УДК 519.85 **О.О.ЄМЕЦЬ,Т.В.ЧІЛІКІНА**

ЗАДАЧА КОМІВОЯЖЕРА: НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ ТА МЕТОД ГІЛОК ТА МЕЖ

У публікації розглядається нова модель задачі комівояжера як задача нелінійної оптимізації на множині перестановок , її рішення методом гілок і меж . Сформульовано та доведено теореми про методи розгалуження множини допустимих рішень і відсікання допустимих підмножин , отримані оцінки допустимих підмножин в рамках методу гілок і меж .

Ключеві слова: *задача комівояжера, оптимізації на множинах переставленнях, метод гілок та меж.*

Вступ

Задача комівояжера є явним полігоном для апробації різних підходів до розв’язування задач комбінаторної оптимізації, і вона є достатньо добре дослідженою (див., напр., [1-5]). Разом з тим її складність надає можливість знаходити все нові і нові її властивості, що дає можливість покращувати підходи до її розв’язування.

Мета статті

Мета роботі полягає в формулюванні нової моделі задачі комівояжера і застосувати підходи, раніше розроблені авторами, для задач оптимізації на множині переставлень в рамках методу гілок та меж.

Виклад основного матеріалу

Постановка задачі та її математична модель як нелінійної задачі на спеціальній множині переставлень.

Комівояжер має, почавши з певного місця, об'їхати всі міста, повернувшись в початкове місце. Відстані між усіма містами відомі. Скласти маршрут, що мінімізує сумарний пройдений шлях.

Для побудови математичної моделі зробимо деякі попередні міркування та введемо позначення.

Нехай є n міст. Довжина шляху з міста j в місто i позначена дійсним числом c_{ij} $\forall i, j = J_n = \{1, 2, ..., n\}$ (J_n – це множина перших n натуральних чисел).

Введемо змінну x_{ij} такого змісту:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ якщо з міста } i \textit{ комівояжер переїжає в місто } j; \\ 0, \textit{в іншому разі.} \end{cases} \qquad (1)$$

Введемо в розгляд вибірку $i=\left(i_1,\ i_2,...,i_n\right),$ де i_1 – номер початкового міста,

$$i=\left(i_1,...,i_n\right)\in E_n\left(J_n\right), \tag{2}$$

де $E_n\left(J_n\right)$ позначення множини переставлень елементів множини J_n.

Зрозуміло, що допустимий маршрут визначається переставленням $i\in E_n\left(J_n\right),$ де константа $i_1=const$ є заданою, а пройдений шлях визначаються функціоналом $F:E_n\left(J_n\right)\to R^1$:

$$F\left(i\right)=\sum_{j=1}^{n-1}c_{i_ji_{j+1}}+c_{i_ni_1}\ . \tag{3}$$

Якщо маршрут визначається $i=\left(1,2,...,n\right),$ то матриця змінних x_{ij} з (1) $X=\left(x_{ij}\right)_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,n}}$ має одиничні елементи над головною діагоналлю $x_{i,i+1}=1,\ i\in J_{n-1}$ та $x_{n1}=1$ одиницю в лівому нижньому кутку (див. для $n=5$ рис.1), а інші елементи нулі.

	1	2	3	4	5
1		1			
2			1		
3				1	
4					1
5	1				

Рис.1. Матриця $X=\left(x_{ij}\right)$ для $n=5$ та $i=\left(1,2,3,4,5\right)$.

Якщо переставлення $i=\left(i_1,...,i_n\right)\in E_n\left(J_n\right)$ довільне, то така ж картина буде спостерігатися, якщо в матриці X стовпці та рядки упорядковуємо згідно цього переставлення (див.рис.2).

	i_1	i_2	i_3	$\cdots$	i_{n-1}	i_n
i_1		1				
i_2			1	…		
	…	…	…	…	…	…
i_{n-2}				…	1	
i_{n-1}				…		1
i_n	1			…		

Рис.2. Матриця $X=\left(x_{ij}\right)_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,n}}$ для довільного $i=\left(i_1,...,i_n\right)$

