УДК 519.85 **О.О. ЄМЕЦЬ, Т.В. ЧІЛІКІНА**

ПРО КІЛЬКІСТЬ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАГАЛЬНИХ МНОЖИНАХ РОЗМІЩЕНЬ ТА ПОЛІРОЗМІЩЕНЬ

У статті виведені та доведені формули підрахунку кількості елементів у загальній множині розміщень і загальній множині полірозміщень. Як один зі способів підрахунку кількості розміщень можна розглядати побудову дерева, листи якого відповідають цим розміщенням. Отримані формули для розміщень є узагальненням відомих формул підрахунку кількості розміщень без повторень і розміщень з повтореннями.

Ключові слова: *загальна множина розміщень, загальна множина полі розміщень.*

Вступ

Не зважаючи на поширеність використання таких комбінаторних множин, як загальна множина розміщень, загальна множина полірозміщень, полікомбінаторні множини [1-14], авторам не відомі публікації, де б були пораховані кількості елементів в цих множинах.

Мета статті

Метою даної роботи є отримання формули для підрахунку кількості елементів у загальній множині розміщень і полірозміщень.

Виклад основного матеріалу

Нехай маємо мультимножину $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ з основою $S(G)=(e_1,e_2,..,e_v)$ та первинною специфікацією $[G]=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_v)$. Мультимножину запишемо ще так: $G=\{e_1^{\eta_1},e_2^{\eta_2},...,e_v^{\eta_v}\}$.

Розглянемо загальну множину k-розміщень $E_{\eta v}^k(G)$.

У випадку $\eta=k$, тобто, коли $\eta_1=1\ \forall i=1,2,...,v$, а G - множина, з $E_{\eta v}^k(G)$ маємо $E_{\eta\eta}^k(G)=E_\eta^k(G)$– множину k-розміщень без повторень. Добре відомо, що кількість елементів в ній підраховується так:

$$\left|E_\eta^k(G)\right| = \frac{\eta!}{(\eta-k)!}, \qquad (1)$$

тут $|M|$ - позначає кількість елементів в скінченній множині М.

У випадку $\eta_i = v \ \forall i = 1,2,...,v$, тобто $\eta = kv$, маємо $E_{\eta v}^k(G) = \overline{E}_\eta^k(G)$ - множину k-розміщень з повтореннями. Як добре відомо,

$$\left|\overline{E}_\eta^k(G)\right| = v^k. \qquad (2)$$

У загальному ж випадку, коли $1 \le \eta_i \le k$ формула для $\left|E_{\eta v}^k(G)\right|$ не відома.

Як один зі способів підрахунку кількості k-розміщень можна розглядати побудову дерева, листи якого відповідають k-розміщенням.

Пояснимо цей спосіб на прикладі.

Приклад 1. Нехай $G = \{a^1, b^2, c^3\}$. Побудуємо дерево, що має листям всі елементи $E_{6,3}^3(G)$ (рис.1).

