УДК 519.83 **О.О. Ємець, Д. М. Ольховський, О. В. Ольховська**

ТЕОРЕТИЧНА ОЦІНКА СКЛАДНОСТІ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ІГРОВОГО ТИПУ

Анотація. Серед задач комбінаторної оптимізації все актуальнішими стають задачі розв'язування конфліктних ситуацій, конкуренції, які відносяться до класу задач комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями на стратегії гравців, що визначаються комбінаторними конфігураціями, зокрема множинами перестановок та розміщень. Для таких задач необхідними є дослідження існуючих методів розв'язування, вивчення питання можливості їхньої модифікації, а також проведення числових експериментів з метою визначення їх практичної ефективності.

Ключові слова: *задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу, ітераційний метод типу Брауна-Робінсон, монотонний ітераційний метод, програмна реалізація, числові експерименти.*

Вступ

Постійний інтерес вітчизняних та зарубіжних науковців, велика кількість наукових публікацій останнього часу свідчать, що задачі комбінаторної оптимізації є перспективним та прогресивним напрямком досліджень. Серед задач комбінаторної оптимізації все актуальнішими стають задачі розв'язування конфліктних ситуацій, конкуренції, які відносяться до класу задач комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями на стратегії гравців, що визначаються комбінаторними конфігураціями, зокрема множинами перестановок та розміщень. Для таких задач необхідними є дослідження існуючих методів розв'язування, вивчення питання можливості їхньої модифікації, а також розробка нових методів розв'язування задач цього класу.

Аналіз основних досліджень і публікацій

Вважається, що вперше комбінаторна гра, яка сформулювала у вигляді математичної задачі, була викладена відомим французьким математиком Баше де Мезірьяку в 1612 році [1].

Але початок розвитку теорії комбінаторних ігор пов'язують з вченим Ернстом Цермело (XX століття), який вважав, що у грі з двома гравцями, що завершується за скінченну кількість ходів, виграшна стратегія належить першому або другому гравцеві, при цьому він допускав можливість варіанту безкінечного повторення ходів [2].

У 1902 році Чарльз Баутоп вперше провів повний аналіз деякої комбінаторної гри, назвавши її «нім» [3], що поклало початок нового витка розвитку даної теорії. Після цього чітко виокремилася тенденція в наукових колах до формулювання та розробки методів розв'язування комбінаторних ігор.

Подальший розвиток теорії комбінаторних ігор пов'язують з вченими Роландом Персіфалем Шпраго та Патріком Майклом Гранді, які незалежно один від одного опублікували розв'язок задачі визначення оптимальної стратегії в комбінаторних іграх [2].

У 1960 роках колектив вчених, до якого входили Е. Берлекемп, Д. Конвей, Р. Гай розробили теорію «пристрасних» ігор [4-6].

У XX столітті теорія комбінаторних ігор є досить актуальним предметом дослідження, одним із представників нового етапу її розвитку є Ч. Баутон.

Вперше математичні аспекти класичної теорії ігор були викладені та опубліковані Дж. Нейманом та О. Моргенштерна в 1944 році в монографії «Теорія ігор і економічна поведінка» (див. пізніші видання [7]). Ця робота вважається фундаментальною працею з даної тематики.

Теорія комбінаторних ігор активно розвивається в даний час, генеруючи в собі досить широке коло областей математики, серед яких теорія графів, математична логіка, теорія чисел. Цей напрям оптимізації ставить собі за мету дослідження математичними методами комбінаторних ігор шляхом розробки та модифікації вже відомих методів.

Ігрові задачі, в яких на стратегії одного з гравців накладаються комбінаторні обмеження, що визначаються розміщеннями та перестановками розглянуто в [8-12]. Математичні моделі таких задач описують конфліктні ситуації, в яких використовуються обмеження на матеріали, ресурси тощо.

