УДК 519.8 **О. А. Емец, А. О. Емец, С.В. Ванжа**

ЕВКЛИДОВЫ РАЗБИЕНИЯ И СОЧЕТАНИЯ: ИХ ДЕРЕВЬЯ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА

В статье излагается связь некоторых видов деревьев и евклидовых комбинаторных множеств сочетаний и разбиений, а также получен ряд свойств этих множеств.

Ключевые слова: *разбиения, сочетания, деревья, евклидовые комбинаторные множества.*

Введение

Исследование евклидовых множеств сочетаний и разбиений является актуальной задачей (см., например, [1-4]). При исследовании комбинаторных конфигураций используются графовые модели (см., например, [5-8], где рассматриваются графы перестановок и размещений). В [8] использовано дерево для подсчета количества элементов общего множества размещений.

Для разбиений и сочетаний авторам не известны графовые модели.

Работа посвящена связи некоторых видов деревьев и евклидовых комбинаторных множеств сочетаний и разбиений, а также получения ряда свойств этих множеств с использованием изучения этих графов.

1. Сочетания

Рассмотрим общее множество сочетаний [2]. Пусть задано мультимножество $G=\{ g_1,...,g_\eta \}$, где $\forall i \; g_i \in R^1$, с основой $S(G)=(e_1,...,e_n)$ и первичной спецификацией $[G]=(\eta_1,...,\eta_n)$. Понятно, что $\eta=\eta_1+...+\eta_n$.

Образуем неупорядоченную выборку из G: $g=\{ g_{i_1},...,g_{i_k} \}$, $k\le\eta$. Эту выборку назовем общим k-сочетанием. «Общим» – означает, наиболее общий случай, включающий сочетания без повторений (когда $\eta=n$, т.е. $\forall i \; \eta_i=1$) и случай сочетаний с повторениями (будем добавлять «неограниченными» – т.е. включительно до k одинаковых элементов в сочетании), т.е. когда $\eta_1=...=\eta_n=k$, $\eta=n\cdot k$. При условии $1\le\eta_i\le k$ имеет место общий случай.

Все такие сочетания образуют общее множество сочетаний $C^k_{\eta n}(G)$. Так как выборки в этом множестве не упорядочены, то это множество не является евклидовым комбинаторным множеством [1-3]. Введя порядок на элементы выборки $g\in C^k_{\eta n}(G)$, например, так:

$$g_{i_1}\le...\le g_{i_k}, \tag{1}$$

получаем упорядоченную k-выборку $e=(g_{i_1},...,g_{i_k})$, которую назовем общим евклидовым k-сочетанием [2]. Такие k-выборки можно рассматривать как точки евклидового арифметического пространства R^k.

Совокупность всех таких упорядоченных условием (1) k-выборок $e=(g_{i_1},...,g_{i_k})$, $g_{i_j}\in G$, $i_j\in J_\eta=\{1,2,...,\eta\}$ назовем общим евклидовым множеством k-сочетаний и обозначим $S^k_{\eta n}(G)$. (Здесь и далее J_k обозначает множество первых k натуральных чисел $J_k = \{1, 2, ..., k\}$).

При $\eta = n$ $S^k_{nn}(G)$ обозначим $S^k_n(G)$ – это евклидово множество k-сочетаний без повторений, а при $\eta_i = k$ $\forall i\, (\eta = n \cdot k)$ обозначим $S^k_{n \cdot k, n}(G) = \overline{S}^k_n(G)$ – это евклидово множество k-сочетаний с (неограниченными) повторениями.

Случай, когда G состоит из действительных чисел обобщается на сочетания из элементов мультимножества G произвольной природы введением на основе $S(G)$ линейного порядка $\prec$.

Пример 1. Пусть $G = \{a^3, b^2, c^1\}$, а порядок элементов такой: $a \prec b \prec c$.

Рассмотрим образование k-сочетаний, как элементов общего евклидового множества k-сочетаний, т.е. совокупности всех упорядоченных k-выборок $x = (x_1, ..., x_k)$ из G, в которых $x_1 \prec x_2 \prec ... \prec x_k$. Рассмотрим при этом все возможные случаи для k, т.е. $k = 1; 2; 3; 4; 5; 6$.

Как один из способов подсчета числа сочетаний можно рассматривать построение дерева, листья которого (а точнее ветви от корня до листа) соответствуют k-сочетаниям.

Проиллюстрируем этот способ на текущем примере.

Заметим, что для этого примера имеем основу мультимножества G множество $S(G) = (a, b, c)$ и первичную спецификацию: $[G] = (3, 2, 1)$. Соответствующее дерево построения k-сочетаний представлено рисунком 1.

