуровневую внутреннюю семантическую структуру, используя свои знания синтаксиса языка программирования. На самом высоком уровне программист должен понимать, какая задача решается с помощью программы. На более низких семантических уровнях программист может понимать знакомые последовательности операторов. Возможна ситуация, когда программист может понять детали нижнего уровня, не понимая общей задачи. "Главное заключается в том, что программисты производят внутреннюю семантическую структуру для представления синтаксиса программы, но не запоминают и не понимают программу как последовательность строк" [10]. Процесс запоминания, с помощью которого программист превращает программу во внутреннюю семантическую структуру, имеет "кусовой" характер [11]. Вместо того, чтобы разбирать программу символ за символом, программист распознает назначения групп операторов, затем собирает эти фрагменты вместе для формирования более крупных фрагментов, пока не будет понятна вся программа. Потому что внутренняя семантическая структура программы разрабатывается самым программистом, эти знания не быстро забываются и доступны для различных целей: использование других структур данных для решения задачи, написание программы решения задачи на другом языке программирования, разъяснения назначения программы кому-либо.

В процессе обучения будущих программистов также существуют синтаксические и семантические аспекты. Так, в курсах обучения второго или третьего (не первого) языка программирования одной парадигмы основное внимание уделяется синтаксическим аспектам семантических понятий. Курсы по разработке и анализу алгоритмов сосредоточены на семантических знаниях.

Согласно [10], семантические и синтаксические знания разделены. Многоуровневые семантические знания, полученные в основном благодаря целенаправленному обучению, находят свое воплощение в многоуровневом методе разработки внутренней семантики для некоторой конкретной задачи. Относительные синтаксические знания, приобретенные в основном благодаря механическому

заучиванию, полностью ограничены языком программирования. Семантические знания необходимы для анализа задачи, в то время как синтаксические знания используются на этапах кодирования и исполнения.

Многие ученые (Ю.И. Машбиц, Н.Ф. Талызина и др.) подчеркивают недопустимость возведения учебных целей только к усвоению предметных знаний и умений. На их взгляд в систему целей необходимо включать умение учиться. Мы полностью поддерживаем эту точку зрения и в этом контексте считаем, что в процессе обучения программированию надо определить систему задач, с помощью которой можно будет сформировать у студентов знания, умения и навыки, необходимые для их дальнейшего обучения и в следующей профессиональной деятельности. Система задач по программированию как средство обучения является одним из важнейших компонентов методического обеспечения в обучении основам программирования [12].

### **Заключение**

Для обеспечения успешного обучения программированию необходимо решить вопрос о сложности содержания учебного материала и его объеме. Содержание учебного материала, с одной стороны, должен быть максимально приближенным к современному уровню развития компьютерных наук, с другой стороны, должно быть доступным студентам. Также надо систематизировать и определить последовательность его преподавания. Важно определить степень сложности учебного материала, так как слишком упрощенное или слишком сложное содержание ведут к снижению интереса и познавательной активности студентов в процессе обучения. Объем учебного материала не должен быть чрезмерным, чтобы не перегружать студентов в процессе обучения.

Так же важным является определение необходимого количества заданий для овладения учебным материалом и формирование практических умений и навыков. Ю.К. Бабанский отмечает, что "специальные исследования показали, что если придерживаться принципов систематичности и последовательности, то для формирования определенных умений и навыков достаточно выполнить пять упражнений при среднем уровне сложности учебного материала. Для определения количества упражнений в учебно-методических комплексах необходимо построение этих упражнений таким образом, чтобы на минимальном числе упражнений ученики овладевали бы общим принципом выполнения подобного рода действий" [13]. Возведение числа задач к минимуму приводит к тому, что их оказывается недостаточно для обеспечения целей обучения. С другой стороны, слишком большое количество задач ставит перед студентом непреодолимый барьер.

Отметим, что для обеспечения качественного усвоения студентами знаний по программированию следует обеспечивать не только наращивание числа исследуемых понятий, но и изучение понятий на разных уровнях детализации, научной строгости. Мы считаем, что дидактические принципы систематичности, последовательности обучения при построении курса по программированию целесообразно реализовывать в виде дидактической спирали - многократное возвращение на новом уровне [14]. Имеется в виду овладение студентами знаниями и умениями с помощью обогащения, развития и обобщения исследуемых понятий.