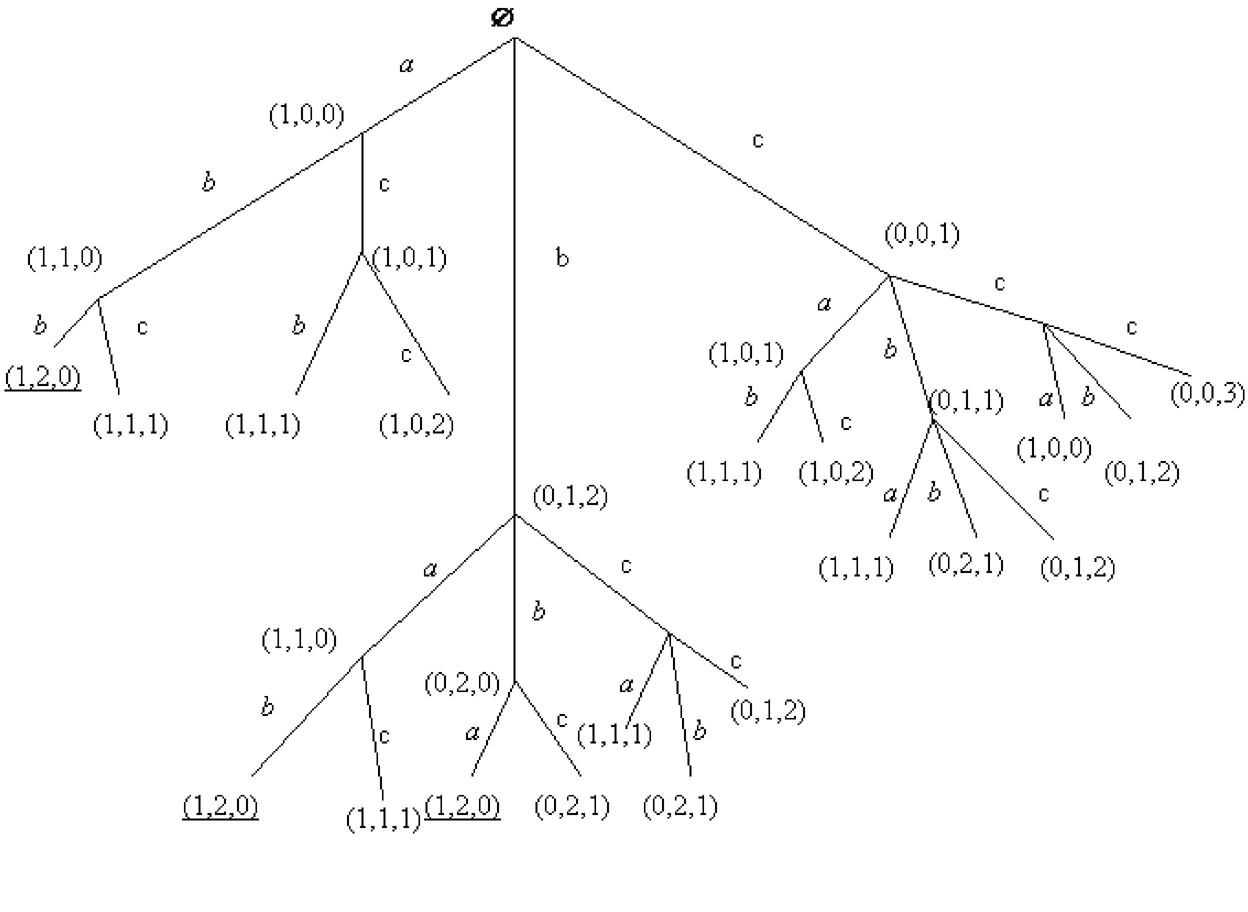

Рис.1. Дерево $E_{6,3}^3(G)$ для з прикладу 1.

Зауважимо, що $S(G)=(a,b,c)$ маємо $[G]=(1,2,3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$. Корінь – вершина 0-го рівня

На рис.1 вершини і-го рівня дерева відповідають і-розміщенню з елементів G $(1\le i\le k)$. Біля вершини стоїть вектор (V_1,V_2,V_3) кількостей використання елементів: a,b,c в і–розміщенні якому відповідає вершина. Зауважимо, що у всіх векторів (V_1,V_2,V_3): $V_1\le 1=\eta_1, V_2\le 2=\eta_2, V_3\le 3=\eta_3$. Ребрам відповідають символи з основи $S(G)$, якщо їх використана кількість не перевищує наявність в мультимножині $V_i\le\eta_j,\ j=1,2,3$ (в кожному векторі (V_1,V_2,V_3) на і-му рівня дерева).

Щоб отримати і-розміщення, що відповідає вершині треба виписати всі і символів, що стоять на ребрах по гілці від кореня до вибраної вершини і-го рівня.

Таким чином 3-й рівень дерева дає вершини листочки, які відповідають 3-розміщенням. Випишемо їх, перебираючи вершини зліва на право: $(a,b,b),(a,b,c),(a,c,b),(a,c,c),(b,a,b),(b,a,c),(b,b,a),(b,b,c),(b,c,a),(b,c,b),(b,c,c),(c,c,c)$ $(c,a,b),(c,a,c),(c,b,a),(c,b,b),(c,b,c),(c,c,a),(c,c,b),$. Таким чином, маємо 19 елементів в $E^3_{6,3}(G)$.