Такі міркування надають можливість стверджувати, що справедливі такі співвідношення:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J_n \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in J_n \tag{5}$$

$$x_{i_1 i_2} \cdot x_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot x_{i_{n-1} i_n} \cdot x_{i_n i_1} = 1, \tag{6}$$

$$i_1 = const,\ i \in J_n \ . \tag{7}$$

Зрозуміло, що в матриці X є рівно n одиниць та отже $n^2 - n$ нулів. Введемо в розгляд мультимножину B, що має такі ж елементи як і X: $B = \left\{0^{n^2-n}; 1^n\right\}$ з основою $S(B) = (0,\ 1)$ та первинного специфікацією $[B] = \left(n^2 - n; n\right)$. Тоді довільна матриця X з названою властивістю означає не лінійність вектора $x = \left(x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nn}\right)$ до множини переставлень з n^2 елементів мультимножини B:

$$x \in E_{n^2,2}(B) \tag{8}$$

Функціонал (3) еквівалентний такому:

$$f(i,x) = \sum_{j=1}^{n-1} c_{i_j, i_{j+1}} x_{i_j i_{j+1}} + c_{i_n i_1} x_{i_n i_1}. \tag{9}$$

Якщо розглянути суму мультимножин $G = B + J_n$, то задачу комівояжера можна розглянути як задачу оптимізації на множині поліпереставлень $E^2_{n^2+n,n+1}(G,H)$, де $H = \left\{\left(\pi^1, \pi^2\right) \mid \pi^1 \in E_{n^2}\left(J_{n^2}\right);\ \pi^2 \in E_n\left(J_{n^2+n} \setminus J_{n^2}\right)\right\}$, (див [6]), а $x \in E_{n^2,2}(B); i \in E_n(J_n)$, тобто за умов (2), (8).

Таким чином маємо таку модель.

Задача А. Знайти мінімум f^* цільової функцію (9)

$$f^* = \min_{(i,x) \in R^{n^2+n}} f(i,x) \tag{10}$$

за умов (2), (6)-(8), та точку

$$\left(i^*, x^*\right) \in E^2_{n^2+n,n+1}(G,H) \subset R^{n^2+1}, \tag{11}$$

на якій цей мінімум досягається.

Зауважимо, що умова (1) забезпечується умовою (2), а умова (4), (5) – умовами (2), (6), (8).

Метод гілок та меж для задачі А.

Метод гілок та меж (МГМ) передбачає визначення способів оцінювання допустимих підмножин, способів їх галуження та правил відсікання безперспективних допустимих підмножин.

Галуження відбувається, починаючи з i_1,, визначенням наступних елементів переставлення $i=(i_1,i_2,...,i_n)$. Визначається

$$c_{i_1 j_2} \le c_{i_1 j_3} \le ... \le c_{i_1 j_n}. \tag{12}$$

В кожному рядку t маємо:

$$c_{i_t j_{t+1}} \le c_{i_t j_3} \le ... \le c_{i_t j_n}, \ \ i_t, j_i \quad \forall i \in J_n \setminus \{1\}. \tag{13}$$

Продовжимо розгляд МГМ для задачі А, ілюструючи його на прикладі, умова якого взята з [7 , с.266]. Матриця довжин зв'язків в цьому прикладі така (див.рис.4).

	1	2	3	4	5	6
1	0	27	43	16	30	26
2	7	0	16	1	30	25
3	20	13	40	35	5	0
4	21	16	25	0	18	18
5	12	46	27	48	0	5
6	23	5	5	9	5	0

Рис.4. Матриця відстаней прикладу.

Задана константа $i_1=1$. Тобто перше галуження відбувається з використанням упорядкування вигляду (12), (13)

$$c_{14} \le 16 \le c_{16} \le 26 \le c_{12} \le 27 \le c_{15} \le 30 \le c_{13} \le 43 \tag{14}$$

Коли визначені $i_1,i_2,...,i_\tau$ з $i=(i_1,i_2,...,i_\tau,i_{\tau+1},...,i_n)$, тобто визначена підмножина допустимих розв'язків, то її оцінка

$$\xi = \xi_{i_1 i_2 ... i_\tau} = \nu_{i_1 i_2 ... i_\tau} + c^*_{i_1 i_2 ... i_\tau}, \tag{15}$$

де параметри (15) визначаються такими твердженнями.