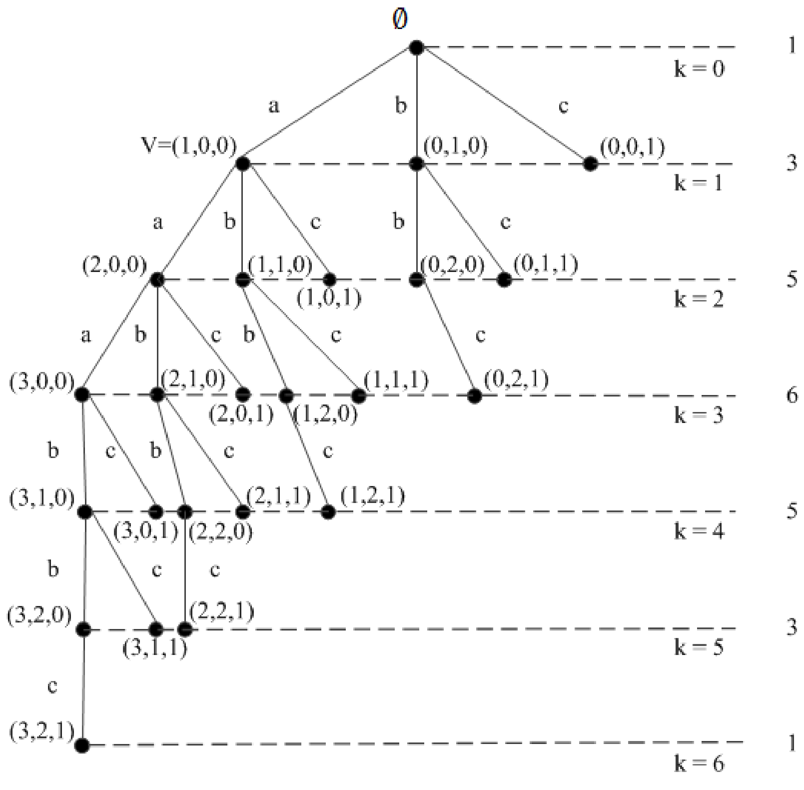

Рис. 1. – Дерево k-сочетаний для $G = \{a, a, a, b, b, c\}$ с порядком элементов $a \prec b \prec c$

На рис. 1 вершины i-ого уровня дерева соответствуют i-сочетанию из элементов G $(1 \le i \le k)$. Корень – вершина 0-го уровня – отвечает пустому, или 0-сочетанию.

Возле каждой вершины стоит вектор $(V_1, V_2, V_3) = V$ количеств использованных соответственно элементов a, b, c в i-сочетании, которому отвечает вершина. Отметим, что у всех векторов (V_1, V_2, V_3): $1 \le V_j \le \eta_j$, $j \in J_3$. Ребрам дерева приписаны символы из основы $S(G)$, если их использованное количество не превосходит имеющееся в мультимножестве G и равное η_j, т.е. $V_j \le \eta_j$, $j \in J_3$.

На рис.1 в правом столбце стоят количества k-сочетаний, т.е. $|S^k_{\eta n}(G)|$. На эти рисунках видно, что $|S^k_{\eta n}(G)| = |S^{\eta-k}_{\eta n}(G)|$. Попробуем доказать : $\mathrm{K}^k_\eta = \mathrm{K}^{\eta-k}_\eta$, где $\mathrm{K}^k_\eta = |S^k_{\eta n}(G)|$ – количество сочетаний в множестве $S^k_{\eta n}(G)$.

Пример 2. Пусть $a \prec b \prec c$. Рассмотрим: $G = \{a^2, b^4, c^1\}$, тогда $S(G) = (a, b, c)$, $[G] = (2, 4, 1)$. Рассмотрим также мультимножество $\overline{G} = \{a^2, b^0, c^3\}$, основа $\overline{G}$ – это множество $S(\overline{G}) = (a, b, c)$, а первичная спецификация – упорядоченное согласно основе множество кратностей элементов основы в $\overline{G}$: $[\overline{G}] = (2, 0, 3)$.

Мультимножество $\overline{G}$ взято такое, чтобы имели место соотношения: $U = G + \overline{G} = \{a^4, b^4, c^4\}$, где кратность элемента в U $4 = \max\limits_{1 \le i \le n,\, \eta_i \in [G]} \eta_i = \eta^*$, т.е. $\overline{G} = U - G$, $U = \{e_1^{\eta^*}, ..., e_n^{\eta^*}\}$, элементы основы мультимножества U – это $e_i \in S(G)$, $n = |S(G)|$. Здесь знаки «+», «–» означают сумму и разность мультимножеств (см., например, [2]). Заметим, что обычно элементы нулевой кратности не рассматривают (в этом случае $\overline{G} = \{a^2, c^3\}$, $S(\overline{G}) = (a, c)$, $[\overline{G}] = (2, 0, 3)$, что ничего не меняет в рассмотрении примера).

Назовем мультимножество $\overline{G}$ дополнением к мультимножеству G. Рассмотрим дополнения (в теоретико-множественном смысле) сочетаний, взятых из $S^k_{\eta n}(G)$ до G (табл. 1).

При этом дополнение запишем в форме, удовлетворяющей условию (1).

