УДК 519.615
М. А. Жмурко, Н. О. Красношлик

ПОРІВНЯННЯ БАГАТОКРОКОВИХ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ

У роботі розглянуто багатокрокові ітераційні методи 6-го та 12-го порядку збіжності для знаходження простого кореня нелінійного рівняння, які відносяться до сімейства методів Джарратта. Наведено методи 4-го порядку для розв'язування систем нелінійних рівнянь. Проведено серію обчислювальних експериментів на тестових прикладах для порівняння представлених методів з класичним методом Ньютона. Побудовано області притягання для трикрокових ітераційних методів знаходження коренів рівняння.

Ключові слова: *нелінійне рівняння, система нелінійних рівнянь, багатокроковий метод, метод Джарратта, порядок збіжності методу.*

Вступ

Розв'язування нелінійних рівнянь і систем нелінійних рівнянь є одним з найбільш досліджених розділів обчислювальної математики. Ітераційні методи знаходження коренів нелінійних рівнянь можна розділити на однокрокові та багатокрокові. Багатокрокові методи дозволяють в процесі обчислень використовувати вже обчислені значення. Використовуючи такий підхід отримують нові ефективні методи розв'язування нелінійних рівнянь. Будь-який однокроковий ітераційний метод знаходження простого кореня рівняння, який явно залежить від функції $f(x)$ і її перших $(r-1)$ похідних, не може досягти порядку збіжності вище, ніж r. Тому велике практичне значення мають багатокрокові методи, оскільки вони здатні подолати існуючі теоретичні обмеження для однокрокових методів, що і пояснює підвищений інтерес до їх дослідження в останній час [1].

Вперше двокроковий ітераційний метод запропонував А. М. Островський у 1966 р. [2]. Значний внесок у подальший розвиток багатокрокових методів зробили у 1960-70-х роках П. Джаррат [3-4], Х. Кунг і Д. Трауб [5]. Відновлення інтересу до багатокрокових методів припадає на початок теперішнього століття і пов'язано з бурхливим розвитком обчислювальної техніки та удосконаленням комп'ютерної арифметики і символьних обчислень. Багатокрокові методи вимагають обчислення наближень з високою точністю і потребують складного аналізу порядку збіжності, який здійснюється лише за допомогою символьних обчислень. Тому для їх розвитку і застосування були необхідні істотні поліпшення в області апаратного та програмного забезпечення.

Протягом останніх десяти років запропоновано більше 200 різних багатокрокових ітераційних методів. З досить широким і систематизованим оглядом існуючих багатокрокових методів знаходження коренів нелінійних рівнянь можна ознайомитися у [6].

Метою даної роботи є проведення порівняльного аналізу багатокрокових ітераційних методів вищих порядків, які належать до сімейства методів Джарратта, для знаходження розв'язків нелінійних рівнянь та систем.

Постановка задачі

Розглянемо задачу знаходження кореня нелінійного рівняння

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

де $f : D \subset R \to R$ – функція дійсної змінної, визначена на відкритому інтервалі D.

У загальному вигляді розв'язати аналітично рівняння (1) можливо лише в окремих частинних випадках, тому широкого розповсюдження набули чисельні методи знаходження коренів рівняння.

Розглянемо ітераційні методи розв'язування нелінійних рівнянь, які передбачають побудову числової послідовності $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, збіжної до деякого α. При цьому α – шуканий корінь рівняння (1), отже $f(\alpha) = 0$.

Ітераційний процес, представлений у вигляді:

$$x_{n+1} = \varphi\left(x_n, w_1(x_n), w_2(x_n), ..., w_k(x_n)\right),$$

де $w_i(x_n)$ – вираз, який залежить від x_n ($i \geq 1$) називають багатокроковим (або у даному випадку k-кроковим).

Одними із найважливіших характеристик ітераційних методів є порядок збіжності методу та індекс ефективності [1].

Означення 1. Нехай $f(x)$ – дійсна функція, α – простий корінь, а $\{x_n\}$ – послідовність дійсних чисел, збіжних до α. Порядок збіжності визначається з рівняння:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} = \lambda \neq 0,$$

де $p \in R^+$ – порядок збіжності, λ – асимптотична похибка.

