УДК 517.8 **Л.С. Коряшкіна**

РОЗШИРЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Введено новий клас задач оптимального розбиття множин n-вимірного евклідового простору – неперервні лінійні задачі оптимального мультиплексного розбиття множин. Обґрунтовано вибір назви нового класу задач. Наведена їх економічна інтерпретація. Показано, що неперервні лінійні задачі оптимального розбиття множин, добре вивчені до теперішнього часу, є окремими випадками представлених в даній роботі задач. Отримані умови, за яких клас допустимих мультиплексних розбиттів заданої множини в задачах з обмеженнями не є порожній. Наведені різні окремі постановки задач мультиплексного розбиття континуальної множини.

Ключові слова. *Розбиття k-ого порядку множини, оптимальне мультиплексне розбиття множини, діаграми Вороного вищих порядків, неперервні задачі оптимального розбиття множин.*

Вступ

Одним з напрямків сучасної теорії оптимізації, що активно розвивається протягом останнього півстоліття, є задачі оптимального розбиття множин (ОРМ) і пов’язані з ними задачі оптимальної організації сервісних або виробничих мереж [1 – 19 та ін.]. В англомовній літературі такі задачі відомі як «*Optimal set partitioning problem*», «*Facility location problem*», «*Continuous Location-Allocation Problem*». Основною проблемою, що вирішується за допомогою моделей та методів ОРМ, є поділ ринкового регіону на декілька сервісних підрегіонів, які обслуговуються лише одним сервісним центром. Рішення про розміщення сервісних підприємств, як правило, супроводжується множиною альтернативних варіантів розбиття клієнтів, яких обслуговує кожен центр. Критерієм вибору оптимального розбиття може бути мінімізація витрат на надання або отримання тієї чи іншої послуги. Прикладами пар «сервісний центр – клієнти» можуть виступати: підприємства і споживачі, автоматичні телефонні станції і телефонні абоненти, школи та школярі, виборчі дільниці і виборці, лікарні і пацієнти і т. д.

У переважній більшості моделей задач розбиття приймають, що споживачі розміщені дискретно, як «центри тяжіння» поштових індексів. Таке припущення, в основному, продиктовано обмеженими можливостями здатності розрізняти об'єкти, а також обчислювальною складністю вирішення проблем розміщення-розбиття з великою щільністю розміщення клієнтів. В [4, 5] показано, що і дискретна модель, і задача розміщення-розбиття на площині є NP-повними задачами. Докладний огляд дискретних задач ОРМ представлений у роботах [3, 7, 14].

Задачі, в яких множина, що підлягає розбиттю, є континуальною в науковій літературі називають неперервними задачами розбиття. Такі задачі вивчаються, наприклад, в роботах [1, 2, 6 – 16 та ін.]. У деяких наукових працях до задачі розміщення-розбиття на площині з неперервно розподіленим попитом застосовуються методи обчислювальної геометрії [20].

В роботі [15] наведені різні постановки неперервних задач оптимального розбиття множин, описаний єдиний підхід, на якому базуються методи і алгоритми розв’язання таких задач. Особливістю цього підходу для лінійних задач ОРМ є той факт, що розв'язок вихідних нескінченновимірних задач оптимізації вдається отримати аналітично в явному вигляді, причому в аналітичний вираз можуть входити параметри, які є оптимальними розв'язками допоміжних скінченновимірних задач оптимізації з негладкими цільовими функціями.

Як вже зазначалося, типовими представниками неперерывних задач ОРМ, добре вивчених до теперішнього часу, є задачі розміщення сервісних центрів з одночасним розбиттям регіону, неперервно заповненого клієнтами, на області споживачів, кожна з яких обслуговується лише одним сервісним центром.

Метою статті є математична формалізація оптимізаційних задач розбиття заданого регіону на області, які охоплюють клієнтів, що мають одні й ті самі k найближчі сусідні сервісні центри з N існуючих (або можливих).

Передбачається, що клієнти кожної області можуть обслуговуватися будь-яким з найближчих k центрів.

Такі постановки задач ОРМ будуть корисні, наприклад, для вивчення конкуренції між сервісними центрами, виявлення для кожного центру його реальної сфери діяльності з урахуванням своїх потужностей, а також додаткової інформації про можливості конкуруючих сервісних центрів, величину попиту в кожній точці заданого регіону тощо.

Далі буде показано, що нові постановки оптимізаційних задач, представлені в даній роботі, є розширенням класу лінійних неперервних задач оптимального розбиття множин (ОРМ) n-вимірного евклідового простору – некласичних задач нескінченновимірного математичного програмування [15].