Таблица 1

Дополнения сочетаний

Множество $M = S^k_{\eta n}(G)$ **сочетаний**		**Дополнения сочетаний, принадлежащих множеству** M **до** G		**Количество сочетаний**
$k = 0$	∅	(a, a, b, b, b, b, c)	$\eta - k = 7$	$\lvert S \rvert = 1$
$k = 1$	(a), (b), (c)	(a, b, b, b, c), (a, a, b, b, b, b, c), (a, a, b, b, b, b)	$\eta - k = 6$	$\lvert S \rvert = 3$
$k = 2$	(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c)	(b, b, b, b, c), (a, b, b, b, c), (a, b, b, b, b), (a, a, b, b, c), (a, a, b, b, b)	$\eta - k = 5$	$\lvert S \rvert = 5$

Продовження Табл. 1

$k=3$	(a,a,b), (a,a,c), (a,b,b), (a,b,c), (b,b,b), (b,b,c)	(b,b,b,c), (b,b,b,b), (a,b,b,c), (a,b,b,b), (a,a,b,c), (a,a,b,b)	$\eta-k=4$	$\|S\|=6$
$k=4$	(a,a,b,b), (a,a,b,c), (a,b,b,b), (a,b,b,c), (b,b,b,b), (b,b,b,c)	(b,b,c), (b,b,b), (a,b,c), (a,b,b), (a,a,c), (a,a,b)	$\eta-k=3$	$\|S\|=6$
$k=5$	(a,a,b,b,b), (a,a,b,b,c), (a,b,b,b,b), (a,b,b,b,c), (b,b,b,b,c)	(b,c), (b,b), (a,c), (a,b), (a,a)	$\eta-k=2$	$\|S\|=6$
$k=6$	(a,a,b,b,b,b), (a,a,b,b,b,c), (a,b,b,b,b,c)	(c), (b), (a)	$\eta-k=1$	$\|S\|=3$
$k=7$	(a,a,b,b,b,b,c)	$\emptyset$	$\eta-k=0$	$\|S\|=1$

Будем считать (для однообразия в формулах) $|S^0_{\eta n}(G)|=1$, отметив, что $S^0_{\eta n}(G)=\emptyset$. Дополнением к множеству $S^k_{\eta n}(G)$ есть множество $S^{\eta-k}_{\eta n}(G)$ (см. табл. 1).

Пример 2 иллюстрирует общий подход, который позволяет обосновать соотношение (точнее равенство их) между количествами k-сочетаний и $(\eta-k)$-сочетаний из мультимножества G. Действительно, если взяли в k-сочетания из G элементы $x_1,...,x_k$, то не взяли элементы $x_{k+1},...,x_\eta$, и это – $(\eta-k)$-сочетание.

Покажем:

$$\mathrm{K}^k_\eta=\mathrm{K}^{\eta-k}_\eta. \qquad (2)$$

Каждой выборке $(x_1,...,x_k)$ из G, удовлетворяющей (1), взаимно однозначно соответствует выборка из G $(x_{k+1},...,x_n)$, удовлетворяющая условие (1). Именно $(\eta-k)$-дополнение выступает для k-сочетания $(\eta-k)$-сочетанием. Если обозначить K^k_η – количество сочетаний в $S^k_{\eta n}(G)$, то имеем $\mathrm{K}^k_\eta=\mathrm{K}^{\eta-k}_\eta$, что и требовалось доказать, то есть (2) верно.

На рис. 2 с использованием рассмотренного соответствия k-сочетания из G и $(\eta-k)$-сочетания изображено дерево, каждая ветвь которого дает 2 сочетания: k-сочетание $(x_1,...,x_k)$ и $(\eta-k)$-сочетание $\{x_\eta, x_{\eta-1},...,x_{k+2},x_{k+1}\}$ из последнего переупорядочиванием получаем евклидово $(\eta-k)$-сочетание $(x_{k+1},x_{k+2},...,x_\eta)$.

Для получения i-сочетания, соответствующего вершине дерева, нужно выписать все i символов, стоящих на ребрах по ветви дерева от корня до выбранной вершины i-

ого уровня.

Рассмотренный подход к построению дерева, листья которого соответствуют евклидовым k-сочетаниям, обобщается в следующем утверждении. Пусть $g_1 \prec ... \prec g_\eta$; $e_1 \prec ... \prec e_n$.

Теорема 1. Количество элементов общего множества k-сочетаний $S_{\eta n}^k(G)$ из элементов мультимножества $G = \{g_1,..., g_\eta\}$ с основой $S(G) = (e_1,..., e_n)$ и первичной спецификацией $[G] = (\eta_1,...,\eta_n)$ вычисляется по формуле:

$$| S_{\eta n}^k(G) |= \sum_{\substack{V_1+V_2+...+V_n=k, \\ 0\le V_i \le \eta_i \quad \forall i}} 1 , \qquad (3)$$

где суммирование единиц производится по всем целым неотрицательным решениям $(V_1,...,V_n)$ уравнения $V_1 + ... + V_n = k$ при условии, что $0 \le V_i \le \eta_i \quad \forall i \in J_n$.