Означення 2. Ефективність ітераційного методу оцінюють за допомогою індексу ефективності, який визначається з рівняння:

$$I = p^{\frac{1}{m}},$$

де I – індекс ефективності методу, m – кількість обчислень значень функції та її похідної на кожній ітерації методу.

Багатокрокові методи вищих порядків розв'язування нелінійних рівнянь

Для наближеного розв'язування рівняння (1) часто використовують класичний метод Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0.$$

З геометричної точки зору x_{n+1} є значенням абсциси точки перетину дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_n, f(x_n))$ з віссю абсцис. Тому метод Ньютона називають також методом дотичних. Даний метод є методом 2-го порядку збіжності.

Розглянемо деякі з багатокрокових ітераційних методів вищих порядків розв'язування нелінійних рівнянь, які належать до сімейства методів Джарратта, і були запропоновані в останні декілька років.

Трикроковий метод 6-го порядку побудував С. Вонг у 2009 р. [7]. Перші два кроки даного методу такі ж, як у класичного методу Джарратта 4-го порядку, а третій крок модифіковано для досягнення 6-го порядку збіжності. Отриманий метод визначається наступним чином:

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{2}$$

$$z_n = x_n - \left(\frac{3f'(u_n)+f'(x_n)}{6f'(u_n)-2f'(x_n)}\right)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{3}$$

$$x_{n+1} = z_n - \left(\frac{f(z_n)}{2}\right)\left(\frac{3}{f'(y_n)} - \frac{1}{f'(x_n)}\right), \tag{4}$$

Ще один трикроковий метод 6-го порядку, побудований з аналогічних міркувань, отримав у 2011 р. Ф. Солеймані [8]:

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{5}$$

$$z_n = x_n - \left(\frac{3f'(u_n)+f'(x_n)}{6f'(u_n)-2f'(x_n)}\right)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{6}$$

$$x_{n+1} = z_n - \left(\frac{f(z_n)}{f'(y_n)+2f[z_n,x_n,x_n](z_n-y_n)}\right), \tag{7}$$

де $f[z_n,x_n,x_n] = \dfrac{f[z_n,x_n]-f'(x_n)}{z_n-x_n}$, $f[z_n,x_n] = \dfrac{f(z_n)-f(x_n)}{z_n-x_n}$.

Серед трикрокових методів також виділимо модифікований метод типу Джарратта, який запропонував у 2012 р. Р. Тхукрал [9]. Для досягнення 6-го порядку збіжності на третьому кроці класичного методу Джарратта 4-го порядку вводиться функція з вагами:

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{8}$$

$$z_n = x_n - \left(\frac{3f'(y_n)+f'(x_n)}{6f'(y_n)-2f'(x_n)}\right)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{9}$$

$$x_{n+1} = z_n - \left(\frac{(2\beta+1)f'(y_n)^2+(2\beta+3)f'(x_n)^2}{(5\beta+4)f'(y_n)^2-\beta f'(x_n)^2}\right)\left(\frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{10}$$

де β – ваговий коефіцієнт.

Декілька методів 12-го порядку отримав Р. Тхукрал, об’єднавши метод Джаратта 4-го порядку збіжності з модифікованим методом типу Джарратта 6-го порядку [10].

Перші три кроки методів такі ж, як у модифікованого методу 6-го порядку, а четвертий крок будується за допомогою параметричних функцій. Щоб отримати більш високий індекс ефективності, використовуються розділенні різниці:

$$f[v_n,x_n] = \frac{f(v_n)-f(x_n)}{v_n-x_n},$$

$$f[w_n,v_n] = \frac{f(w_n)-f(v_n)}{w_n-v_n},$$

$$f[w_n,x_n]=\frac{f(w_n)-f(x_n)}{w_n-x_n},$$

$$f[v_n,x_n,x_n]=\frac{f[v_n,x_n]-f'(x_n)}{v_n-x_n}.$$

Отримані чотирикрокові методи 12-го порядку визначаються наступними формулами:

Метод 1.

$$u_n=x_n-\frac{2}{3}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{11}$$

$$v_n=x_n-J(x_n)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{12}$$

$$w_n=x_n-J(x_n)^2\left(\frac{f(v_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{13}$$

$$x_{n+1}=w_n-\frac{f(w_n)}{L(x_n)}, \tag{14}$$

де $J(x_n)=\dfrac{3f'(y_n)+f'(x_n)}{6f'(y_n)-2f'(x_n)}$, $f'(x_n)\neq 0$; $L(x_n)=2f[w_n,x_n]+f[w_n,v_n]-2f[v_n,x_n]+$ $+(w_n-v_n)f[v_n,x_n,x_n]$.

Метод 2.

$$u_n=x_n-\frac{2}{3}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{15}$$

$$v_n=x_n-J(x_n)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{16}$$

$$w_n=x_n-J(x_n)^2\left(\frac{f(v_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{17}$$

$$x_{n+1}=w_n-P(x_n)f(w_n), \tag{18}$$

де $P(x_n)=\dfrac{(1+f(w_n)f(x_n)^{-1}-(J(x_n)-1)^2f(v_n)f(x_n)^{-1})}{(f[w_n,x_n]-f[v_n,x_n]+f[w_n,v_n])}$.

Метод 3.

$$u_n=x_n-\frac{2}{3}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{19}$$

$$v_n=x_n-J(x_n)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{20}$$

$$w_n = x_n - J(x_n)^2\left(\frac{f(v_n)}{f'(x_n)}\right), \qquad (21)$$

$$x_{n+1} = w_n - Q(x_n) f(w_n), \qquad (22)$$

де $Q(x_n) = \left(\dfrac{f[v_n, x_n]}{f[w_n, x_n] f[w_n, v_n]}\right)\left(1 + \dfrac{f(w_n)}{f(x_n)}\right)$.

Багатокрокові методи розв'язування систем нелінійних рівнянь

Розглянемо задачу знаходження розв'язку системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ ... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{cases} \qquad (23)$$

де $f_i(x_1, x_2, ..., x_n) : R^n \to R$ – деякі функції дійсних змінних $x_1, x_2, ..., x_n$.

Позначимо вектор змінних через $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, а вектор-функцію як $F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_n(X))^T$. Тоді систему (23) можна записати у вигляді:

$$F(X) = 0. \qquad (24)$$

Для знаходження розв'язку системи нелінійних рівнянь використовують ітераційні методи. Широко відомим серед ітераційних методів є класичний метод Ньютона та його модифікації. Даний метод базується на лінеаризації задачі і заміні процесу розв'язування нелінійної системи на розв'язування послідовності лінійних систем (найчастіше прямими методами).

Розрахункова формула методу Ньютона для розв'язування системи нелінійних рівнянь (24) має вигляд:

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - J^{-1}(X^{(n)}) \cdot F(X^{(n)}),$$

де $J^{-1}(X^{(n)})$ – обернена матриця Якобі.

Як вже зазначалося, на даний момент отримано чимало багатокрокових методів розв'язування нелінійних рівнянь. Деякі з цих методів можна узагальнити для нелінійних систем, отримуючи таким чином нові ефективні методи. Розглянемо два методи, отримані шляхом узагальнення і модифікації методу Джарратта 4-го порядку. Вони запропоновані у 2013 р. М. Хираллах і М. Хафиз [11] та визначаються наступними формулами:

Метод 1.

$$Y^{(n)} = X^{(n)} - \frac{2}{3} J^{-1}(X^{(n)}) F(X^{(n)}), \qquad (25)$$

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - \left(I - \frac{3}{2}\left(3J(Y^{(n)}) - J(X^{(n)})\right)^{-1}\left(3J(Y^{(n)}) - J(X^{(n)})\right)\right) J^{-1}(X^{(n)}) F(X^{(n)}). \qquad (26)$$

де I – одинична матриця;

Метод 2.