Теоретична оцінка складності алгоритмів

Для розв'язування комбінаторних оптимізаційних задач з обмеженнями-розміщеннями на стратегії одного гравця в [13] запроновано ітераційний метод заснований на ідеях методу Брауна-Робінсон [14] для класичних матричних ігор. Суть даного методу полягає в поетапному розігруванні комбінаторної матричної гри, в якій на стратегії першого гравця накладаються комбінаторні обмеження, що визначені множиною розміщень. Розглянемо основні етапи даного методу. На першому етапі перший гравець обирає свою стратегію (на першій ітерації випадковим чином), яка б мінімізувала накопичений програш $N\underline{v}$. Далі – другий гравець аналізує виграш, який він отримає при кожній своєї стратегії, та вибирає стратегію j_N з метою максимізувати накопичений виграш $N\overline{v}$. На третьому етапі перевіряється умова зупинки алгоритму $\min N\overline{v} = \max N\underline{v}$ або виконання відношення для ε – величини похибки. У разі виконання умови – зупинка алгоритму, інакше перехід на наступну ітерацію.

Для виконання оцінки складності алгоритму ітераційного методу типу Брауна-Робінсон для розв'язування ігрових задач з обмеженнями-розміщеннями на стратегії одного гравця складемо таблицю 1, у якій згідно до алгоритму методу наведені основні етапи (у стовпці «Алгоритм»), час виконання кожного етапу (стовпець «Час c_j») та кількість повторень кожного етапу алгоритму (стовпець «Кількість раз»).

При розрахунку складності алгоритму потрібно визначити асимптотичну верхню границю з точністю до постійного множника [15]. Для функції $g(n)$ позначка $O(g(n)) = f(n)$ [15] означає множину функцій таких, що існує додатна константа c і натуральне n_0 такі, що $0 \le f(n) \le cg(n)$ для всіх $n \ge n_0$.

Для визначення складності алгоритму згідно таблиці 1 необхідно обчислити $T = \sum_{j=0}^{7} c_j \tau_j$: $T = 1(c_1 + c_3 + c_4) + nc_2 + O(n \cdot m) + O(m) + O(m) + S(m,n)$.

Таблиця 1

Оцінка складності алгоритму ітераційного методу (з обмеженнями-розміщенями на стратегії одного гравця)

№ кроку	Алгоритм	Час c_j	Кількість раз τ_j
0	Встановлення номеру ітерації N	c_1	1
1	Визначення першої стратегії першим гравцем	c_2	n
2	Обчислення скалярних добутків векторів стратегій другого гравця на вектор стратегії першого гравця	1	$O(n \cdot m)$
3	Обчислення накопичених сум скалярних добутків	1	$O(m)$
4	Вибір стратегії другого гравця	1	$O(m)$
5	Вибір стратегії першого гравця	1	$S(m,n)$
6	Обчислення значень $\overline{v}$, $\underline{v}$ та $v*$	c_3	1
7	Перевірка критерію завершення роботи алгоритму	c_4	1

Враховуючи, що $\forall c > 0 : cO(f(n)) = O(f(n))$, то $T = O(n \cdot m) + O(m) + S(m,n)$.

Відомо [15], що якщо $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = \infty,$ то $O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n))$. З огляду на це, складність алгоритму набуде вигляду: $T = O(n \cdot m) + S(m,n)$.

У даному виразі функція $S(m,n)$ набуває різного вигляду в залежності від початкових умов задачі. Доцільно розглядати такі випадки:

1. У разі, коли кількість елементів, з яких обираються елементи розміщення становить $n = M - 1$, то знаходження розв’язку полягає в розв’язуванні задачі на перестановках, для чого, як відомо [16], достатньо виконати сортування елементів множини, тобто $S(m,n) = n \cdot \log n$ [15].

2. У іншому випадку, для знаходження оптимального розв’язку задачі необхідно виконати направлений перебір розміщень, що вимагатиме в найгіршому випадку $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ операцій, що відповідає оцінці $\dfrac{n!}{m!}$: $S(m,n) = \dfrac{n!}{m!}$.

Таким чином, доведено теореми.