Можна спробувати застосувати апарат твірних функцій(генеретрис). Але в [15,с.44]. зазначено, що це рівносильне побудові не комутативної алгебри твірних функцій, що в кінцевому підсумку не дає переваг в порівнянні з безпосереднім перерахунком k-розміщень.

Розглянутий підхід до побудови дерева, листи якого відповідають *k*-розміщенням , узагальнюються в такому твердженні.

Теорема 1. Кількість елементів загальної множини *k*-розміщень $E^k_{\eta,k}(G)$ з елементів мультимножини $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ з основою $S(G)=(e_1,e_2,..,e_v)$ та первинною специфікацією $[G]=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_v)$ обчислюється за формулою:

$$\left|E_{\eta v}^{k}\left(G\right)\right| = \sum_{\substack{V_1+V_2+...V_v=k \\ 0\le V_i\le\eta_i}} \frac{k!}{V_1!V_2!...V_v!}, \tag{3}$$

де підсумовування ведеться за всіма цілими невід'ємними розв'язками $\left(V_1,...,V_v\right)$ рівняння $V_1+...+V_v=k$ за умови, що $0\le V_i\le\eta_i$ $\forall i=1,2,...,v$.

Доведення. Позначимо k_i кількість елементів $l_i\in S\left(G\right)$, що вибрано в k-розміщення. Зрозуміло, що $0\le V_i\le\eta_i$, оскільки в G елементів e_i є в кількості η_i штук. Розміщення має k елементів, отже має виконуватися умова $V_1+...+V_v=k$. Кожна k-вибірка $R=\left\{e_1^{V_1},...,e_v^{V_v}\right\}$, де $V_1+...+V_v=k, 0\le V_i\le\eta_i$ утворює стільки k-розміщень, скільки перестановок (а це переставленням з повтореннями) з неї можна утворити. Як відомо (див. наприклад [12]) кількість перестановок з k елементів мультимножини R дорівнює:

$$\left|E_{kt}\left(R\right)\right| = \frac{k!}{V_1!V_2!...V_v!}, \tag{4}$$

де 0!=1, t - кількість різних неперервних елементів в R, $v-t$ - кількість нулів серед чисел $k_1,k_2,...,k_v$. Щоб підрахувати всі k – розміщення в $E_{\eta v}^{k}\left(G\right)$ треба перебрати всі можливі невід'ємні цілі розв'язки рівняння $V_1+...+V_v=k$ за умови $0\le V_i\le\eta_i$ та знайти суму отриманих за (4) кількостей для одержаної при цьому мультимножини R. Це і буде кількість k-розміщень, що визначається за формулою (3). Теорема доведена.

Наслідок 1 з теореми 1. З формули (3) за умов $\eta=v,\ \eta_i=1\ \forall i=1,2,...,v$, тобто коли $E_{\eta\eta}^{k}\left(G\right)=E_{\eta}^{k}\left(G\right)$, одержуємо формулу (1).

Доведення. За умов, коли всі елементи в G різні $\left(\eta_i=1\ \forall i\right)$ рівняння $V_1+...+V_v=k$ має розв'язок в якому k одиниць $v-k=\eta-k$ нулів. Таких розв'язків, очевидно, C_η^k, при кожному з яких з (4) маємо $\frac{k!}{V_1!V_2!...V_v!}=k!$, бо $\forall i$ $V_i!=1$ (це або 1! або 0!) . Отже підставляючи все в (3), маємо

$$\left|E_{\eta\nu}^{k}\left(G\right)\right| = C_{\eta}^{k}\cdot k! = \frac{\eta!}{\left(\eta-k\right)!\cdot k!}k! = \frac{\eta!}{\left(\eta-k\right)!},$$

що і треба було довести.

Наслідок 2 з теореми 1 З формули (3) за умов $\eta_i = k \ \forall i = 1,2,...,\nu$, тобто, коли $E_{\eta\nu}^{k}\left(G\right) = \overline{E}_{\eta}^{k}\left(G\right),\ \eta = \nu\cdot k$ одержуємо формулу (2).