Виклад основного матеріалу

Обґрунтування вибору назви для нового класу задач ОРМ. В назві нових задач розбиття можна вказувати порядок розбиття за аналогією з тим, як в обчислювальній геометрії, за сформованою термінологією, при побудові множини точок, які мають в якості найближчих k сусідів один і той же набір k центрів з N існуючих (можливих), виходить клітинка Вороного k-го порядку, а сукупність всіх можливих таких клітинок, асоційованих з N точками-генераторами (центрами), називається діаграмою Вороного k-го порядку [20].

В англійській мові є такі слова: «duplex» (серед варіантів перекладу якого значаться: розрахований на дві сім'ї, спарений, подвійний), «triplex» (строєний, потрійний), «multiplex» (комплексний, складний, складений). На думку автора, вдалим, загальним для всіх розглянутих тут нових задач ОРМ, буде назва «**задачі оптимального мультиплексного розбиття множин**». Серед них можна окремо виділяти задачі оптимального дуплексного розбиття множин (неперервні задачі оптимального розбиття другого порядку множин), задачі оптимального триплексного розбиття множин (неперервні задачі оптимального розбиття третього порядку множин) і т.д. Для більш детального уточнення задач мультиплексного розбиття, що розглядаються, можна додавати до назви «неперервні лінійні» за прийнятою в теорії ОРМ [15, 16] термінологією. Тут перше слово означає, що розбивається континуальна множина, друге вказує на властивість функціоналу і обмежень, що складають задачу.

Слід розрізняти введене автором поняття «мультиплексного» розбиття від «багатократного» розбиття множини. У першому випадку розбиття асоціюється з N однорідними точками, що називаються центрами, і область розбивається на підмножини точок з однаковим набором k найближчих сусідів із зазначених N центрів. У другому випадку проводять звичайне розбиття заданої множини, але кілька разів. Так відбувається, наприклад, при розв'язанні багатостадійних (багатоетапних) задач ОРМ, в яких сервісні центри розрізняються за категоріями, а розбиття клієнтів здійснюється для кожної категорії окремо [18]. З багатократним розбиттям мають справу також при розв'язанні багатопродуктових задач ОРМ, в яких вважається, що кожен сервісний центр може надавати кілька послуг, і розбиття множини клієнтів здійснюється за кожним видом сервісу окремо [15,16,19].

Математичні постановки неперервних лінійних задач оптимального мультиплексного розбиття множин. Сформулюємо спочатку найбільш загальну математичну постановку неперервної лінійної задачі оптимального мультиплексного розбиття множини, в якій поряд з розбиттям необхідно знайти невідомі координати центрів з урахуванням їх потужностей. Потім приведемо різні окремі випадки такої задачі.

Відразу ж зауважимо, що математичні моделі задач оптимального мультиплексного розбиття множин будемо представляти, використовуючи прийняту в теорії неперервних задач ОРМ термінологію і символіку [15,16], щоб надалі продемонструвати включення неперервних лінійних задач ОРМ у новий клас.

Нехай Ω – обмежена, вимірна за Лебегом замкнена множина у просторі E_n, $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right) \in \Omega$, для всіх $i = 1,\ldots,N$, – деякі точки, що звуться «центрами» (вони можуть бути фіксованими або підлягати визначенню).

Введемо наступні позначення: $\mathrm{N}=\{1,2,...,N\}$ – множина всіх індексів заданих центрів; $\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$ – множина всіх k-елементних підмножин множини N, $|\mathrm{M}(\mathrm{N},k)|=C_N^k=L$; $\sigma_l=\{j_1^l,j_2^l,...,j_k^l\}$, $l=\overline{1,L}$, – елементи множини $\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$. Будемо асоціювати з кожним елементом σ_l множини $\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$ деяку підмножину Ω_{σ_l} точок із Ω, $l=1,2,...,L$. В свою чергу, з цією підмножиною Ω_{σ_l} будемо пов'язувати набір центрів $\{\tau_{j_1^l},\tau_{j_2^l},...,\tau_{j_k^l}\}$.

Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}$ з $\Omega\subset E_n$ назвемо **розбиттям k-го порядку** множини Ω на її підмножини $\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}$, що не перетинаються, якщо $\bigcup_{i=1}^{L}\Omega_{\sigma_i}=\Omega$, $\operatorname{mes}\left(\Omega_{\sigma_i}\bigcap\Omega_{\sigma_j}\right)=0$, $i\neq j$, $i,j=1,\ldots,L$, де $\operatorname{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега.