Теорема 1. Час роботи ітераційного методу типу Брауна-Робінсон для розв'язування ігрових задач з обмеженнями-розміщеннями на стратегії одного гравця має оцінку $T = O(n \cdot \log n + n \cdot m)$ у разі, коли кількість елементів, з яких обираються елементи розміщення становить $n = M - 1$.

Теорема 2. Час роботи ітераційного методу типу Брауна-Робінсон для розв'язування ігрових задач з обмеженнями-розміщеннями на стратегії одного гравця має оцінку: $T = O\left(\frac{n!}{m!}\right)$ у разі, коли кількість елементів, з яких обираються елементи розміщення становить $n \neq M - 1$.

У [17] запропоновано ітераційний метод типу Брауна-Робінсон для розв'язування ігрових задач з обмеженнями-перестановками у обох гравців.

Для розрахунку складності [15] алгоритму складемо таблицю (табл. 2), в якій в стовпці «Алгоритм» записана програмна реалізація ітераційного методу (одна ітерація) для розв'язування комбінаторних оптимізаційних задач ігрового типу, в яких накладаються обмеження, що визначаються перестановками, на стратегії обох гравців. Час виконання різних рядків алгоритму різний, але один і той рядок i виконується за час c_i, де c_i – константа. Позначимо через τ_j кількість раз виконання умови.

Таблиця 2

Оцінка складності алгоритму

№	**Алгоритм**	**Час** c_j	**Кількість раз** τ_j
1	inc(cIterNum);	c_1	1
2	for i:=1 to cN do begin	c_2	n
3	s := 0;	c_3	n
4	for j:=1 to cM do	c_4	nm
5	s := s + cBx[j, i];	c_5	nm
6	cSumX[i] := s;	c_6	n
7	cSumXn[i] := cSumXn[i] + s;	c_7	n

№	Алгоритм	Час c_j	Кількість раз τ_j
	end;		-
8	SetLength(IndArr, max(cN, cM) + 1);	c_8	1
9	for i:=1 to cN do	c_9	n
10	IndArr[i] := i;	c_{10}	n
11	MakeInd(IndArr, cSumXn, cN, 1);	1	$O(n \log n)$ [20]
12	cNv_ := 0;	c_{11}	1
13	for i:=1 to cN do begin	c_{12}	n
14	cNextY[IndArr[i]] := cPy[i];	c_{13}	n
15	cNv_ := cNv_ + cNextY[IndArr[i]]*SumXn[IndArr[i]];	c_{14}	n
	end;		-
16	cv_ := cNv_ / cIterNum;	c_{15}	1
17	cminv_ := min(cv_, cminv_);	c_{16}	1
18	for i:=1 to cM do begin	c_{17}	m
19	s := 0;	c_{18}	m
20	for j:=1 to cN do	c_{19}	nm
21	s := s + cAy[j, i];	c_{20}	nm
22	cSumY[i] := s;	c_{21}	m
23	cSumYn[i] := cSumYn[i] + s;	c_{22}	m
	end;		-
24	for i:=1 to cM do	c_{23}	m
25	IndArr[i] := i;	c_{24}	m
26	MakeInd(IndArr, cSumYn, cM, 0);	1	$O(m \log m)$ [20]
27	cN_v := 0;	c_{25}	1

№	Алгоритм	Час c_j	Кількість раз τ_j
28	for i:=1 to cM do begin	c_{26}	m
29	cNextXp[i] := cNextX[i];	c_{27}	m
30	cNextX[IndArr[i]] := cPx[i];	c_{28}	m
31	cN_v := cN_v + cNextX[IndArr[i]] *cSumYn[IndArr[i]];	c_{29}	m
	end;		-
32	c_v := cN_v / cIterNum;	c_{30}	1
33	cmax_v := max(c_v, cmax_v);	c_{31}	1
34	cv_s := (cv_ + c_v) / 2;	c_{32}	1
35	CheckStrat(0);	1	$T_0(m)$ [20]
36	CheckStrat(1);	1	$T_1(n)$ [20]
37	Result := CheckEval(aBreakType, aMaxIter);	c_{33}	1