### **Список использованной литературы:**

1. Український педагогічний словник / [авт.-уклад. Гончаренко С.]. – Київ : Либідь, 1997. – 376 с.
2. Куписевич Ч. Основы общей дидактики: Пер. с польск. О. В. Долженко. – М.: Высш. шк., 1986. – 368 с.
3. Экспертно-обучающие системы / Петрушин В.А.; Отв. ред. А.М. Довгяло; АН УССР, Ин-т кибернетики. – Киев: Наук. думка, 1992. – С. 196.
4. Фридман Л.М. Педагогический опыт глазами психолога: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1987. – 224 с.

5. Аврамчук Л.А. Формування активної пізнавальної діяльності студентів / Аврамчук Л.А. // Педагогіка і психологія. – 1997. – № 3. – С. 122–125.
6. Іваськів І.С. Активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів на основі систем штучного інтелекту при навчанні інформатики в старшій школі: Дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / НПУ ім. М.П. Драгоманова. – К., 2000. – 250 с.
7. Слєпкань З.І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі. – К.: НТУ, 2000. – 210 с.
8. Greeno, J.G., The structure of memory and the process of problem solving, University of Michigan: Human Performance Center Technical Report 37, 1972. – p. 128.
9. Бентли Дж. Жемчужины программирования / Бентли Дж. ; [пер. с англ.]. – СПб. : Питер, 2002. – 272 с.
10. Шнейдерман Б. Психология программирования: Человеческие факторы в вычислительных и информационных системах. Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1984. – 304 с.
11. Miller, G.A., Needed: A better theory of cognitive organization, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, SMC-4, 1, (January 1974), p. 95-97.
12. Гришко Л.В. Система завдань з основ програмування як засіб підвищення якості навчання майбутніх програмістів // Інформаційні технології в освіті, науці і техніці. IV Всеукраїнська конференція молодих науковців ІТОНТ-2004. Черкаси, 2004. – С. 163-164.
13. Бабанский Ю.К. Дидактические проблемы совершенствования учебных комплексов // – М.: Просвещение, 1980. – С. 17–33.
14. Computing Curricula 2001. – [Электронный ресурс]: [Веб-сайт]. – Электронный ресурс. – Режим доступа: <http://www.computer.org/education/cc2009>– Название с экрана.

#### References:

1. Ukrainian pedagogical dictionary / [aut.-layout. Goncharenko C.]. - Kyiv: Lybid, 1997. - 376 p. (in Ukr)
2. Kupitsevich Ch. Fundamentals of general didactics: Per. from polsk O. Dolzhenko. - M.: Vyssh. Shk., 1986. - 368 p. (in Rus)
3. Experimental-teaching systems / Petrushin V.A.; Otv Ed. A.M. Dovgalo; Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Cybernetics. - Kiev: Science. opinion, 1992. - P. 196. (in Rus)
4. Friedman L.M. Pedagogical experience with the eyes of a psychologist: A book for a teacher. - Moscow: Enlightenment, 1987. - 224 p. (in Rus)
5. Avramchuk L.A. Formation of active cognitive activity of students / Avramchuk L.A. // Pedagogics and psychology. - 1997. - No. 3. - P. 122-125. (in Ukr)
6. Ivasky I.S. Activation of educational and cognitive activity of students on the basis of systems of artificial intelligence in computer science education in high school: Dis. Cand. ped Sciences: 13.00.02 / National Academy of Sciences of Ukraine M.P. Drahomanov - K., 2000. - 250 p. (in Ukr)
7. Slepkan Z.I. Scientific principles of pedagogical process in high school. - K.: NTU, 2000. – 210 p. (in Ukr)
8. Greeno, J.G., The structure of memory and the process of problem solving, University of Michigan: Human Performance Center Technical Report 37, 1972. – p. 128.
9. Bentley J. Pearls of Programming / Bentley J.; [per. with English.] - St. Petersburg: Peter, 2002. - 272 p. (in Rus)
10. Schneiderman B. Psychology of programming: Human factors in computing and information systems. Per. from English - M.: Radio and communication, 1984. - 304 p. (in Rus)
11. Miller, G.A., Needed: A better theory of cognitive organization, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, SMC-4, 1, (January 1974), p. 95-97.
12. Grishko L.V. System of tasks on the basis of programming as a means to improve the quality of training future programmers / Information technology in education, science and technology. IV All-Ukrainian Conference of Young Scientists ITONT-2004. Cherkasy, 2004. - P. 163-164. (in Ukr)
13. Babansky Yu.K. Didactic Problems of Improving Educational Complexes // - Moscow: Enlightenment, 1980. - pp. 17-33. (in Rus)
14. Computing Curricula 2001. – [Electronic resource]: [Website]. - Electronic data. - Access mode: <http://www.computer.org/education/cc2009>– Name from the screen.