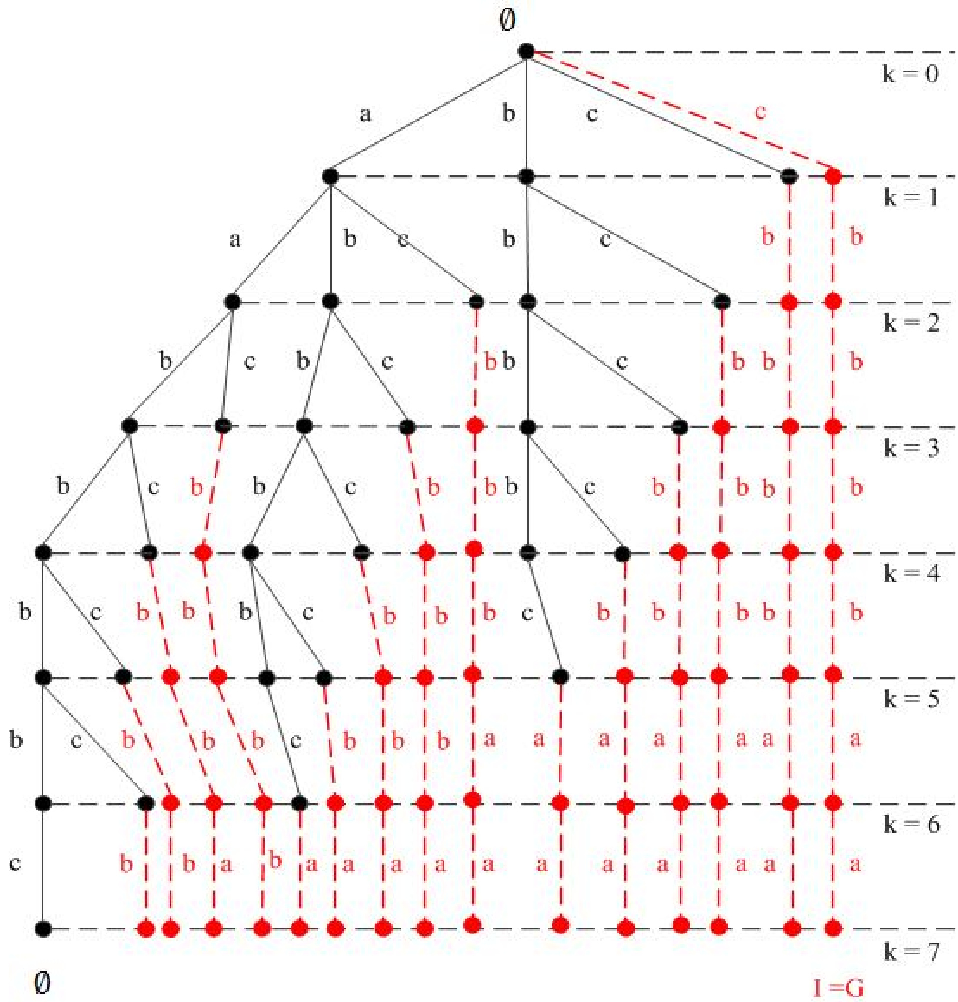

Рис. 2. – Двойственное дерево сочетаний для исходного (ветви в направлении от листа (вершины на уровне $k = 7$) до вершины, являющейся последней в сочетании из $S_{\eta n}^k(G)$, дают сочетания из $S_{\eta n}^{\eta-k}(G)$)

Доказательство. Обозначим V_i количество элементов $e_i \in S(G)$, которые выбраны в k-сочетание. Очевидно, что $0 \le V_i \le \eta_i$ $\forall i$, поскольку в мультимножестве G имеется элементов e_i ровно η_i штук. Сочетание имеет k элементов, т.е. выполняется условие $V_1 + ... + V_n = k$. Каждая неупорядоченная k-выборка $\{e_1^{V_1}, ..., e_n^{V_n}\}$, где $V_1 + ... + V_n = k$, $0 \le V_i \le \eta_i$, образует в силу имеющего в k-сочетаниях порядка $e_1 \prec ... \prec e_n$, только одно евклидово k-сочетание $e = (e_1, ..., e_1; e_2, ..., e_2; ...; e_n, ..., e_n)$. Отметим, что в k-сочетаниях e элемент e_i повторяется V_i раз, где $0 \le V_i \le \eta_i$ $\forall i$ и $V_1 + ... + V_n = k$.

Таким образом, чтобы посчитать все евклидовы k-сочетания из $S_{\eta n}^k(G)$ необходимо и достаточно перебрать и подсчитать все возможные неотрицательные целые решения уравнения $V_1 + ... + V_n = k$ при условии $0 \le V_i \le \eta_i$. Количество таких решение и является количеством k-сочетаний. Теорема доказана.

Следствие 1 из теоремы 1. Из формулы (3) при условиях $\eta = n$, $\eta_i = 1$ $\forall i = 1, 2, ..., n$, т.е. когда $S_{\eta n}^k(G) = S_n^k(G)$ получаем известную формулу

$$\left|S_n^k(G)\right| = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{4}$$

Доказательство. Когда все элементы в G различны, вектор $V = (V_1, ..., V_n)$ на каждом k-уровне имеет k единиц и $n-k$ нулей. Количество таких комбинаций – это количество перестановок из n элементов по 2, где k единиц и $n-k$ нулей, т.е.

$$P_{n,2} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

что и дает справедливость формулы (4).