Теорема 1. Оцінка допустимої підмножини $D_{i_1 i_2 ... i_\tau}$, що визначаються переставленням $i=(i_1,i_2,...,i_\tau,i_{\tau+1},...,i_n)$ визначається за (15), де

$$\nu = \nu_{i_1,i_2,\dots,i_\tau} = \sum_{j=1}^{\tau-1} c_{i_j i_{j+1}} \tag{16}$$

$$c^* = c^*_{i_1,i_2,\dots,i_\tau} = \sum_{i=1}^{n-\tau+1} \tilde{c}_i, \tag{17}$$

де мультимножина $\tilde{C} = C - C_B = \left\{\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_n\right\}$, а мультимножини $C = \left\{c_{11},\dots,c_{nn}\right\}$; $C_B = \left\{c_{i_1 i 2},\dots,c_{i_{\tau-1},i_\tau}\right\}$ та в $\tilde{C}$ елементи пронумеровані так, що

$$\tilde{c}_1 \le \tilde{c}_2 \le \dots \le \tilde{c}_q \tag{18}$$

параметр $q = \left|\tilde{C}\right|$ – це кількість елементів в $\tilde{C}$.

<u>Доведення.</u> Справедливість теореми випливає з відповідних теорем про оцінки в [8-11], та того факту, що значення змінних в цільовій функції (9) $x_{ij} = 1$ або нуль, причому одиниць n .

Отже, мінімум $\nu + f^*(i,x)$, де f^* - це функція $f(i,x)$ в якій $x_{i_1 i_2} = x_{i_2 i_3} = \dots = x_{i_{\tau-1} i_\tau} = 1$, в області її допустимих значень задаються формулою (17).

Це означає ξ в переставленні (15) є оцінкою допустимої підмножини $D_{i_1 i_2 \dots i_\tau}$ задачі А, оскільки для всіх елементів $D_{i_1 i_2 \dots i_\tau}$ та цільової функції $f(i,x)$ в представленні (9) маємо:

$$\xi \le f(i,x).$$

Що і треба було довести.

<u>Зауваження.</u> Величина ν також є оцінкою для $i_1,\dots,i_\tau$, але в силу $c^* > 0$, то є ξ кращою, бо $\xi > 0$.

Далі позначатимемо $\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_{n-\tau}$, упорядкованих за (18) вектором $\tilde{c}^{\,n-\tau+1} = \left(\tilde{c}_1,\tilde{c}_2\dots,\tilde{c}_{n-\tau+1}\right)$, при цьому маючи на увазі $\tilde{c}^{\,0} = \varnothing$.

Зауважимо, що формулу (16) можна застосувати рекурсивно:

$$\nu_{i_1} = c_{i_1 i_2}\ ;\ \nu_{i_1\dots i_\tau} = \nu_{i_1\dots i_{\tau-1}} + c_{i_{\tau-1} i_\tau} \tag{19}$$

Позначатимемо також $F(i)$ за (3) $i = (i_1,\dots,i_n)$ як

$$\xi_{i_1 i_2 \dots i_n i_1} = F(i) = F_{n_{rek}},$$

де n_{rek} - номер рекорду, з початковим значенням $n_{rek} = 0$, а $F_0 = \min_{0 \le j \le n_{rek}} F_j$.

Галуження продовжується до одноелементної множини, для якої обчислюється $F_{n_{rek}}$, після чого n_{rek} збільшується на одиницю. Далі відсікається наступний в порядку (13) другий індекс r у c_{tr}, що означається утворення наступної множини $D_{i_1 i_2 \dots i_{t_r}}$ на тому ж рівні дерева $t+1$. Вичерпання других індексів на рівні $t+1$ означається повернення на рівень t і утворення наступної підмножини згідно порядку (13) для цього t.