#### **GRYSCHKO Liudmyla,**

The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, PhD, Senior Lecturer

#### **PSYCHOLOGICAL-PEDAGOGICAL ASPECTS OF PROGRAMMING TEACHING**

***Abstract. Introduction.** The article discusses the psychological patterns of receiving and processing information, the functioning of the mental techniques of memory and thinking by a programmer, the characteristics of the development of the student's personality in the learning process, and the existing approaches to the cognitive activity of students.*

**Purpose.** *The ways of interaction of memory components that are used in the programmer's work and which include short-term memory, long-term memory, working memory are considered. Syntactic and semantic aspects that exist in programming are also described.*

*In programming, an important component is the understanding by the programmer of the internal semantic structure of the program. In this regard, the author considers this aspect of the process of teaching students the basics of programming. The author also examined the problem of complexity of the content of educational material and its volume.*

**Results.** *The author believes that focusing on these aspects in the process of teaching students the basics of programming contribute to the development and development of professional skills of future programmers.*

**Key words:** *educational and cognitive activity of a student, development of a student's personality, basic programming, programmer, programming psychology, memory components, semantic and syntactic knowledge, content of educational material.*

*Стаття надійшла 05.09.2017*

*Прийнято до друку 30.10.2017*

## ЗМІСТ

### СЕКЦІЯ «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

В. І. Гук, А. І. Стеценко

МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧНОЇ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ У ПАВЕРЛІФТИНГУ  
ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ НАЙКРАЩИХ АТЛЕТІВ ЗА ЗАГАЛЬНОЮ ОЦІНКОЮ 3

В. В. Морозович, А. Р. Гонда, Ю. О. Ляшенко

ЗАСТОСУВАННЯ ПОПЕРЕДНЬОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ ІЗ  
РАСТРОВОГО ЕЛЕКТРОННОГО МІКРОСКОПА ДЛЯ ПОКРАЩЕННЯ  
ІДЕНТИФІКАЦІЇ СТРУКТУРНИХ ЕЛЕМЕНТІВ 15

А. С. Талімончик, Н. О. Красношлик

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА  
ДОПОМОГОЮ МЕТОДІВ РОЙОВОГО ІНТЕЛЕКТУ 25

О. Д. Станіна

КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ В ОДНОМУ КЛАСІ НЕПЕРЕРВНИХ  
БАГАТОЕТАПНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН 38

П. В. Лукьянов

СНИЖЕНИЕ ВВИ-ШУМА РОТОРА ВЕРТОЛЁТА С ПОМОЩЬЮ  
ЛОПАСТИ С ДВОЙНЫМ ИЗГИБОМ 50

Б. П. Головня

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В  
ПРИСТЕННОЙ ОБЛАСТИ ТУРБУЛИЗИРОВАННОГО ПОГРАНИЧНОГО  
СЛОЯ 64

Б. П. Головня, В. В. Хайдуров

ДЕЯКІ ШВИДКІСНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ ОБЕРНЕНИХ  
ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ 71

### СЕКЦІЯ «ІНФОРМАТИКА»

Є. В. Воєводін

ПОРІВНЯННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ СТРАТЕГІЙ РОЗПОДІЛЕННЯ З  
ВИКОРИСТАННЯМ САМООРГАНІЗАЦІЙНИХ КАРТ КОХОНЕНА В  
СИСТЕМАХ ОРКЕСТРУВАННЯ ВІРТУАЛЬНИХ КОНТЕЙНЕРІВ 91