Підрахуємо: $T = \sum_{i=1}^{39} c_j \tau_j$:

$$T = 1(c_1 + c_8 + c_{11} + c_{15} + c_{16} + c_{25} + c_{30} + c_{31} + c_{32} + c_{33}) +$$
$$+ n(c_2 + c_3 + c_6 + c_7 + c_9 + c_{10} + c_{12} + c_{13} + c_{14}) +$$
$$+ m(c_{17} + c_{18} + c_{21} + c_{22} + c_{23} + c_{24} + c_{26} + c_{27} + c_{28} + c_{29}) +$$
$$+ nm(c_4 + c_5 + + c_{19} + c_{20}) + O(n \log n) + O(m \log m) + T_0(m) + T_1(n);$$

або

$$T = O(1) + O(n) + O(m) + O(nm) + O(n \log n) + O(m \log m) + T_0(m) + T_0(m);$$

Якщо $T_0(m) = O(m)$, $T_1(n) = O(n)$, то

$$T = O(1) + O(n) + O(m) + O(nm) + O(n \log n) + O(m \log m) + O(m) + O(n).$$

Враховуючи, що $\forall c > 0 : cO(f(n)) = O(f(n))$, то

$$T = O(n) + O(m) + O(nm) + O(n \log n) + O(m \log m).$$

Якщо $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c < \infty$, то $O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n))$, отже

$$T = O(n + m) + O(nm) + O(n \log n) + O(m \log m);$$

якщо $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\infty$, то $O(f(n))+O(g(n))=O(f(n))$.

Отже: $T=O(nm+n\log n+m\log m)$. Таким чином, доведено теорему 3.

Теорема 3. Складність алгоритму розв'язування комбінаторних оптимізаційних задач ігрового типу на комбінаторних конфігураціях, у разі, коли обмеження накладаються на стратегії двох гравців і визначені перестановками становить: $T=O(nm+n\log n+m\log m)$.

Для розв'язування ЗКОІТП з обмеженнями на стратегії одного гравця розроблено монотонний ітераційний метод (МІМ) пошуку ціни гри [18]. МІМ ґрунтується на ідеях монотонного методу для розв'язування матричних ігрових задач. Як відомо із МІМ дає змогу швидко отримати значення ціни гри із заданою точністю та оптимальну стратегію першого гравця, причому кількість кроків методу слабко залежить від розмірності задачі.

Для алгоритму монотонного ітераційного методу [18] було проведено оцінку складності за методикою, аналогічною до попередніх оцінок. З цією метою введено наступні позначення:

P_i – кількість перестановок на поточній ітерації i (при виявленні однакових елементів);

S_i – кількість стратегій, які використовуються на поточній ітерації;

$O(m\log m)$ – відома складність алгоритму сортування [15];

n^3 та S_i^3 – необхідний машинний час для двоїстого симплекс-методу [15].

При розрахунку складності алгоритму потрібно визначено асимптотичну верхню границю з точністю до постійного множника [15]. Для функції $g(n)$ позначка $O(g(n))=f(n)$ [15] означає множину функцій таких, що існує додатна константа c і n_0 такі, що $0\le f(n)\le cg(n)$ для всіх $n\ge n_0$.

Підрахуємо: $T=\sum_{i=1}^{61}c_j\tau_j$:

$$T=1\cdot(c_{13}+c_{14}+c_{20}+c_{21}+c_{26}+c_{31}+c_{40}+c_{45})+$$

$$+m\cdot(c_1+c_2+c_3+c_{15}+c_{16}+c_{22}+c_{23}+c_{32}+c_{33}+c_{41}+c_{42})+$$

$$+n\cdot(c_4+c_5+c_8+c_9+c_{10}+c_{11}+c_{12}+c_{34}+c_{35}+c_{43}+c_{44}+c_{46}+c_{47}+c_{48}+$$

$$+c_{49}+c_{50}+c_{51}+c_{52})+n\cdot m\cdot(c_6+c_7)+S_i\cdot c_{17}+S_i\cdot m\cdot(c_{18}+c_{19})+$$