Дерево зручно представляти малюнком або таблицею.

Галуження відсікається за класичним правилом: якщо $\xi \geq F_0$, то підмножина відсікається. Разом з тим справедливе твердження.

Теорема 2. Якщо $v \geq F_0$, то відповідні v підмножини (вершини) відсікаються.

Доведення. За формулою (15)

$$\xi = v + c^* .$$

Елементи вихідної матриці відстаней в задачі, тобто елементи мультимножини С – невід'ємні. В силу чого, невід'ємні елементи мультимножини C_B, бо $C_B \subset C$, $C = C - C_B$. Отже, згідно (17) $C^* \geq 0$. Таким чином, якщо $v \geq F_0$, то $\xi = v + c^* \geq F_0 + c^* \geq F_0$. Отже , якщо $v \geq F_0$, то і $\xi \geq F_0$. Що і треба було довести.

Прискорити відсікання вершин (допустимих підмножин) дерева дають можливість наступні властивості оцінок в МГМ задачі А при вказаних способах оцінювання і галуження.

Теорема 3. Оцінки $\xi_{i_1 i_2 \dots i_\tau}, \xi_{i_1 \dots i_\tau j_r}, \xi_{i_1 i_2 \dots i_\tau j_s}$, де $c_{i_\tau j_r} \leq c_{i_\tau j_s}$ в (13) знаходяться у таких співвідношеннях:

$$\xi_{i_1 i_2 \dots i_\tau} \leq \xi_{i_1 i_2 \dots i_\tau j_r}, \tag{20}$$

$$\xi_{i_1 i_2 \dots i_\tau j_r} \leq \xi_{i_1 i_2 \dots i_\tau j_s}, \tag{21}$$

де $r, s \in J_n \setminus \{1\}$.

Доведення: Справедливість (20) обґрунтовується так: за (15)-(17) маємо

$$\xi_{i_1 i_2 \dots i_\tau} = v_{i_1 \dots i_\tau} + c^*_{i_1 \dots i_\tau};$$

$$\xi_{i_1 \dots i_\tau j_r} = v_{i_1 \dots i_\tau j_r} + c^*_{i_1 \dots i_\tau j_r} = v_{i_1 \dots i_\tau} + c_{i_\tau j_r} + c^*_{i_1 \dots i_\tau j_r}.$$

В силу того, що для кожної $D_{i_1 i_2 \ldots i_\tau}$ утворюється своя мультимножина $\tilde{C} = C - C_B$, але вихідна мультимножина C - одна і та сама, а в C_B для $D_{i_1 i_2 \ldots i_\tau j_r}$ входить в $\tilde{C}_{i_\tau j_r}$, то

$$c^*_{i_1 \ldots i_\tau} \le c_{i_\tau j} + c^*_{i_1 \ldots i_\tau j_r} . \tag{23}$$

Оскільки доданків в (17) в лівій і правій частинах (22) по $n-r$ і при їх упорядкуванні по не зростанню доданок в лівій частині не більше за доданок в правій частині співвідношення (23), якщо їх номер в упорядкуванні однаковий. Отже (22) справедливо. Додавши до (23) в обидві частини $v_{i_1 \ldots i_\tau}$, маємо справедливість (20).

Справедливість (21) обґрунтовується так: за (15)-(17) маємо (22) та

$$\xi_{i_1 \ldots i_\tau j_r} = v_{i_1 \ldots i_\tau} + c_{i_\tau j_s} + c^*_{i_1 \ldots i_\tau j_s} . \tag{24}$$

Розглянемо 3 випадки розташування $c' = c_{i_\tau j_r}; c'' = c_{i_\tau j_s}$ (див.рис.5-7). Нагадаємо, що за умовою теореми $c' \le c''$.

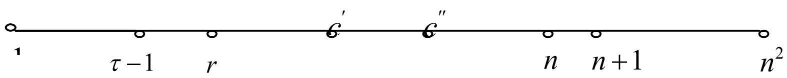

Рис.5 Перший варіант розташування c', c''.