К. С. Деєв

МОДЕЛЮВАННЯ АБСТРАКТНОГО МЕРЕЖЕВОГО ПАКЕТНОГО  
ФІЛЬТРА З МОЖЛИВІСТЮ КЛАСИФІКАЦІЇ ОДНОРАНГОВОЇ  
ВЗАЄМОДІЇ 101

Л. В. Гришко

О ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ АСПЕКТАХ ОБУЧЕНИЯ  
ПРОГРАММИРОВАНИЮ 109

## CONTENTS

### APPLIED MATHEMATICS SECTION

V. I. Guk, A. I. Stetsenko

|                                                                                                                               |   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| METHOD OF MATHEMATICAL PROCESSING OF RESULTS IN<br>POWERLIFTING FOR DETERMINING THE GREATEST ATHLETES IN THE<br>OVERALL SCORE | 3 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|

V. V. Morozovych, A.R. Honda, Y. O. Lyashenko

|                                                                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| THE APPLICATION OF PREVIOUSLY PROCESSED IMAGES FROM<br>SCANNING ELECTRON MICROSCOPE FOR IMPROVING<br>IDENTIFICATION OF STRUCTURAL ELEMENTS | 15 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

A. S. Talimonchyk, N. O. Krasnoshlyk

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| SOLVING ENGINEERING CONSTRAINED OPTIMIZATION PROBLEMS<br>WITH SWARM INTELLIGENCE METHODS | 25 |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|

O. D. Stanina

|                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| OPTIMALITY CRITERION IN ONE CLASS OF CONTINUOUS<br>MULTISTAGE OPTIMAL PARTITION SETS PROBLEMS | 38 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|

Petro V. Lukianov

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| HELICOPTER ROTOR BVI -NOISE REDUCTION BY TWICE-BENT BLADE | 50 |
|-----------------------------------------------------------|----|

B. P. Golovnya

|                                                                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| CALCULATION OF THE DISTRIBUTION OF THE TURBULENCE ENERGY<br>IN THE WALLED TURBULIZED BOUNDARY LAYER INTRODUCTION | 64 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

B. P. Golovnya, V. V. Haydurov

|                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| SOME HIGH-SPEED METHODS FOR SOLVING NONLINEAR INVERSE<br>HEAT CONDUCTION PROBLEMS | 71 |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|

### INFORMATICS SECTION

V. V. Voievodin

|                                                                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| COMPARISON OF THE EFFICIENCY OF DISTRIBUTION STRATEGIES<br>BASED ON SELF-ORGANIZING KOHONEN MAPS IN VIRTUAL<br>CONTAINERS ORCHESTRATION SYSTEMS | 91 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

K. S. Deev

MODELING OF ABSTRACT NETWORK PACKET FILTER WITH ABILITY  
TO CLASSIFY PEER TO PEER TRANSFERS 101

L. V. Gryshko

PSYCHOLOGICAL-PEDAGOGICAL ASPECTS OF PROGRAMMING 109  
TEACHING

# ВІСНИК ЧЕРКАСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія  
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА. ІНФОРМАТИКА  
№ 1-2 (2017)

Відповідальний за випуск:  
*Головня Б.П.*

Відповідальний секретар:  
*Гришко Л.В.*

Літературний редактор:  
*Головня Б.П.*

Комп'ютерна верстка  
*Гришко Л.В.*

Підписано до друку 20.12.2017  
Формат 60x84/8. Гарнітура Times.  
Папір офсетн. Умовн. друк. арк. 13,86.  
Друк цифров. Наклад 300 прим.

 Це видання надруковано на папері  
із деревини відповідної нормам  
екологічного лісовикористання



**Видавець ФОП Гордієнко Є.І.**

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготовників і  
розповсюджувачів видавничої продукції  
Серія ДК № 4518 від 04.04.2013 р.

Україна, 18000, м. Черкаси  
тел./факс: (0472) 56-56-12, (067) 444-28-94  
e-mail: book.druk@gmail.com