$$Y^{(n)} = X^{(n)} - \frac{2}{3} J^{-1}(X^{(n)}) F(X^{(n)}), \qquad (27)$$

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - \left(J(X^{(n)})^{-1} + \frac{3}{2} J(Y^{(n)})^{-1} \right) F(X^{(n)}) + 3\left(J(X^{(n)}) + J(Y^{(n)}) \right)^{-1} F(X^{(n)}). \qquad (28)$$

Обчислювальні експерименти

Проведемо порівняльний аналіз розглянутих багатокрокових методів знаходження кореня нелінійного рівняння. Для цього у середовищі MATLAB R2012b здійснено програмну реалізацію таких методів:

- трикроковий метод Вонга 6-го порядку (2)-(4);
- трикроковий метод Солеймані 6-го порядку (5)-(7);
- трикроковий модифікований метод типу Джарратта 6-го порядку (8)-(10);
- (метод 1) чотирикроковий метод Тхукрала 12-го порядку (11)-(14);
- (метод 2) чотирикроковий метод Тхукрала 12-го порядку (15)-(18);
- (метод 3) чотирикроковий метод Тхукрала 12-го порядку (19)-(22).

Серед представлених методів найбільший індекс ефективності мають методи 12-го порядку $I = \sqrt[4]{12} \approx 1.8612$, для методів 6-го порядку $I = \sqrt[4]{6} \approx 1.5651$, і для методу Ньютона $I = \sqrt{2} \approx 1.4142$.

Використовували умову зупинки ітераційного процесу $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ з точністю $\varepsilon = 10^{-15}$. Розв'язували наступні тестові приклади:

1) $f_1(x) = e^{\sin(x)} - 1 - \frac{x}{5} = 0$, корінь $\alpha = 0$, $x_0 = 0$;

2) $f_2(x) = e^x \sin(x) + \ln(1 + x^2) = 0$, корінь $\alpha = 0$, $x_0 = 0$.

Отримані результати обчислювальних експериментів представлено у табл. 1 і табл. 2. Для кожного методу наведено загальну кількість ітерацій, потрібних для знаходження кореня рівняння із наперед заданою точністю. Як видно, метод Ньютона збігається найповільніше. Також для перших трьох ітерацій наведено значення модуля функції від поточного наближення до кореня. Як і очікувалось, найбільш ефективними з точки зору точності обчислення кореня рівняння є методи 12-го порядку.

Таблиця 1

Порівняння багатокрокових методів при розв'язуванні рівняння $f_1(x) = 0$

Назва методу	Кількість ітерацій, k	$\lvert f_1(x_1)\rvert$	$\lvert f_1(x_2)\rvert$	$\lvert f_1(x_3)\rvert$
Метод Ньютона	6	4.4265E-3	1.5099E-5	1.7810E-10
Метод Вонга	4	1.6550E-7	1.4434E-30	1.8311E-59
Метод Солеймані	4	5.2895E-9	3.2003E-25	3.0772E-25
Метод типу Джарратта	4	7.5838E-8	1.0296E-31	9.3166E-62
Метод 1	4	1.4399E-12	1.9855E-42	3.5599E-83
Метод 2	4	3.0154E-15	6.8670E-37	4.9340E-72
Метод 3	4	2.3086E-15	3.7158E-39	3.0338E-75

Таблиця 2

Порівняння багатокрокових методів при розв'язуванні рівняння $f_2(x)=0$

Назва методу	Кількість ітерацій, k	$\lvert f_2(x_1)\rvert$	$\lvert f_2(x_2)\rvert$	$\lvert f_2(x_3)\rvert$
Метод Ньютона	7	1.4997E-2	4.0341E-4	3.2447E-7
Метод Ванга	4	2.8957E-5	8.6865E-25	9.8316E-73
Метод Солеймані	4	7.4543E-7	1.0679E-26	2.1677E-104
Метод типу Джарратта	4	1.5318E-5	9.8767E-26	1.4452E-75
Метод 1	4	1.8676E-8	4.4077E-47	3.7430E-232
Метод 2	4	4.1981E-11	5.8853E-59	0.0
Метод 3	4	4.3897E-10	3.1211E-54	0.0