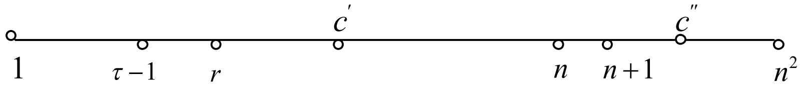

Рис.6 Другий варіант розташування c', c''.

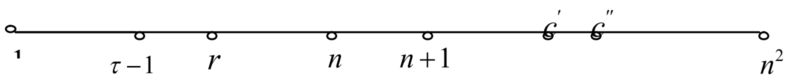

Рис.7 Третій варіант розташування c', c''

На рис.5-7 відрізок від 1 до $\tau-1$ включно ілюструє елементи $c_{i_1 i_2}, \ldots, c_{i_{\tau-1} i_\tau}$ з мультимножини C_B для допустимої підмножини $D_{i_1 i_2 \ldots i_\tau}$; відрізок від τ до n включно ілюструє мультимножину $\tilde{C}^{n-r+1}$ для цієї допустимої підмножини, а відрізок від $n+1$ до n^2 включно ілюструє для цієї підмножини мультимножину $\overline{C} = (C - C_B) - \tilde{C}^{n-\tau+1}$ - залишок елементів з C, що не потрапили в C_B та $\tilde{C}^{n-\tau+1}$.

Перший варіант (рис.5) означає, що $c^{'}, c^{''} \in C^{n-\tau+1}$. При цьому, як не важко бачити з формул (15)-(17), (22)-(24), $\xi_{i_1 i_2 \dots i_\tau j_r} = \xi_{i_1 i_2 \dots i_\tau j_s}$, оскільки доданки v та c^* обох цих оцінок складаються тільки з усіх елементів C_B та $C^{n-\tau+1}$.

Другий варіант (рис.6) означає, що $c^{'} \in C$, а $c^{''} \in \overline{C}$. При цьому в оцінці $\xi_{i_1 \dots i_\tau j_r}$ є доданок $\tilde{c}_{n-\tau+1}$ (з порядку (18)), а в оцінці $\xi_{i_1 \dots i_\tau j_s}$ цього доданку не має, а є $c^{''} = \tilde{c}_s \geq \tilde{c}_{n-\tau+1}$ (згідно розташування $c^{''}$ та порядку (18)) та є всі спільні доданки. Отже, в другому випадку розташування $c^{'}$ та $c^{''}$ маємо виконання (21).

Третій варіант (рис.7) означає, що $c^{'}, c^{''} \in \overline{C}$. При цьому в оцінках $\xi_{i_1 \dots i_\tau j_r}$ та $\xi_{i_1 \dots i_\tau j_s}$ є всі доданки з C_B, всі крім останнього в порядку (18) елемента мультимножини $C^{n-\tau+1}$. В оцінці $\xi_{i_1 \dots i_\tau j_r}$ є доданок $c^{'}$, а в оцінці $\xi_{i_1 \dots i_\tau j_s}$ є доданок $c^{''}$, оскільки $c^{'} \leq c^{''}$, то і в третьому випадку виконується (21).

Отже, (20) та (21) виконуються, що і треба було довести.

Аналогічна теорема справедлива для перших доданків v оцінок ξ з (15) допустимих підмножин, які, як зауважено після теореми 1, самі є оцінками для $D_{i_1 i_2 \dots i_\tau}$.

Теорема 4. Оцінки $v_0 = v_{i_1 \dots i_\tau}$; $v_r = v_{i_1 \dots i_\tau j_r}$; $v_s = v_{i_1 \dots i_r j_s}$, де $c' = c_{i_\tau j_r} \leq c_{i_\tau j_s} = c''$ в (13) знаходиться в таких співвідношеннях:

$$v_0 \leq v_r; \tag{25}$$

$$v_r \leq v_s, \tag{26}$$

де $r, s \in J_n \setminus \{1\}$.

Доведення. Справедливість (25), та (26) безпосередньо випливає з формули (19) та того, що $0 \leq c^{'} \leq c^{''}$.