Следствие 2 из теоремы 1. Когда все элемента в G имеют кратность k, то есть $\eta_i = k$ $\forall i \in J_n$, $\eta = k \cdot n$, $S_{\eta n}^k(G) = \overline{S}_n^k(G)$, получаем, обозначив

$$\left|\overline{S}_n^k(G)\right| = s(k,n),$$

следующее рекуррентное соотношение:

$$s(k,n) = s(k-1, n-1) + s(k-2, n) + s(k, n-1). \tag{5}$$

Доказательство. Идею доказательства изложим сперва иллюстративно. На рис. 3 представлено дерево сочетаний для $G = \{a^4, b^4, c^4, d^4\}$; где количество элементов основы $n = 4$; их кратность в G – это $k = 4$. Вершины уровня 4 (вершины этого дерева в количестве $s(k,n)$) можно представить вершинами дерева с корнем A и ветвями, которые начинаются ребрами b, c, d (для s), в объединении с еще двумя деревьями: первое имеет корень B и ветви, начинающиеся ребрам b, c, d, и второе – это дерево с корнем C и всеми ветвями из него (т.е. начинающиеся с ребрами a, b, c, d). Таким образом, очевидно, что

$$s(k,n) = s(k-1, n-1) + s(k-2, n) + s(k, n-1).$$

Легко видеть, что соотношение (5) остается справедливым и для произвольных n, k, где $n \geq 2$; $k \geq 2$.

На рис. 3 листья поддерева C с номерами 1, …, 10 дают их количество $s(k-2,n)$; листья поддерева B с номерами 11, …, 20 дают число (их количество) $s(k-1,n-1)$, листья третьего поддерева – листья с номерами 21, …, 35 дают число $s(k,n-1)$.

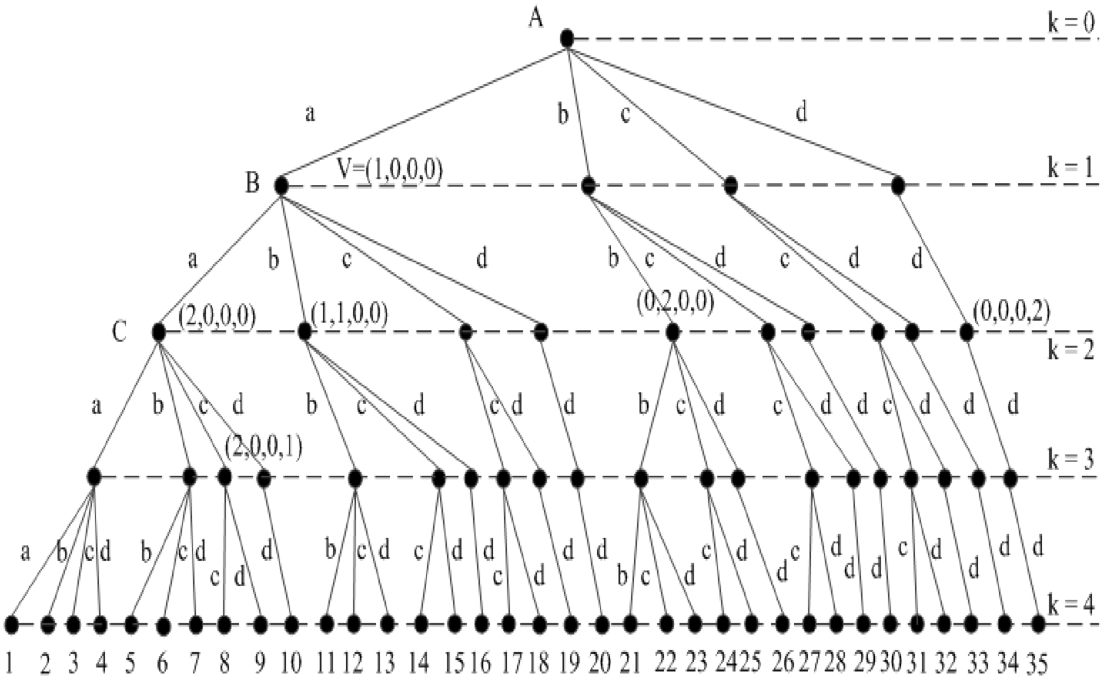

Рис. 3 – Иллюстрация того, что $s(k, n) = s(k-1,n-1) + s(k-2,n) + s(k,n-1)$

Первое поддерево характерно тем, что $V_1 \geq 2$; во втором все $V_1 = 1$; в третьем все $V_1 = 0$.