$$+P_i\cdot(c_{24}+c_{25}+c_{27}+c_{28}+c_{29}+c_{30})+P_i\cdot n\cdot(c_{36}+c_{37})+P_i\cdot n\cdot m\cdot(c_{38}+c_{39})+$$

$$+T_0(m)+T_2(n^2)+T_3(S_i^3)+T_1(P_i!)+T_4(n^2)+T_5(n^3)+$$

$$+O(m\log m)+O(m\log m)+O(P_i\log P_i)+T_6(1)$$

або

$$T=O(1)+O(m)+O(n)+O(n\cdot m)+O(S_i)+O(S_i\cdot m)+O(P_i)+$$

$$+O(P_i\cdot n)+O(P_i\cdot n\cdot m)+O(m\cdot\log m)+O(m\cdot\log m)+O(P_i\cdot\log P_i)+$$

$$+T_0(m)+T_1(P_i!)+T_2(n^2)+T_3(S_i^3)+T_4(n^2)+T_5(n^3)+T_6(1)\,.$$

Враховуючи, що $T_i(f)=O(f)$ приймаємо:

$$T=O(1)+O(m)+O(n)+O(n\cdot m)+O(S_i)+O(S_i\cdot m)+O(P_i)+$$

$$+O(P_i\cdot n)+O(P_i\cdot n\cdot m)+O(m\cdot\log m)+O(m\cdot\log m)+O(P_i\cdot\log P_i)+O(m)+$$

$$+O(P_i!)+O(n^2)+O(S_i^3)+O(n^2)+O(n^3)+O(1)\,.$$

Враховуючи, що $\forall c>0: cO(f(n))=O(f(n))$, маємо

$$T=O(m)+O(n)+O(n\cdot m)+O(S_i)+O(S_i\cdot m)+O(P_i)+O(P_i\cdot n)+$$

$$+O(P_i\cdot n\cdot m)+O(m\cdot\log m)+O(P_i\cdot\log P_i)+O(P_i!)+O(n^2)+O(S_i^3)+O(n^3)\,.$$

Відомо, що якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=c<\infty$, то $O(f(n))+O(g(n))=O(f(n)+g(n))$ та якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=\infty$, то $O(f(n))+O(g(n))=O(f(n))$. З огляду на це складність алгоритму набуде вигляду:

$$T=O(m+n)+O(n\cdot m)+O(S_i+P_i)+O(S_i\cdot m)+O(P_i\cdot n)+O(P_i\cdot n\cdot m)+$$

$$+O(m\cdot\log m)+O(P_i\cdot\log P_i)+O(P_i!)+O(n^2)+O(S_i^3)+O(n^3)=$$

$$=O(P_i\cdot n\cdot m)+O(m\cdot\log m)+O(P_i!)+O(n^3)=$$

$$=O(P_i\cdot n\cdot m+m\cdot\log m+P_i!+n^3)\,.$$

Тобто маємо: $T=O(P_i\cdot n\cdot m+m\cdot\log m+P_i!+n^3)$.

Таким чином, доведено теорему:

Теорема 4. Час роботи монотонного ітераційного методу має оцінку: $T = O(P_i \cdot n \cdot m + m \cdot \log m + P_i! + n^3)$.

Висновки

Таким чином в даній публікації викладено детальне доведення теоретичної оцінки складності відомих алгоритмів розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу з різними комбінаторними обмеженнями, що накладаються на стратегії гравців. Отримані результати показали ефективність даних методів.