Проведемо порівняння ітераційних методів 4-го порядку для розв'язування систем нелінійних рівнянь, визначених формулами (25)-(26) і (27)-(28). Програмну реалізацію методів здійснено у середовищі MATLAB R2012b. Використовували умову зупинки ітераційного процесу $\left\|X^{(n)}-X^{(n-1)}\right\|<\varepsilon$ з точністю $\varepsilon=10^{-15}$. Розв'язували наступні тестові приклади:

1) $$F_1(X)=\begin{cases} f_1(x_1,x_2)=x_1^4x_2-x_1x_2+2x_1-x_2-1=0, \\ f_2(x_1,x_2)=x_2e^{-x_1}+x_1-x_2-e^{-1}=0, \end{cases} \quad X_0=\begin{pmatrix}0.8\\0.8\end{pmatrix};$$

2) $$F_2(X)=\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3)=15x_1+x_2^2-4x_3-13=0, \\ f_2(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+10x_2-e^{-x_3}-11=0, \\ f_3(x_1,x_2,x_3)=x_2^3-25x_3+22=0, \end{cases} X_0=\begin{pmatrix}10\\6\\-5\end{pmatrix};$$

3) $$F_3(X)=\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3)=3x_1-\cos(x_2x_3)-0.5=0, \\ f_2(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-81(x_2+0.1)^2+\sin(x_3)+1.06=0, \\ f_3(x_1,x_2,x_3)=e^{-x_1x_2}+20x_3+\dfrac{10\pi-3}{3}=0, \end{cases} \quad X_0=\begin{pmatrix}1.1\\1.1\\1.1\end{pmatrix}.$$

Результати проведених обчислень представлено у табл. 3. Для кожного методу наведено загальну кількість ітерацій, необхідних для знаходження наближеного розв'язку системи та значення норми вектор-функції для отриманого розв'язку. Методи 4-го порядку є ефективнішими, ніж метод Ньютона як за кількістю ітерацій, так і за точністю обчислення розв'язку системи.

Таблиця 3

Порівняння ітераційних методів розв'язування нелінійних систем

Система	Назва методу	Кількість ітерацій, k	$\left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|$	$\left\|F(X^{(k)})\right\|$
$F_1(X)$	Метод Ньютона	8	1.0558E-27	7.9116E-54
	Метод 1	4	3.1261E-19	1.0266E-73
	Метод 2	5	2.8077E-36	2.3303E-141
$F_2(X)$	Метод Ньютона	8	1.2907E-16	1.4605E-31

Продовження Табл. 3

	Метод 1	4	5.7226E-19	5.9435E-34
	Метод 2	5	1.3147E-19	2.4486E-34
	Метод Ньютона	9	6.4494E-20	5.3125E-35
$F_3(X)$	Метод 1	5	4.7197E-20	3.8810E-35
	Метод 2	6	2.3504E-31	1.8937E-46

Області притягання ітераційних методів

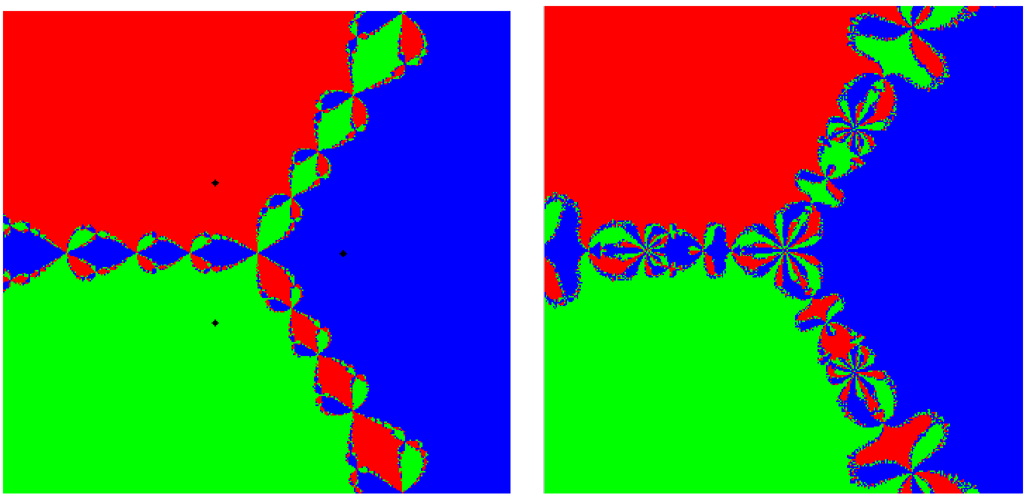
Для дослідження і характеристики ітераційних методів знаходження коренів рівняння використовують побудову областей притягання. При цьому головним питанням є знаходження множини початкових значень для кожного з коренів рівняння, до яких даний ітераційний метод буде збіжний. При виборі різних початкових значень, процес буде збігатися до різних коренів. Виявилося, що межі цих областей початкових значень мають фрактальну структуру.