Доведення. Скористаємося переставленням k-розміщень як листків дерева (рис.2). З побудови дерева (k рівнів на яких вершини галузяться на ν вершин) маємо листків на k-му рівні ν^k.

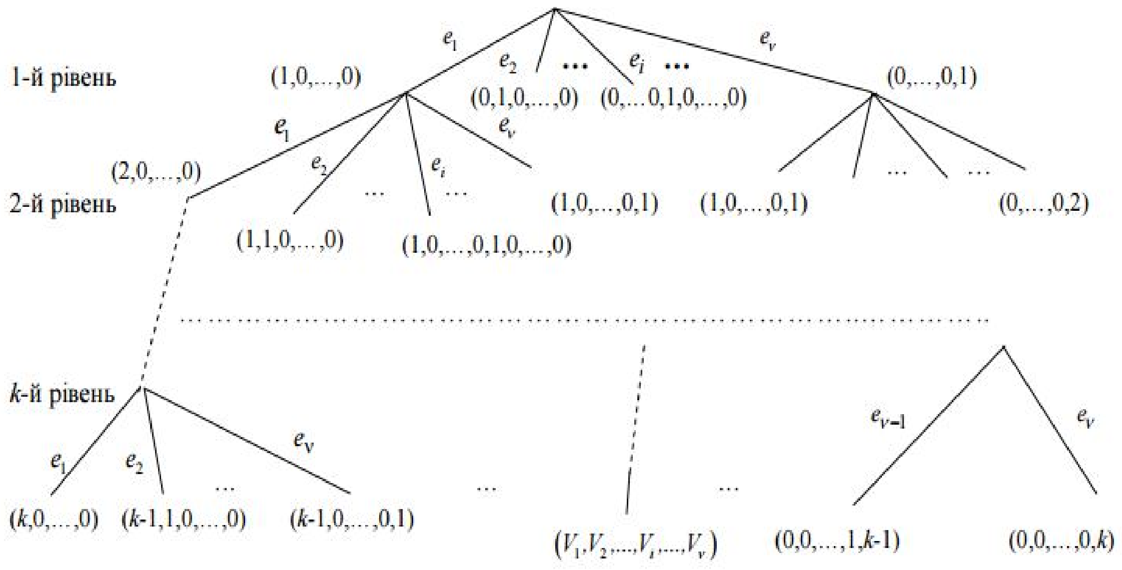

Рис.2. Дерево з листками k-розміщеннями з повтореннями

З іншого боку, як і при доведенні теореми 1, ці листки можна порахувати як

$$\sum_{\substack{V_1+V_2+...V_\nu=k \\ 0\le V_i\le \eta_i}} \frac{k!}{V_1!V_2!...V_\nu!}.$$

Отже маємо справедливість формули:

$$\sum_{\substack{V_1+V_2+...V_\nu=k \\ 0\le V_i\le \eta_i}} \frac{k!}{V_1!V_2!...V_\nu!} = \nu^k, \tag{5}$$

де підсумовування ведеться за всіма цілими невід'ємними розв'язками рівняння $V_1+...+V_v=k$, де $0\le V_i\le k$, тобто коли $\eta_i=k$ $\forall i=1,2,...,v$, або що теж саме: $E^k_{\eta v}(G)=\overline{E}^k_\eta(G)$, маємо справедливість формули (5). Що і треба було довести.

Маючи справедливість теореми 1, можна підрахувати кількість елементів в загальній множині полірозміщень [1-4].

Множина полірозміщень. Нехай, як і раніше $G=\{g_1,g_2,...,g_\eta\}$ – мультимножина пронумерованих дійсних чисел з основою $S(G)=(e_1,e_2,...,e_n)$, первинною специфікацією $[G]=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)$, $\eta_1+\eta_2+...+\eta_n=\eta$, $1\le\eta_i\le k$ $\forall i\in J_v$.