Поэтому сумму $s(k,n)$ из формулы (3) (теорема 1) можно разбить (как в примере так и в общем случае) на три, которые отвечают рассмотренным поддеревьям:

$$S_{\eta n}^{k}(G) = \sum_{\substack{V_1+\ldots+V_n=k \\ 0\leq V_i\leq\eta_i \ \ \forall i}} 1 = \sum_{\substack{V_1+\ldots+V_n=k \\ 2\leq V_1\leq\eta_1 \\ 0\leq V_i\leq\eta_i \ \forall i\in J_n\setminus\{1\}}} 1 + \sum_{\substack{V_2+\ldots+V_n=k-1 \\ 0\leq V_i\leq\eta_i \\ \forall i\in J_n\setminus\{1\}}} 1 + \sum_{\substack{V_2+\ldots+V_n=k \\ 0\leq V_i\leq\eta_i \\ \forall i\in J_n\setminus\{1\}}} 1 =$$

$$= s(k-2, n) + s(k-1, n-1) + s(k, n-1),$$

что и доказывает следствие 2 из теоремы 1, т. е. что рекуррентное соотношение (5) – это частный случай формулы (3) из теоремы 1.

Составим таблицу (табл. 2), содержащую значения $s(k,n)$ при $n \leq 5$; $k \leq 5$.

Таблица 2

Значения $s(k,n)$

n / k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5
2	1	3	6	10	15
3	1	4	10	20	35
4	1	5	15	35	70
5	1	6	21	56	126

Рекуррентное соотношение (5) имеет ряд интересных свойств. Рассмотрим некоторые из них.

Утверждение 1. Рекуррентное соотношение (5) эквивалентное такому:

$$s(k,n) = s(k, n-1) + s(k-1, n)\,. \tag{6}$$

Доказательство. Действительно, если по (6) представить $s(k-1, n)$, то имеем:

$$s(k-1,n) = s(k-1, n-1) + s(k-2, n)\,. \tag{7}$$

Подставив (7) в (6), получаем (5), т.е. из (6) следует (5). Доказательство того, что из (5) следует (6) в том, что первая и вторая суммы (которые соответствуют поддеревьям с вершинами B и C) в разбиении $s(n,k)$ на три суммы можно рассматривать как поддерево с вершиной B и четырьмя ветвями, а это дает количество листьев $s(k,n-1)$, т.е. из (5) следует (6). Что и нужно доказать для эквивалентности (5) и (6).

Утверждение 2. При выполнении в (6) системы условий

$$\begin{cases} n_1 = k+1 \\ n = k_1 + 1 \end{cases}$$

имеем: $s(k,n) = s(k_1, n_1)$ $\forall n \neq k+1$ (при $n = k+1$ имеем: $n_1 = n$; $k_1 = k$). Такая система условий эквивалентна соотношению:

$$s(k,n) = s(n-1, k+1)\,. \tag{8}$$

Доказательство. Для иллюстрации способа доказательства обратимся к табл. 2. Очевидно, что её строка при $k=1$ и столбец при $n=2$ одинаковы (поэлементно).

Вычисляя по (6) следующую строку и следующий столбец мы будем получать одинаковые (поэлементно) множества, при этом они стоят в строках и столбцах, которые удовлетворяют (8), что и требовалось доказать.

Замечание. Если рассматривать таблицу 2 (без шапки, боковика и пятой строки) как матрицу S, то соотношение (8) означает такое ее свойство: $S = S^T$, т.е. транспонирование не меняет S (это остается справедливым при увеличении размеров таблицы с сохранением квадратности матрицы S).

2. Разбиения

Рассмотрим упорядоченную k-выборку элементов из мультимножества Z, обозначим эту выборку $x=(x_1, ..., x_k)$.

Пусть

$$x_1+...+x_k=N, \tag{9}$$

где $x_i \ge 0$, а числа x_i, N – целые. Т.е. рассмотрим разбиение N на целые слагаемые $x_1, ..., x_k$ из Z, т.е. $Z=\{N^1, N-1^1, ..., 1^N, 0^{N-1}\}=\{e_1^{\eta_1}, ..., e_i^{\eta_i}, ..., e_N^{\eta_N}, e_{N+1}^{\eta_{N+1}}\}$; основа Z: $S(Z)=(e_1, ..., e_N, e_{N+1})$, в которой $e_1=N, e_2=N-1, ... e_i=N+1-i, ... e_N=1, e_{N+1}=0$, а кратности $\eta_1, ..., \eta_N, \eta_{N+1}$ составляют кортеж – первичную спецификацию Z: $[Z]=(\eta_1, ..., \eta_N, \eta_{N+1})$.

Ясно, что кратность ноля $\eta_{N+1}=N-1$; $\eta_1=1$; очевидно

$$(N+1-i)\cdot\eta_i \le N,\ (N+1-i)\cdot(\eta_i+1)>N,$$

причем для выполнения (9) кратность η_i в первой формуле – это максимально возможное для выполнения этого неравенства натуральное число. Имеем из двух неравенств:

$$i-1<(N-i+1)\cdot\eta_i \le N,\ \frac{i-1}{N-i+1}<\eta_i \le \frac{(N-i+1)+i-1}{N-i+1}=1+\frac{i-1}{N-(i-1)}$$

или

$$\frac{i}{N-i}<\eta_{i+1}\le 1+\frac{i}{N-i},\quad 0\le i\le N-1.$$

А поскольку η_{i+1} – максимально возможное целое, то

$$\eta_{i+1}=\left[1+\frac{i}{N-i}\right],\quad 0\le i\le N-1, \tag{10}$$

где $[a]$ – целая часть числа a.

