RESEARCH AND SOFTWARE IMPLEMENTATION OF COMBINATORIAL OBJECT GENERATION ALGORITHMS

Summary. Introduction. *Combinatorics is one of the fundamental branches of discrete mathematics concerned with counting and constructing objects that satisfy given properties. Combinatorial objects – permutations, placements, and combinations – are widely used in probability theory, statistics, cryptography, and algorithm design. The generation of all possible configurations of such objects belongs to the class of NP problems, where the number of configurations grows factorially or exponentially with input size.*

Purpose. *The aim of this work is to systematize the mathematical foundations of the main combinatorial objects, describe and compare algorithms for their generation implemented in Python using recursive and iterative approaches, and develop a software product with a graphical interface for visual demonstration.*

Results. *The paper presents mathematical formulas for counting all six types of combinatorial objects (permutations, placements, and combinations, with and without repetition). Recursive and iterative generation algorithms are described and implemented in Python. The use of generators and the yield keyword is shown to provide an efficient approach to streaming generation of large sets of combinatorial objects. The recursive approach is more readable and natural but less memory-efficient; iterative algorithms with generators are preferable for practical use. A graphical application built with PyQt5 demonstrates the algorithms' results interactively.*

Conclusion. *The generation of combinatorial objects is inherently NP in nature: the number of objects grows unmanageably fast even for moderate input values. Both recursive and iterative algorithms yield correct results; the choice between them depends on the specific requirements of readability, memory efficiency, and the size of input data. The developed software product can be used as an educational tool in mathematics and computer science classes.*

Keywords: *combinatorics, permutations, placements, combinations, recursive algorithm, Python, generator.*

Одержано редакцією 12.11.2024 р.
Прийнято до публікації 11.12.2024 р.

УДК 378:517

DOI 10.31651/2076-5886-2024-1-45-56

PACS 01.40.Fk, 02.30.Hq

БОСОВСЬКИЙ Микола Васильович,
кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри математики та методики навчання математики, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
e-mail: bosovskyy@gmail.com
ORCID: 0000-0003-1187-5550

СЕРДЮК Зоя Олексіївна,
кандидат педагогічних наук, доцент,
завідувач кафедри математики та методики навчання математики, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
e-mail: serdyuk_z@ukr.net
ORCID: 0000-0002-9376-4346

ТРЕТЯК Микола Васильович,
кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри математики та методики навчання математики, Черкаський

національний університет імені Богдана Хмельницького
e-mail: tretiak@gmail.com
ORCID: 0000-0001-8918-5467

ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ У СТУДЕНТІВ ШЛЯХОМ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ

У статті розглядається підхід до формування математичних компетентностей у студентів засобами математичного моделювання фізичних задач. Обґрунтовано актуальність інтеграції математичних та фізичних знань у навчальному процесі з метою розвитку аналітичного мислення, вміння застосовувати математичні методи для опису реальних явищ і розв'язання прикладних задач. Проаналізовано етапи математичного моделювання та їхній вплив на засвоєння математичних понять, розвиток творчих здібностей і підвищення мотивації до вивчення математики. Окрему увагу приділено прикладам задач, які можуть бути ефективними у процесі формування міжпредметних зв'язків і професійно значущих компетентностей. Зроблено висновок про доцільність систематичного використання математичного моделювання у підготовці фахівців технічного та природничого профілів.

Ключові слова: *математичний аналіз, диференціальні рівняння, комплексний аналіз, математичне моделювання, фізичні задачі, математичні компетентності, студенти ЗВО.*