Висновки

В роботі запропонована модель задачі комівояжера, у вигляді нелінійної задачі на множині переставлень, розглянута можливість застосування раніше розроблених авторами підходів для задач оптимізації на множинах переставленнях в рамках методу гілок та меж.

Як напрямок подальших досліджень бажано визначити рамки практичної застосовності викладеної схеми методу гілок та меж до розглянутої задачі.

Література

1. Панишев А.В. Модели и методы оптимизации замкнутых маршрутов на транспортной сети / А. В. Панишев, А. В. Морозов. – Житомир, ЖГТУ, 2014. – 316 с.
2. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М.: Мир, 1975. – 510 с.
3. Панишев А.В. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера / А.В. Панишев, Д.Д. Плечистый. – Житомир: ЖГТУ, 2006.– 300 с.
4. Мудров В.И. Задача о коммивояжере. / В.И. Мудров. — М.: «Знание», 1969. — С. 62.
5. Рейнгольд Э.Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. / Э.Рейнгольд, Ю.Нивергельт, Н. Део. — М.: Мир, 1980. — 476 с.
6. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець – К. : Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
7. Линейное и нелинейное программирование / И.Н.Ляшенко, Е.А.Карагодова, Н.В.Черникова, Н.З.Шор – К.: Вища школа, 1975. – 372 с.
8. Ємець О.О. Оцінювання допустимих множин розв'язків комбінаторної транспортної задачі на переставленнях, що розв'язується методом гілок та меж. / О.О. Ємець, Т.О. Парфьонова // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2010 – №1. – С. 21-27.
9. Чілікіна Т.В. Оцінки в методі гілок та меж для лінійної умовної задачі комбінаторної оптимізації на переставленнях / Т.В.Чілікіна, О.О.Ємець, Є.М.Ємець, Т.О.Парфьонова // Інформатика та системні науки (ІСН-2011): Матеріали ІІ Всеукраїн. наук.-прак. конф. (17-19 березня 2011, Полтава). – Полтава: РВВ ПУЕТ. − С. 328-331.
10. Ємець О.О. Оцінка в методі в методі гілок та меж для задач нелінійної умовної оптимізації на переставленнях / О.О.Ємець, Є.М.Ємець, Т.О.Парфьонова, Т.В.Чілікіна // Комбінаторні конфігурації та їх застосування: Матер. ХІ Міжвуз. наук.- практ. семін. (15-16 квіт. 2011 р., Кіровоград). – Кіровоград, 2011. – С. 74-75.
11. Ємець Є.М. Економіко-математичні нелінійної умовної оптимізації на переставленнях: метод гілок та меж / Є.М.Ємець, О.О.Ємець, Т.О.Парфьонова, Т.В.Чілікіна // Науковий вісник Полтавського університету економіки і торгівлі: Серія економічні науки. – 2011, вип.3(48). – С. 107-113.

*Стаття надійшла _20.06.2015_*
*Прийнято до друку _04.07.2015_*

Аннотация

О.А.Емец, Т.В.Чиликина

Задача коммивояжера: нелинейная моделей на перестановках и метод вервей и границ

В публикации рассматривается новая модель задачи коммивояжера как задача нелинейной оптимизации на множестве перестановок, ее решение методом ветвей и границ. Сформулированы и доказаны теоремы о методах ветвления множества допустимых решений и отсечения допустимых подмножеств, получены оценки допустимых подмножеств в рамках метода ветвей и границ.

Ключевые слова: *задача коммивояжера, оптимизации на множестве перестановок, метод вервей и границ*

Summary

O. O.Yemets, T.V.Chilikina

Traveling salesman problem: nonlinear models on permutations and methods branch and bound.

The publication describes a new the model the traveling salesman problem as a task of nonlinear optimization on the set of of permutations, its solution by the branch and bound method. Formulated and proved theorems about the methods of the branching set of admissible solutions and clipping admissible subsetsobtain estimates admissible subsets within the framework branch and bound method.

Keywords: *traveling salesman problem, branch-and-bound method.*