Будемо називати підмножини $\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}$ множини Ω підмножинами k-го порядку цієї множини.

Нехай $\Sigma_{\Omega}^{N,k}$ – клас всіх можливих **розбиттів k-го порядку** множини Ω на її підмножини $\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}$, що не перетинаються:

$$\Sigma_{\Omega}^{N,k}=\left\{\overline{\omega}=\left\{\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}\right\}:\ \bigcup_{i=1}^{L}\Omega_{\sigma_i}=\Omega,\ \sigma_i\in\mathrm{M}(\mathrm{N},k),\ \operatorname{mes}\left(\Omega_{\sigma_i}\bigcap\Omega_{\sigma_j}\right)=0,\ i\neq j,\ i,\ j=1,\ldots,L\right\}.$$

Введемо у розгляд функціонал:

$$F(\overline{\omega},\tau^N)=F\left(\left\{\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}\right\},\left\{\tau_1,...,\tau_N\right\}\right)=\sum_{l=1}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\sum_{i\in\sigma_l}\left(c(x,\ \tau_i)/w_i+a_i\right)\rho(x)dx \qquad (1),$$

де $c(x,\ \tau_i)$ – дійсні обмежені визначені на $\Omega\times\Omega$ функції, вимірні по x при будь-якому фіксованому $\tau_i\in\Omega$ для всіх $i=1,\ldots,N$; $\rho(x)$ – обмежена, вимірна, невід'ємна на Ω функція; $w_i>0,\ a_i\geq 0,\ i=\overline{1,N}$, – задані числа.

Зауважимо, що при формулюванні задач ОРМ в якості функцій $c(x,\ \tau_i)$ часто виступають наступні метрики: $c(x,\tau_i)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x^j-\tau_i^j\right)^2}$ – евклідова, $c(x,\tau_i)=\sum_{j=1}^{n}\left|x^j-\tau_i^j\right|$ – Манхеттенська, $c(x,\tau_i)=\max_{j=1,\ldots,n}\left\{\left|x^j-\tau_i^j\right|\right\}$ – Чебишева.

Під неперервною лінійною задачею оптимального розбиття k-го порядку множини $\Omega \subset E_n$ на її підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots, \Omega_{\sigma_L}$, що не перетинаються і серед яких можуть бути порожні, при обмеженнях у формі рівностей і нерівностей із розміщенням центрів $\tau_1, ..., \tau_N$ будемо розуміти наступну задачу.

Задача A-k. $F\left(\left\{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots \Omega_{\sigma_L}\right\}, \left\{\tau_1, ..., \tau_N\right\}\right) \to \min\limits_{\substack{\left\{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots \Omega_{\sigma_L}\right\} \in \Sigma_\Omega^{N,k} \\ \left\{\tau_1, ..., \tau_N\right\} \in \Omega^N}}$,

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^{L} \int\limits_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, ..., p, \quad \sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^{L} \int\limits_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx \le b_i, \quad i = p+1, .., N, \tag{2}$$

де $x = \left(x^{(1)}, ..., x^{(n)}\right) \in \Omega$; $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)}, ..., \tau_i^{(n)}\right) \in \Omega$; функції $c\left(x, \tau_i\right)$ – обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні по аргументу x при будь-якому фіксованому $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)}, ..., \tau_i^{(n)}\right)$ із Ω для всіх $i = 1, .., N$; координати $\tau_i^{(1)}, ..., \tau_i^{(n)}$ центру τ_i, $i = 1, .., N$, наперед невідомі; $\rho(x)$ – обмежена, вимірна, невід'ємна на множині Ω функція; $w_i > 0, a_i \ge 0, b_i \ge 0, i = \overline{1, N}$, – задані числа. Коефіцієнти γ_j^l у лівих частинах обмежень такі, що для всіх $j = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$:

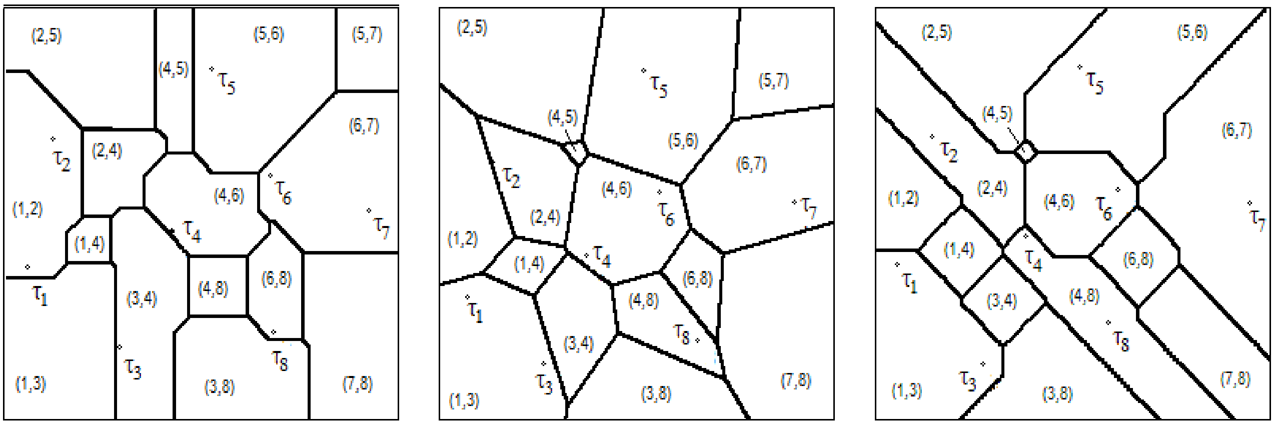
$$0 \le \gamma_j^l \le 1, \ \gamma_{j_1^l}^l + \gamma_{j_2^l}^l + \ldots + \gamma_{j_k^l}^l = 1 \tag{3}$$

Тут $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, ..., j_k^l\}$ – набір індексів центрів $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, ..., \tau_{j_k^l}\}$, що асоціюються з підмножиною Ω_{σ_l}, $\sigma_l \in \mathrm{M}(\mathrm{N}, k)$, $l = \overline{1, L}$.

Пару $\left(\overline{\omega}^*, \tau_*^N\right) = \left(\left\{\Omega_{\sigma_1}^*, \Omega_{\sigma_2}^*, \ldots \Omega_{\sigma_L}^*\right\}, \left\{\tau_1^*, \tau_2^*, \ldots \tau_N^*\right\}\right)$, що доставляє мінімальне значення функціоналу F і задовольняє обмеження (2), будемо називати **оптимальним розв'язком задачі A-k.**

Стисло задачу **A**-k будемо називати *задачею оптимального мультиплексного розбиття множини при обмеженнях з розміщенням центрів*.

На рис. 1 зображено розбиття 2-ого порядку множини $\Omega \subset E_2$ з центрами $\tau_i, i = 1, 2, ..., 8$ у випадку, коли функціями $c(x, \tau_i)$ у виразі функціоналу (1) виступають метрики: манхеттенська (*а*), евклідова (*б*), Чебишева (*в*); $w_i = 1, a_i = 0, i = \overline{1, 8}$. Обмеження (2) відсутні. Для кожної підмножини Ω_{σ_l}, яка входить у розбиття Ω, вказана пара індексів (j_1^l, j_2^l) центрів, що відповідають цій підмножині. Неважко помітити, з $L = C_8^2 = 28$ підмножин $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots \Omega_{\sigma_L}$, які складають дуплексне розбиття множини Ω, лише 15 (рис. 1, *а*, *б*) і 14 (рис. 1, *в*) є непорожніми. На кількість порожніх підмножин, що входять у мультиплексне розбиття множини, впливає не лише положення центрів $\tau_i, i = 1, 2, ..., 8$, але і вибір метрики. Так, наприклад, усі розбиття, представлені на рис. 1, не містять підмножини, що відповідають парам індексів (1,5), (4,7) та ін. У розбитті, зображеному на рис. 1, *в*, порожньою виявилася і підмножина, яка відповідає парі центрів з індесками (5,7).



а *б* *в*

Рис. 1 Дуплексне розбиття квадрата для восьми центрів у випадку метрики: *а* – Манхеттенської; *б* – евклідової; *в* – Чебишева

Якщо в задачі **А**-k, наприклад, зафіксувати центри $\tau_i, i = 1, 2, ..., N$, або виключити обмеження (2), то отримаємо різні окремі випадки задач оптимального мультиплексного розбиття множин. Далі представимо три такі постановки задачі **А**-k. Всі умови на функції, що входять в постановки задач, наведених нижче, залишаються такими самими, як і в задачі **А**-k.