Література

1. Bachet C. G. Problèmes plaisans et délectables, qui se font par les nombres, partie recueillis de divers autheurs, et inventez de nouveau, avec leur démonstration. / C. G. Bachet – Lyons, France: Pierre Rigaud & Associates, 1612. – P. 18-33.
2. Фролов И. С. Введение в теорию комбинаторных игр./ И. С.Фролов – М., 2012. – 202 с.
3. Bouton C. L. Nim, a game with a complete mathematical theory / C. L. Bouton – Annals of Mathematics, 1902. – P. 35–39.
4. Berlekamp R. Elwyn Winning Ways for Your Mathematical Plays. // Elwyn R. Berlekamp , John H. Conway, Richard K. Guy / A K Peters, Wellesley, MA, 2nd edition, 2001–2004. – 276 p.
5. Conway H. J. On Numbers and Games. // John H. Conway / A K Peters, Wellesley, MA, 2nd edition, 2001. – 417 p.
6. 6.Conway J. H. All games bright and beautiful. // John H. Conway / American Math. – Vol. 84. – 1977. – P. 417–434.
7. Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Моргенштерн. – М.: Наука, 1970. – 780 с.
8. Емец О. А. Исследование задач комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Проблемы управления и информатики. – 2007. – № 1. – С. 26-36.
9. Емец О. А. Исследование математических моделей и методов решения задач на перестановках игрового типа / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Кибернетика и сист. анализ. – 2007. – №6. – С. 103-114.
10. Ємець О. О. Розв'язування ігрових задач на перестановках / О. О. Ємець, Н. Ю. Устьян // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – №3. – С. 47-52.
11. Ємець О. О. Один ітераційний метод розв'язування ігрових задач на перестановках / О. О. Ємець, Н. Ю. Устьян // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – №3. – С.5-10.
12. Емец О. А. Игры с комбинаторными ограничениями / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Кибернетика и сист. анализ. – 2008. – №4. – С.134-141.
13. Емец О. А. Итерационный метод решения комбинаторных оптимизационных задач игрового типа на размещениях / О. А.Емец, Е. В. Ольховская. // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 3. – С. 69 78.
14. Brown G.W. Iterative solution of games by fictitious play/ Brown G.W. // Activity analysis of production and allocation: Proceedings of a Conference. – 1951. – New York. – P. 374-376.

15. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е изд./ Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. — М.: Вильямс, 2005. — 1296 с.
16. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К.: ІСДО, 1993. – 188 с.
17. Ємець О.О. Розв'язування комбінаторних задач ігрового типу з обмеженнями-перестановкими у обох гравців: ітераційний метод / О.О. Ємець, О.В. Ольховська. // Системні дослідження та інфораційні технології. – 2012. – №4. – С. 80-93.
18. Ємець О. О. Монотонний ітераційний метод для розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях / О. О. Ємець, О. В. Ольховська // Доповіді Національної академії наук України – 2014. – №8. – С. 48-52.

*Стаття надійшла _20.05.2015_*
*Прийнято до друку _04.07.2015_*

Аннотация

О.А. Емец, Д. М. Ольховский, Е. В. Ольховская

Теоретическая оценка сложности алгоритмов решения задач комбинаторной оптимизации игрового типа

Среди задач комбинаторной оптимизации наиболее актуальными становятся задачи решения конфликтных ситуаций конкуренции, которые можно отнести к классу задач комбинаторной оптимизации игрового типа с ограничениями на стратегии игроков, которые определяются комбинаторными конфигурациями, в том числе множествами перестановок и размещений. Для таких задач необходимыми являются исследования существующий методов решения, изучение вопроса возможности их модификации, а также проведение числовых экспериментов с целью определения их практической эффективности.

Ключевые слова: *задачи комбинаторной оптимизации игрового типа, итерационный метод типа Брауна-Робинсон, монотонный итерационный метод, программная реализация, числовые эксперименты.*

Summary

O.O. Iemets, D.M. Olhovsky, O.V. Olhovska

Theoretical evaluation of complexity of algorithms solving combinatorial optimization game type

Among combinatorial optimization problems are the most pressing problem of solving conflicts of competition, which can be attributed to a class of combinatorial optimization game type problems with restrictions on the strategies of the players, which are determined by combinatorial configurations, including sets of the permutations and placements. For such tasks are necessary to study existing methods of solving, exploring the possibility of modifying them, as well as conducting numerical experiments in order to determine their effectiveness in practice.

Keywords: *combinatorial optimization problem gaming type iterative method type Brown-Robinson, monotone iterative method, software realization, numerical experiments.*