Розглянемо упорядковане розбиття J_η на s множин $N_1,...,N_s$, що задовольняє умовам $N_i\cap N_j=\varnothing$, $N_i\ne\varnothing$, $N_j\ne\varnothing$, $\forall i,j\in J_s$, а також упорядковане розбиття числа k на s доданків $k_1,...,k_s$, що задовольняють умовам $1\le k_i\le n_i$ $\forall i\in J_s$, де $n_i=|N_i|$. Очевидно, що $\eta=n_1+n_2+...+n_s$, $k=k_1+k_2+...+k_s$.

Нехай H - множина всіх k-виборок з множини J_η вигляду $\pi=(\pi(1),...,\pi(k))=(\pi_{11},...,\pi_{1k_1},...,\pi_{s1},...,\pi_{sk_s})=(\pi^1,...,\pi^s)$, де $\pi^i=(\pi_{i1},...,\pi_{ik_i})$ - довільна k_i-вибірка з множини N_i $\forall i\in J_s$. Множину $A^{ks}_{\eta v}(G,H)=\{(g_{\pi(1)},...,g_{\pi(k)})\,|\,\forall\pi\in H\}$ назвемо множиною полірозміщень з повтореннями або загальною множиною полірозміщень. У випадку, коли $S(G)=G$, тобто G - множина і $\eta=n$, $A^{ks}_{vv}(G,H)$ називають множиною полірозміщень без повторень і позначають $A^{ks}_v(G,H)$. Якщо немає потреби підкреслювати кількість елементів в G, $S(G)$, в π або кількість множин N_i $\forall i\in J_s$, за допомогою яких утворюється множина полірозміщень, то наряду з позначенням $A^{ks}_{\eta v}(G,H)$ використовують також $A(G,H)$. Очевидно, що множини $A(G,H)$ задовольняє означенню евклідової комбінаторної множини. Елементи $A^{ks}_{\eta v}(G,H)$ будемо називати полірозміщеннями з повтореннями, а елементи множини $A^{ks}_v(G,H)$ -

полірозміщеннями без повторень. Зазначимо також, що якщо $s=1$, то $H=A_{\eta}^{k}(J_{\eta})$, а $A_{\eta\nu}^{k1}(G,H)=A_{\eta\nu}^{k}(G,H)$.

Якщо $\eta=k,\ n_i=k_i\ \ \forall i\in J_s$, то множина $A_{\eta\nu}^{ks}(G,H)$ є множиною поліпереставлень $P_{k\nu}^{s}(G,H)$.

Твердження 2. Загальна множина полірозміщень $E_{\eta\nu}^{ks}(G)$ декартовим добутком загальних множин розміщень $E_{n_i\nu_i}^{k_i}\left(G^{N_i}\right)$, тобто

$$E_{\eta\nu}^{ks}(G)=\prod_{i=1}^{s}E_{n_i\nu_i}^{k_i}\left(G^{N_i}\right), \tag{6}$$

де $G^{N_i}\subset G,\ G^{N_i}=\left\{g_{j_1},...,g_{j_{n_i}}\mid\ _{j_1},...,_{j_{n_i}}\in N^i\right\}$, де ν_i - кількість різних елементів в мультимножині G^{N_i}.

Доведення. При утворенні $E_{\eta\nu}^{ks}(G)$ мультимножина G розбивається на доданки $G^{N_1},...,G^{N_s}$ $(G^{N_1}+...+G^{N_s}=G)$ згідно розбиттю множини J_η на підмножини $N_1,...,N_s$ $(N_1\cup...\cup N_s=N,\ N_i\cap N_j=\varnothing,\ N_i\neq\varnothing\ \forall i,j\in J_s)$. Далі з G^{N_i} формується k-вибірка, де $k\le|N_i|=n$, яка стає частиною з номером i вектора $g\in E_{\eta\nu}^{ks}$, яка операцією конкатенація з'єднується з іншими такими вибірками для $\forall i\in J_s$ в порядку зростання *i*, тобто g - це вектор з s векторів, кожен з яких є k_i-вибірка з G^{N_i}. Оскільки розглядаються всі можливі випадки, то утворюється декартовий добуток з $E_{n_i\nu_i}^{k_i}\left(G^{N_i}\right)$, де ν_i - кількість різних елементів в G^{N_i}. З іншого боку ми утворили згідно означення загальну множину полірозміщень, Це і доводить формулу (6).