Задача А1-k**.** Неперервна лінійна задача оптимального розбиття k-го порядку множини $\Omega \subset E_n$ на її підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots \Omega_{\sigma_L}$, що не перетинаються (серед яких можуть бути порожні), з фіксованими координатами центрів $\tau_1, ..., \tau_N$ без обмежень:

$$F\left(\left\{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots \Omega_{\sigma_L}\right\}\right) \to \min_{\left\{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots \Omega_{\sigma_L}\right\} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k}},$$

$$F\left(\left\{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots \Omega_{\sigma_L}\right\}\right) = \sum_{l=1}^{L} \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} \left(c(x, \tau_i)/w_i + a_i\right) \rho(x) dx,$$

де $\sigma_l \in \mathrm{M}(\mathrm{N},k)$, $l=\overline{1,L}$, $\tau=\left(\tau_1,...,\tau_i,...,\tau_N\right)\in\Omega^N$, координати $\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}$ центра τ_i, $i=1,...,N,$ фіксовані.

Якщо в задачі A1-*k* координати центрів $\tau_1,...,\tau_N$ невідомі заздалегідь і їх необхідно визначити поряд з розбиттям k-го порядку $\overline{\omega}^*=\left\{\Omega^*_{\sigma_1},\Omega^*_{\sigma_2},\ldots\Omega^*_{\sigma_L}\right\}$ множини $\Omega\subset E_n$, то отримаємо нову задачу.

Задача А2-k. Неперервна лінійна задача оптимального розбиття k-го порядку множини $\Omega\subset E_n$ на її підмножини $\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}$, що не перетинаються і сред яких можуть бути порожні, без обмежень з розміщенням центрів $\tau_1,...,\tau_N$:

$$F\left(\left\{\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}\right\},\left\{\tau_1,...,\tau_N\right\}\right)\to\min_{\substack{\left\{\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}\right\}\in\Sigma_\Omega^{N,k}\\ \left\{\tau_1,...,\tau_N\right\}\in\Omega^N}},$$

де функціонал має вигляд (1).

Задача А3-k. Неперервна лінійна задача оптимального розбиття k-го порядку множини $\Omega\subset E_n$ на її підмножини $\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}$, що не перетинаються і серед яких можуть бути порожні, при обмеженнях у формі рівностей і нерівностей із заданими координатами центрів $\tau_1,...,\tau_N$:

$$F\left(\left\{\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}\right\}\right)\to\min_{\left\{\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}\right\}\in\Sigma_\Omega^{N,k}},$$

$$F\left(\left\{\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}\right\}\right)=\sum_{l=1}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\sum_{i\in\sigma_l}\left(c(x,\ \tau_i)/w_i+a_i\right)\rho(x)dx,$$

$$\sum_{\substack{l=1\\ l:i\in\sigma_l}}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\gamma_i^l\rho(x)dx=b_i,\quad i=1,...,p,\qquad \sum_{\substack{l=1\\ l:i\in\sigma_l}}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\gamma_i^l\rho(x)dx\le b_i,\quad i=p+1,..,N,$$

де $x=\left(x^{(1)},...,x^{(n)}\right)\in\Omega$; $\tau_i=\left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right)\in\Omega$; координати $\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}$ центру τ_i, $i=1,..,N$, фіксовані; $w_i>0, a_i\ge 0, b_i\ge 0, i=\overline{1,N}$, − задані числа. Коефіцієнти γ_j^l такі, що для всіх $j=\overline{1,N}, l=\overline{1,L}$: $0\le\gamma_j^l\le 1,\ \gamma_{j_1^l}^l+\gamma_{j_2^l}^l+...+\gamma_{j_k^l}^l=1$; $\sigma_l=\{j_1^l,j_2^l,...,j_k^l\}\in\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$, $l=\overline{1,L}$.

Економічна інтерпретація обмежень на потужності центрів (2)**.** Нехай розглядається співіснування однотипних сервісних центрів (які надають подібні за ціною і якістю послуги або випускають один і той же товар), споживачами яких є певний прошарок суспільства. Попит на цю послугу в кожній точці x