Вперше дану задачу, яка полягала у дослідженні збіжності класичного методу Ньютона знаходження коренів кубічного рівняння за умови, що розглядаються комплексні числа, сформулював у 1879 р. А. Келі [12].

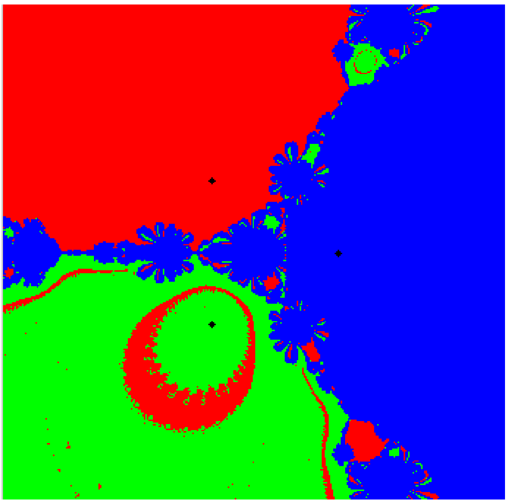
Рівняння $p(z) = z^3 - 1 = 0$ має три корені: 1, $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Метод Ньютона для розв'язування наведеного рівняння визначається наступним чином:

$$z_{i+1} = z_i - \frac{p(z_i)}{p'(z_i)} = z_i - \frac{z_i^3 - 1}{3z_i^2}. \qquad (29)$$

Покладемо $z = x + iy$ і відокремимо у (29) дійсну та уявну частини. Отримуємо систему з двох нелінійних рівнянь відносно дійсних змінних x_i та y_i, за якою побудовано область притягання методу Ньютона, яку ще називають басейн або фрактал Ньютона. Аналогічним чином побудовано області притягання для трикрокових методів типу Джарратта і Вонга (рис. 1).



а) б)



в)

Рис. 1. Область притягання методів а) Ньютона, б) Вонга, в) типу Джарратта

Висновки

Багатокрокові методи вищих порядків є найбільш ефективними ітераційними методами знаходження простих коренів нелінійних рівнянь. У даних методах використовуються вже обчислені проміжні значення для того, щоб значно збільшити швидкість збіжності без додаткових обчислювальних затрат.

Проведено порівняльний аналіз трикрокових методів 6-го порядку та чотирикрокових методів 12-го порядку. Для даних методів наведено індекс ефективності і загальну кількість ітерацій, та оцінено точність обчислення наближеного кореня. З результатів обчислювальних експериментів зрозуміло, що методи більш високого порядку забезпечують обчислення кореня з високою точністю за меншу кількість ітерацій. При цьому не можна визначити конкретний багатокроковий метод, який завжди дає найкращі результати для всіх нелінійних рівнянь.

Наведено порівняння ітераційних методів 4-го порядку розв’язування нелінійних систем із класичним методом Ньютона.