Твердження 3. Множина H, що використовується в означенні загальної множини полірозміщень є декартовим добутком множин розміщень $E_{n_i}^{k_i}(N_i)$, тобто

$$H=\prod_{i=1}^{s}E_{n_i}^{k_i}(N_i), \tag{7}$$

де $N_i\subset J_\eta,\ N_1\cup...\cup N_s=J_\eta,\ N_i\cap N_j=\varnothing,\ N_i\neq\varnothing\ \forall i,j\in J_s$.

Доведення. При утворення $E_{\eta v}^{ks}(G)$ множина $J_\eta = \{1, 2, ..., \eta\}$ розбивається на непорожні підмножини $N_1, ..., N_s$, причому $N_1 \cup ... \cup N_s = J_\eta$. Далі з N_i здійснюється виокремлення k_i-вибірки $\pi^i = \left(\pi_{i_1}, ..., \pi_{i_{k_i}}\right)$, де $k_i = const$ та $k_i \le n_i = |N_i|$. З таких k_i-вибірок π^i утворюється вектор $\pi = \left(\pi^1, ..., \pi^i, ..., \pi^s\right)$, який , очевидно, є елементом декартового добутку $E_{n_1}^{k_1}(N_1) \times ... \times E_{n_i}^{k_i}(N_i)$. Множина H складається з усіх таких можливих векторів π, тобто

$$H = \prod_{i=1}^{s} E_{n_i}^{k_i}(N_i),$$

що і треба було довести.

Твердження 4. Кількість елементів в множині полірозміщень $E_{\eta v}^{ks}(G)$ обчислюється за формулою

$$\left|E_{\eta v}^{ks}(G)\right| = \prod_{i=1}^{s} \sum_{\substack{V_1^i + ... + V_{v_i}^i = k_i \\ 0 \le V_j^i \le \eta_{v_i}^i}} \frac{k_i\,!}{V_1^i\,! V_2^i\,! \cdot ... \cdot V_{v_i}^i\,!}, \qquad (8)$$

де мультимножина G має доданки $G = G^{N_1} + ... + G^{N_i} + ... + G^{N_s}$, кожен з основою $S\left(G^{N_i}\right) = \left(e_1^i, .., e_{v_i}^i\right)$ та первинною специфікацією $\left[G^{N_i}\right] = \left(\eta_1^i, ..., \eta_{v_i}^i\right)$ $\forall i \in J_s$.

Доведення. За теоремою 1

$$\left|E_{n_i v_i}^{k_i}\left(G^{N_i}\right)\right| = \sum_{\substack{V_1^i + ... + V_{v_i}^i = k_i \\ 0 \le V_j^i \le \eta_{v_i}^i}} \frac{k_i\,!}{V_1^i\,! V_2^i\,! \cdot ... \cdot V_{v_i}^i\,!}, \qquad (9)$$

де підсумовування ведеться за всіма цілими розв'язками $V_1^i, ..., V_j^i, ..., V_{v_i}^i$ рівняння $V_1^i + ... + V_{v_i}^i = k_i$ за умови, що $0 \le V_j^i \le \eta_{v_i}^i$ $\forall j \in J_{v_i}$ $\forall i \in J_s$.

Користуючись комбінаторним правилом добутку (див., наприклад [12]) маємо з (9) та (6) формулу (8), яку і треба було довести.

Твердження 5. Кількість елементів множини H обчислюється за формулою

$$|H| = \prod_{i=1}^{s} \frac{n_i\,!}{(n_i - k_i)!} \qquad (10)$$

Доведення. За формулою (1)

$$\left|E_{n_i}^{k_i}\left(N_i\right)\right| = \frac{n_i!}{\left(n_i - k_i\right)!}. \qquad (11)$$

З формул (11), (7) та правилом добутку маємо формулу (10), яку і треба було довести.

Висновки

В роботі одержана формула підрахунку кількості елементів в загальній множині розміщень. Показано, що, як часткові випадки, вона включає відомі формули підрахунку кількості розміщень без повторень та розміщень з повтореннями. Як напрям подальших досліджень варто було б розглянути оцінку кількості операцій по застосуванню цієї формули.