Пусть $x_i \in Z=\{N^1, (N-1)^1, ..., e_{i+1}^{\left[1+\frac{i}{N-i}\right]}, ..., 2^{\left[\frac{N}{2}\right]}, 1^N, 0^{N-1}\}$. Назовем $x=(x_1, ..., x_k)$ – k-составным упорядоченным разбиением (или композицией) натурального N (т.е. состоящего точно из k частей, может быть и нулевых)

$$x_1+...+x_k=N.$$

Понятно, что x – это k-размещение с дополнительным условием (9).

Если в композиции нет нулей, то общее количество композиций с $1, 2, ..., N$ частями, как известно [9, с.59], равно 2^{N-1}.

Если порядок слагаемых в (1) роли не играет, то наложим на элементы $x_1, ..., x_k$ условие:

$$x_1 \geq \ldots \geq x_k \geq 0 \tag{11}$$

При этом вектор $x = (x_1, \ldots, x_k)$ является евклидовым k-сочетанием [2] с дополнительным условием (9). Вектор x, удовлетворяющий (9), (11), назовем k-составным (т.е. состоящим точно из k частей, может быть и нулевых) разбиением (неупорядоченным, т.е. порядок не значим и используется в виде (11)).

Рассмотрим множество $R^k_{\eta n}(Z)$ k-составных (неупорядоченных) разбиений, где $\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_n$, а η_i вычисляется по формуле (10), $n = N + 1$; $k = N$.

Поставим во взаимно однозначное соответствие k-составное разбиение из $R^k_{\eta n}(Z)$ (дальше k-разбиение) и k-сочетание из $S^k_{\eta n}(G)$.

Пусть $G = Z$, $x = (x_1, \ldots, x_k)$, выполняется условие (11). Тогда, очевидно $S^k_{\eta n}(Z) = S^k_{\eta n}(G)$, т.е. k-сочетание из Z и из G – это одни и те же сочетания.

Ограничим в $S^k_{\eta n}(G)$ параметры множества и его элементов так: $n = N + 1$; $k = N$, $\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_n$, где η_i вычисляется по формуле (10), а для $x = (x_1, \ldots, x_k) \in S^k_{\eta n}(G)$ $x_1 + \ldots + x_N = N$,т.е. выполняется условие (9).

При таких ограничениях $S^k_{\eta n}(Z) = R^k_{\eta n}(Z)$, т.е. множество разбиений $R^k_{\eta n}(Z)$ можно представлять так же как и множество сочетаний деревом с одним отличием: новая ветвь (подветвь) дерева образуется в случае, если не нарушается условие (9) и ребро в ветви берется такое, что не нарушает (9) (см. рис. 4).

Как известно [9, с. 86], количество разбиений числа N может быть подсчитано как коэффициент при q^n ряда: $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q)^i}$.

Вместе с тем, поскольку множество разбиений $R^k_{\eta n}(Z)$ является множеством листьев дерева разбиений, то интересно было бы, основываясь на теореме 1, записать формулу подсчета листьев таких деревьев.

Если рассматривать k-составные упорядоченный разбиения, т.е. композиции, то мы имеем $R^k_{\eta n}(Z)$ при условии (9), но условие (11) не выполняется. Это значит, что $R^k_{\eta n}(Z) = E^k_{\eta n}(Z)$ – множество k-размещений, для которых выполняется условие (9).

Таким образом, это множество можно изображать деревьями k-размещений [8] с одним отличием: $x_1 + \ldots + x_N = N$, т.е. при построение дерева ветви (подветви) образуются, если условие (9) не нарушается.

Таким образом, обосновано такое утверждение.

Теорема 2. Количество $|R^k_{\eta, N+1}(Z)|$ композиций числа N вычисляется по формуле

$$|R^k_{\eta,N+1}(Z)| = \sum_{\substack{V_1+\ldots+V_{N+1}=N \\ 0\le V_i \le \left[1+\frac{i-1}{N-i+1}\right] \\ 1\le i\le N;\ \ 0\le V_{N+1}\le N-1 \\ x_1+\ldots+x_N=N}} \frac{N!}{V_1! V_2! \cdot \ldots \cdot V_{N+1}!},$$

где суммирование ведется по всем целым неотрицательным решениям $(V_1, ..., V_{N+1})$ уравнения $V_1 + ... + V_{N+1} = N$ при условиях, что $x_1 + ... + x_N = N$ и что $0 \le V_i \le \left[1 + \frac{i-1}{N-i+1}\right]$ $\forall\, 1 \le i \le N$; $0 \le V_{N+1} \le N-1$.