Отже, можна вважати, що розглянуті трикрокові та чотирикрокові методи, які відносяться до сімейства методів Джарратта, є ефективною альтернативою класичним методам розв’язування нелінійних рівнянь. Крім того, багатокрокові методи є нескладними для програмної реалізації, дозволяють знайти розв’язок з високою точністю за невелику кількість ітерацій, і можуть бути узагальнені для розв’язування систем нелінійних рівнянь.

Література

1. Petkovic M. Multipoint methods for solving nonlinear equations: A survey / Miodrag S. Petkovic, Beny Neta, Ljiljana D. Petkovic, Jovana Dzunic // Applied Mathematics and Computation. – 2014. – Vol. 226. – P. 635-660.
2. Ostrowski A. M. Solution of equations and systems of equations / Alexander M. Ostrowski. – New York-London : Academic Press, 1966. – 338 p.
3. Jarratt P. Some fourth order multipoint methods for solving equations / P. Jarratt // Mathematics of Computation. – 1966. – Vol. 20. – P. 434-437.
4. Jarratt P. Some efficient fourth-order multipoint methods for solving equations / P. Jarratt // BIT Numerical Mathematics. – 1969. – Vol. 9 (Issue 2). – P. 119-124.
5. Kung H. T. Optimal order of one-point and multipoint iteration / H. T. Kung, J. F. Traub // Journal of the ACM. – 1974. – Vol. 2. – P. 643-651.

6. Petkovic M. S. Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations / M. S. Petkovic, B. Neta, L. D. Petkovic, J. Dzunic. – Amsterdam : Elsevier, 2013. – 344 p.
7. Wang X. Modified Jarratt method with sixth-order convergence / X. Wang, J. Kou, Y. Li // Applied Mathematics Letters. – 2009. – Vol. 22. – № 12. – P. 1798-1802.
8. Soleymani F. Revisit of Jarratt method for solving nonlinear equations / F. Soleymani // Numerical Algorithms. – 2011. – Vol. 57. – № 3. – P. 377-388.
9. Thukral R. Further development of Jarratt method for solving nonlinear Equations / R. Thukral // Advances in Numerical Analysis. – Vol. 2012. – Article ID 493707. – 9 p. doi:10.1155/2012/493707
10. Thukral R. Further acceleration of the Jarratt method for solving nonlinear equations / R. Thukral // American Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2014. – Vol. 4(6). – P. 218-224.
11. Khirallah M. Solving system of nonlinear equations using family of Jarratt methods / Mustafa Q. Khirallah, M. A. Hafiz // International Journal of Differential Equations and Applications. – 2013. – Vol.12. – № 2 .– P. 69-83.
12. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р. М. Кроновер. – Москва : Постмаркет, 2000. – 352 с.

*Стаття надійшла _08_._07_._2015_*
*Прийнято до друку _15_._07_._2015_*

Аннотация

М. А. Жмурко, Н. А. Красношлык

Сравнение многошаговых итерационных методов высших порядков решения нелинейных уравнений и систем

В работе рассмотрены многошаговые итерационные методы 6-го и 12-го порядка сходимости для нахождения простого корня нелинейного уравнения, которые относятся к семейству методов Джарратта. Приведены методы 4-го порядка для решения систем нелинейных уравнений. Проведена серия вычислительных экспериментов на тестовых примерах для сравнения представленных методов с классическим методом Ньютона. Построены области притяжения для трёхшаговых итерационных методов нахождения корней уравнения.

Ключевые слова: *нелинейное уравнение, система нелинейных уравнений, многошаговый метод, метод Джарратта, порядок сходимости метода.*

Summary

M. A. Zhmurko, N. O. Krasnoshlyk

Comparison of multipoint iterative higher-order methods for solving nonlinear equations and systems

The paper discusses the multipoint iterative methods 6-th and 12-th order convergence for finding a simple root of the nonlinear equation, which belong to the family of Jarratt methods. The methods of 4-th order for solving systems of nonlinear equations are shown. A series of numerical experiments with test examples for comparison presented methods with the classical method of Newton are conducted. Find basin of attraction for threepoint iterative method for finding the roots of the equation.

Keywords: *nonlinear equation, system of nonlinear equations, multipoint method, Jarratt method, order of convergence.*