Література

1. Емецъ О.О. Евклидовые комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учеб. пособие. / О.А.Емец. – Киев.: УМК ВО, 1992. – 92 с.
2. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець – К. : Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
3. Емец О.А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О.А. Емец, Т.Н. Барболина. – К.: Наук. думка, 2008. – 159 с.
4. Стоян Ю.Г. Множини полірозміщень в комбінаторній оптимізації // Доповіді НАН України / Ю.Г.Стоян, О.О.Ємець, Є.М.Ємець. – 1999. – № 8. – С. 37- 41.
5. Емец О.А. Моделирование некоторых инвестиционных задач с помощью евклидовой комбинаторной оптимизации // Экономика и матем. методы / О.А.Емец, Е.М.Емец. – 2000. Т. 36. – №2. – С.141-144.
6. Емец О.А. Интервальная математическая модель комбинаторной задачи цветной упаковки прямоугольников // Кибернетика и системный анализ / О.А.Емец, Л.Г.Евсеева., Н.Г.Романова. – 2001. – №3. С. 131-138.
7. Валуйская О.А. Выпуклое продолжение многочленов, заданных на полиперестановках, модифицированным методом Стояна-Яковлева // Журн. вычислит.математ и матем. физики / О.А.Валуйская, О.А.Емец, Н.Г.Романова – 2002. – Т. 42, №4. – С.591- 596.
8. Стоян Ю.Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Ю.Г.Стоян, О.О.Ємець, Є.М.Ємець – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.
9. Ємець О. Моделювання задачами оптимізації з дробово-лінійною цільовою функцією на поліпереставленнях // Вісник націон. ун-ту „Львівська Політехніка" / О.Ємець, Н.Романова. – 2005. – № 540. Сер. „Фіз.-матем. науки". – С. 65-68.
10. Ємець О.О. Безумовна задача оптимізації дробово-лінійної цільової функції на поліпереставленнях: зведення до лінійної умовної на спеціальній комбінаторній множині // Радиоэлектроника и інформатика / О.О.Ємець, Н.Г.Романова. – 2005. – № 1. – С. 70-73

11. Ємець О.О. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування / О.О. Ємець, О.В. Роскладка: Полт. ун-т споживчої кооперації Укр. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. – 129 с.
12. Ємець О.О. Дискретна математика: Навчальний посібник. Вид. 2-ге, допов. / О.О.Ємець, Т.О.Парфьонова. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2009. – 287 с.
13. Емец О.А. Оптимизация на полиперестановках / О.А.Емец, Н.Г.Романова. – К.: Наук. думка, 2010. – 105 с.
14. Ємець О.О. Моделі евклідової комбінаторної оптимізації: монографія / О.О.Ємець, О.О.Черненко. – Полтава: ПУЕТ, 2011. – 204 с.
15. Хофман А. Введение в прикладную комбинаторику / А.Хофман. – М.: Наука, 1975. – 480 с.

*Стаття надійшла _19.05.2015_*
*Прийнято до друку _04.07.2015_*

Аннотация

О.А.Емец, Т.В.Чиликина

О количестве элементов в общих множествах размещений и полирозмещений

В статье выведены и доказаны формулы подсчета количества элементов в общем множестве размещений и общей множестве полирозмищений. Как один из способов подсчета количества размещений можно рассматривать построение дерева, листья которого соответствуют этим размещениям. Полученные формулы для размещений является обобщением известных формул подсчета количества размещений без повторений и размещений с повторениями

Ключевые слова: *общее множество размещений, общее множество полиразмещений***.**

Summary

O.O.Yemets, T.V.Chilikina

About the number of elements in the in the general set of arrangements and polyarrangementss

In the article are written and proven formulas of of counting the number of elements in the general set of arrangements and set polyarrangements. As one way of counting the number of arrangements can be viewed build a tree whose leaves correspond to arrangements. This formula for the set of arrangmnets is generalization of the known formulas of count of amount of arrangemennts withhoat repeatitions and arrangemennts with repeatitionsin

Keywords: *general set of arrangements, general set polyarrangements.*