області Ω за допомогою маркетингових досліджень можна оцінити. Нехай $\rho(x)$ – функція, яка апроксимує попит, а величини $b_1, b_2, ..., b_N$ – так звані «потужності» сервісних центрів, що визначають максимальний об'єм послуг або продукції, який можуть запропонувати відповідні центри. Константи γ_j^l відображають частину ринку послуг, яку j-е підприємство займає на території Ω_{σ_l}, серед підприємств $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, ..., \tau_{j_k^l}\}$, що обслуговують дану територію. Якщо припустити, що ринок послуг (товару) розділений між підприємствами на всій області Ω пропорційно їхнім потужностям, то для всіх $l = \overline{1, L}$ і для всіх $j = \overline{1, N}$, таких, що $j \in \sigma_l$, величина γ_j^l може бути задана наступним виразом: $\gamma_j^l = b_j / \sum\limits_{q: q \in \sigma_l} b_q$. При таких припущеннях обмеження-рівності у (2) вказують на те, що всі можливості центрів τ_i, $i = 1, .., p$, мають бути повністю реалізовані, а обмеження-нерівності – на те, що можливості решти центрів τ_i, $i = p+1, .., N$, обмежені.

Неперервні лінійні задачі ОРМ як окремі випадки задачі А-k. Покажемо, що при $k = 1$ задачі **А-k, А1-k, А2-k, А3-k** представляють собою неперервні лінійні задачі оптимального розбиття множин, детально вивчені в [15]. Дійсно, якщо $k = 1$, то множина $\mathrm{M(N,1)}$ складається із N елементів виду: $\sigma_l = \{j_1^l\} = \{l\}$, $l = \overline{1, N}$. Сукупність підмножин $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_N$ із Ω, що задовольняють умовам: $\bigcup\limits_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega$, $\mathrm{mes}\left(\Omega_i \cap \Omega_j\right) = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, N$, є **розбиттям 1-го порядку** множини Ω на її підмножини $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_N$, що неперетинаються, (або просто розбиттям множини Ω на N підмножин, що не перетинаються [15]) . Клас всіх можливих розбиттів **1-го порядку** множини Ω на її підмножини $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_N$ задається наступним чином:

$$\Sigma_\Omega^N = \left\{ \overline{\omega} = \left\{ \Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_N \right\} : \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \mathrm{mes}\left(\Omega_i \cap \Omega_j\right) = 0, i \neq j, i, j = 1, \ldots, N \right\}.$$

Функціонал задачі ОРМ має вигляд:

$$F(\overline{\omega}) = F\left(\left\{ \Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_N \right\}\right) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} \left(c(x,\ \tau_i) / w_i + a_i \right) \rho(x) dx,$$

а умови (2), з урахуванням того, що коефіцієнти γ_j^l у лівих частинах обмежень такі, що для всіх $j=\overline{1,N}$, $l=\overline{1,L}$ (нагадаємо, що $L=N$) виконується умова (3), записуються так:

$$\sum_{\substack{l=1\\ l:i\in\sigma_l}}^{N}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\gamma_i^l\rho(x)dx=\int_{\Omega_i}\rho(x)dx=b_i,\quad i=1,...,p\,,\qquad \sum_{\substack{l=1\\ l:i\in\sigma_l}}^{N}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\gamma_i^l\rho(x)dx=\int_{\Omega_i}\rho(x)dx\le b_i,\quad i=p+1,..,N\,.$$

Отже, введений клас неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин як окремий випадок включає в себе клас неперервних лінійних задач ОРМ, детально вивчених в роботах [6, 15].

Розв'язність мультиплексних задач оптимального розбиття множин при обмеженнях у формі рівностей і нерівностей. Для коректності поставленних задач **А-**k і **АЗ-**k праві частини нерівностей (2) мають задовольняти деяким умовам, за яких задача мала б розв'язок.

Лема 1. Нехай $S=\int_{\Omega}\rho(x)dx$. Для того, щоб в задачі **А-**k (або **АЗ-**k) при будь-якому наборі центрів τ_i, $i=1,..,N$, клас допустимих розбиттів k-го порядку множини Ω був **непорожній,** достатньо, щоб виконувались умови:

$$0\le b_i\le S,\quad i=1,...,N\,; \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{p}b_i\le S\le\sum_{i=1}^{N}b_i \tag{5}$$

Доведення. Нехай τ_i, $i=1,..,N$, – довільний, але фіксований набір центрів. Допустимим розбиттям k-го порядку в задачі **А-**k (або **АЗ-**k) є розбиття $\overline{\omega}=\left\{\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}\right\}\in\Sigma_{\Omega}^{N,k}$, для якого виконуються умови (2). Просумуємо ліві частини обмежень (2) по всім $i=1,...,N$, позначивши отриману суму $\overline{S}$:

$$\overline{S}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{\substack{l=1\\ l:i\in\sigma_l}}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\gamma_i^l\rho(x)dx+\sum_{i=p+1}^{N}\sum_{\substack{l=1\\ l:i\in\sigma_l}}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\gamma_i^l\rho(x)dx=\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{l=1\\ l:i\in\sigma_l}}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\gamma_i^l\rho(x)dx=$$

$$=\sum_{l=1}^{L}\sum_{\substack{i=1\\ i:i\in\sigma_l}}^{N}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\gamma_i^l\rho(x)dx=\sum_{l=1}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\sum_{\substack{i=1\\ i:i\in\sigma_l}}^{N}\gamma_i^l\rho(x)dx\,.$$