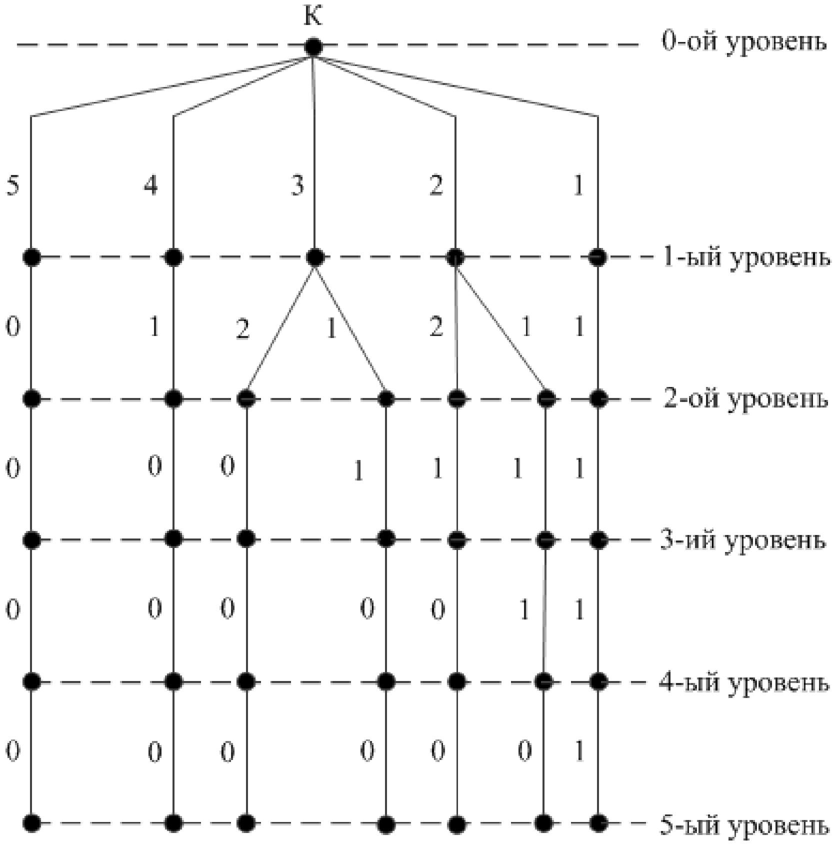

Рис. 4 – Дерево разбиений, $N = 5$

Заключение

В статье рассмотрены свойства сочетаний и разбиений в связи с использованием их деревьев. Целесообразно продолжить исследование взаимосвязи комбинаторных множеств и графов.

Литература

1. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учеб. пособие / О. А. Емец. – К.: УМК ВО, 1992. – 92 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/489.

2. Ємець О. О. Дискретна математика: Навч. посібник. Вид. 2-ге, допов. / О.О. Ємець, Т.О. Парфьонова. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2009. – 287 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/552.
3. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О. О. Ємець. – К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
4. Ємець Ол-ра О. Одна задача упакування як комбінаторна оптимізація на нечіткій множині розбиттів і її розв'язування / Ол-ра О. Ємець // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 4. – С. 150-160. – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/2582.
5. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов / А. Ф. Новиков. – Спб.: Питер, 2013. – 432 с.
6. Ємець О.О. Ізоморфізм Бовмана між графами і переставленнями та його використання для побудови предфрактальних переставних конфігурацій / О.О. Ємець, О.В. Тур // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ-2011): Матеріали Всеукраїн. наук. семінару 26-27 серпня 2011 року .– Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. – С. 57-62. – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/1023.
7. Ємець О.О. Про ізоморфізм розміщень без повторень і графів для утворення комбінаторних предфракталів / О.О. Ємець, О.В. Тур // Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта: Материалы международ. науч. конф. (Евпатория 27-31 мая, 2012). Херсон: ХНТУ. – 363-364 с.
8. Ємець О. О. Про кількість елементів в загальних множинах розміщень та полірозміщень / О. О. Ємець, Т. В. Чілікіна // Інформатика та системні науки (ІСН-2013): Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 21-33 березня 2013 р.). – Полтава: ПУЕТ, 2013. – С. 117-125. – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/1619.
9. Гульден Я. Перечислительная комбинаторика / Я. Гульден, Д. Джексон. – М.: Наука, 1990. – 504 с.

Анотація

О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець, С.В. Ванжа

Евклідові розбиття і сполучення: їх дерева і деякі властивості

В статті викладається зв'язок деяких видів дерев і евклідових комбінаторних множин сполучень та розбиттів, а також отримано ряд властивостей цих множин. За допомогою дерев отримані формули для підрахунку кількості елементів евклідових множин сполучень та розбиттів.

Ключові слова: *розбиття, сполучення, дерева, евклідові комбінаторні множини.*

Summary

O.O. Iemets, O. O. Yemets`, S.V. Vanzha

Euclidean partitions and combinations: their trees and some properties

The article describes the relationship of some species of trees and Euclidean combinatorial sets of combinations and partitions; the number of properties of these sets is received.Formulas are obtained with the help of trees for counting the number of elements of Euclidean sets of combinations and partitions.

Keywords: *partitions, combinations, trees, Euclidean combinatorial sets.*