Константи γ_j^l такі, що для всіх $j=\overline{1,N}$, $l=\overline{1,L}$, виконується умова (3): $0\le\gamma_j^l\le 1$ і

$$\sum_{\substack{i=1\\ l:i\in\sigma_l}}^{N}\gamma_i^l=\gamma_{j_1^l}^l+\gamma_{j_2^l}^l+\ldots+\gamma_{j_k^l}^l=1 \qquad (6)$$

Враховуючи (6) і той факт, що $\overline{\omega}=\left\{\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}\right\}\in\Sigma_{\Omega}^{N,k}$, можна записати:

$$\overline{S}=\sum_{l=1}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\sum_{\substack{i=1\\ l:i\in\sigma_l}}^{N}\gamma_i^l\rho(x)dx=\sum_{l=1}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\rho(x)dx=\int_{\Omega}\rho(x)dx=S\,.$$

Отже, має місце права частина подвійної нерівності (5).

Просумуємо тепер лише обмеження-рівності у (2) і порівняємо отриману суму з величиною S:

$$\sum_{i=1}^{p}b_i=\sum_{i=1}^{p}\sum_{\substack{l=1\\ l:i\in\sigma_l}}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\gamma_i^l\rho(x)dx\le\sum_{i=1}^{p}\sum_{\substack{l=1\\ l:i\in\sigma_l}}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\gamma_i^l\rho(x)dx+\sum_{i=p+1}^{N}\sum_{\substack{l=1\\ l:i\in\sigma_l}}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\gamma_i^l\rho(x)dx=S\,.$$

Очевидно, що при виконанні умов (4), (5) для довільного фіксованого набору центрів τ_i, $i=1,..,N$, розбиття k-го порядку множини Ω, яке задовольняє обмеженням (2), завжди існує, що і треба було довести.

Висновок

Таким чином, в роботі представлені задачі мультиплексного розбиття континуальних множин, які є новими за своєю математичною постановкою, але включають у себе як окремий випадок неперервні задачі оптимального розбиття множин, детально вивчені в [15]. При розв'язанні неперервних задач ОРМ часто результуючим розбиттям заданої обмеженої множини є діаграма Вороного, точками-генераторами якої виступають сервисні центри. В [17] показано, що будувати діаграми Вороного першого порядку (або стандартні, звичайні) і їх різні узагальнення можна на основі єдиного підходу: формулювання неперервної лінійної задачі оптимального розбиття множини з критерієм якості розбиття, що забезпечує відповідний вигляд діаграми Вороного, і застосування математичного і алгоритмічного апарату розв'язання таких задач. Представлений тут новий клас неперервних лінійних задач оптимального мультиплексного розбиття множин відкриває можливість застосування аналогічної схеми для побудови діаграм Вороного вищих порядків та їхніх різноманітних узагальнень (зважених, з обмеженнями на площі клітинок Вороного, з урахуванням потужностей точок-генераторів, з оптимальним розміщенням точок-генераторів у заданій обмеженій області), про які раніше у науковій літературі не згадувалося. Дослідження властивостей нових задач і їх оптимальних розв'язків триває.

Література

1. Francis R. L. Sufficient conditions for some optimum – property fasility design // Oper. Res. – 1967. – V. 15. – № 3. – P. 448 – 466.
2. Corley H.W. Duality relationships a partitioning problem / H.W. Corley, S.D. Roberts // SIAM. J. Appl. Math. – 1972. – V. 23. – № 4. – P.490 – 494.
3. Balas E. Set partitioning: a survey / E. Balas, M.W. Padberg // Comb. Optimiz. Lect. summer Sch. Comb. Optimmiz. urbino, 1977. Chichester e.a. 1979. – P. 151 – 210.
4. Kariv O, Hakimi SL. An algorithmic approach to network location problems: Part 1, The p-Centers; Part 2, The p-Medians. SIAM Journal on Applied Mathematics 1979. – V. 37. – P. 513 – 560.
5. Megiddo N, Supowit KJ. On the complexity of some common geometric location-problems. SIAM Journal on Computing 1984; 13:182-196.
6. Kiseleva E. M. An algorithm for solving the problem of optimal partitioning under constraints / E. M. Kiseleva // Cybernetics, 1983. – V. **19**, No. 1. – P. 115–120.
7. Current J., Min H., Schilling D. Multiobjective analysis of facility location decisions // European Journal of Operational Research, 49. – 1990. – 295 – 307
8. Drezner T, Drezner Z. Replacing continuous demand with discrete demand in a competitive location model. Naval Research Logistics 1997. – V. 44. – P. 81 – 95.
9. Wang CY, Gao CY, Shi ZJ. An algorithm for continuous type optimal location problem. Computational Optimization and Applications 1997. – V. 7. – P. 239 – 253.
10. Bast H., Hert S. The Area Partitioning Problem // 12th Canadian Conference on Computational Geometry. CCCG 2000, Fredericton, New Brunswick. – 163 – 171.
11. Dasci A, Verter V. A continuous model for production-distribution system design. European Journal of Operational Research 2001. – V. 129. – P. 287 – 298.
12. Durocher S. Geometric Facility Location under Continuous Motion. Bounded-Velocity Approximations to the Mobile Euclidean k-Centre and k-Median Problems // The University of British Columbia, 2006. – 260 p.
13. Murat A., Verter V., Laporte G. A Continuous Analysis Framework for the Solution of Location-Allocation Problems with Dense Demand // Les Cahiers du GERAD. – G – 2008. – 42 pp.
14. Farahani R. Z. Facility location. Concepts, models, algorithms and case studies. Springer – Verlag. / R.Z. Farahani , M. Hekmatfar (eds.). – Berlin, Heidelberg. – 2009. – 530 pp.
15. Киселева Е. М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монография / Е. М. Киселева, Н. З. Шор. – К.: Наукова думка, 2005. – 564 с.
16. Киселева Е.М. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К.: Наукова думка, 2013. – 606 с.

17. Kiseleva E. M. Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations. I. Theoretical Foundations / E. M. Kiseleva, L. S. Koriashkina // Cybernetics and Systems Analysis. – May 2015, Volume 51, Issue 3. – P. 325 – 335.
18. Ус С. А. О математических моделях многоэтапных задач размещения предприятий / С. А. Ус, О. Д. Станина // Питання прикладної математики і математичного моделювання Дніпропетровськ. Видавництво «Ліра», 2014. – С. 258 – 268.
19. Киселева Е. М. Алгоритм решения нелинейной непрерывной многопродуктовой задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств / Е. М. Киселева, В. А. Строева // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 1. – С. 40 – 53.
20. Препарата Ф. Вычислительная геометрия: Введение. / Ф. Препарата, М. Шеймос. Под редакцией Ю. М. Банковского. – М.: Мир, 1989. – 478 с.

Стаття надійшла _26_._06_._2015___
Прийнято до друку _14_._07_._2015___

Аннотация

Л.С. Коряшкина

Расширение одного класса бесконечномерных оптимизационных задач

Введен новый класс задач оптимального разбиения множеств n-мерного евклидова пространства – непрерывные линейные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств. Обоснован выбор названия нового класса задач. Приведена их экономическая интерпретация. Показано, что частными случаями представленных в данной работе задач являются хорошо изученные до настоящего времени непрерывные линейные задачи оптимального разбиения множеств. Получены условия, при которых в задачах с ограничениями класс допустимых мультиплексных разбиений заданного множества не является пустым.

Ключевые слова: *разбиение k-ого порядка множества, оптимальное мультиплексное разбиение множества, диаграммы Вороного высших порядков, непрерывные задачи оптимального разбиения множеств*

Summary

L.S. Koriashkina

Extension of one class of infinite-dimensional optimization problems

A new class of problems optimal partitioning of sets from an n-dimensional Euclidean space is presented. These are linear problems of optimal multiplex-partitioning of sets. The choice of the name of a new problem class is substantiated. Their economic interpretation is given. It is shown that continuous linear problems of optimal sets partitioning, well studied to date, are particular cases of presented in this paper problems. The conditions under which in problems with constraints the class of admissible multiplex partitions of a given set is not empty.

Key words: *a partitioning of k-th order, the optimal multiplex-partitioning of set, Voronoi diagrams of higher orders, the continuous problem of optimal sets partitioning*