Постановка проблеми. Підготовка сучасних фахівців різних галузей найчастіше вимагає симбіозу знань з різних областей знань. Нині вчитель математики, фізики, інформатики, фізик чи математик, інженер чи програміст повинні бути спроможними до поєднання теоретичних знань з математики та їх застосування до розвя'зування практичних задач з фізики, математики, хімії, біології тощо. Тобто, грунтовні знання здобувачів вищої освіти з класичних математичних дисциплін («Математичний аналіз», «Аналітична геометрія», «Лінійна алгебра», «Диференціальні рівняння» та ін.), опанування ними базовими м атематичними компетентностями та вдале їх застосування до вирішення різних практичних проблем, є гарантією формування грунтовних професійних навичок у таких спеціалістів. У сучасній системі вищої освіти особливої актуальності набуває формування математичної компетентності як складової професійної підготовки майбутніх фахівців. Проте традиційне викладання математики нерідко зводиться до засвоєння формул та шаблонного розв'язання задач, що не сприяє розвитку критичного мислення, умінь аналізувати реальні ситуації, будувати математичні моделі та інтерпретувати отримані результати. Фізика, як природнича наука, надає широкі можливості для інтеграції прикладних задач у математичну освіту. Розв'язування фізичних задач із використанням методів математичного моделювання дає змогу студентам не лише глибше засвоїти математичні поняття, а й розвивати міждисциплінарні зв'язки, аналітичне мислення та вміння застосовувати знання в реальних умовах.

Проте в педагогічній практиці бракує методичних підходів до цілеспрямованого використання фізичних задач як засобу формування математичних компетентностей. Також недостатньо досліджено, які саме компетентності найефективніше розвиваються через математичне моделювання, та за яких умов цей процес є найбільш результативним. Це обумовлює потребу в ґрунтовному дослідженні можливостей застосування математичного моделювання фізичних задач у процесі навчання математики з метою формування ключових математичних компетентностей студентів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Основи сучасної методології математичного моделювання були започатковані у працях таких науковців, як В. Глушков, Б. Гнеденко, А. Колмогоров, В. Королюк, В. Остапенко, О. Самарський, та інших. Важливість використання математичного моделювання під час навчання математики зазначено у роботах українських методистів (І. Акуленко, І. Богатирьова, В. Волошена, О. Гриб'юк О, Г. Катеринюк, Т. Крилова, Л. Панченко, А. Прус, Л. Соколенко, Н. Тарасенкова, М. Філімонова, Л. Філон, В. Швець) та зарубіжних науковців (W. Blum, R. Borromeo Ferri, H. Burkhardt, G. Kaiser, K. Maaß, H. Pollak [1, 2, 3, 4]) та інших.

Метою статті є дослідження процесу формування математичних компетентностей у студентів через застосування математичного моделювання фізичних задач, аналіз ефективності використання математичних інструментів та методів для розвитку критичного мислення та аналітичних навичок у навчальному процесі.

Виклад основного матеріалу. Математичне моделювання є важливим інструментом пізнання, що дозволяє студентам не лише аналізувати реальні фізичні процеси, але й розвивати гнучке математичне мислення, логіку та здатність до формалізації. У контексті формування математичних компетентностей студентів математичне моделювання виконує роль інтегратора знань з математики та фізики (хімії, біології, географії та ін.), сприяючи глибшому розумінню міжпредметних зв'язків.

Процес математичного моделювання включає кілька основних етапів [5, 6].

1. Постановка задачі – формулювання проблеми з урахуванням умов та обмежень.

2. Створення математичної моделі – перехід від опису того чи іншого явища до його математичної інтерпретації (через рівняння, функції, графіки, неформальні залежності тощо).

3. Аналіз моделі – розв'язання моделі аналітичними або числовими методами.

4. Інтерпретація результатів – переведення математичного результату у контекст, відповідний до умови задачі (фізичний, хімічний, біологічний тощо).

5. Перевірка адекватності моделі – зіставлення результатів моделювання з експериментальними або теоретичними даними.

Залучення студентів різних спеціальностей (природничо-математичних, інженерних, ІТ, та ін.) до розв'язання фізичних задач за допомогою математичного моделювання стимулює формування таких ключових математичних компетентностей, як: 1) математична грамотність – здатність інтерпретувати, формулювати та розв'язувати проблеми, що мають математичну природу; 2) уміння застосовувати математичні методи на практиці – використання рівнянь, графіків, функцій для опису реальних явищ; 3) критичне мислення – аналіз припущень, перевірка гіпотез, вибір оптимального методу розв'язання; 4) комунікативні навички – пояснення ходу моделювання, інтерпретація результатів у доступній формі.

Таким чином, математичне моделювання фізичних задач є не лише ефективним методом засвоєння математичних понять, а й потужним засобом розвитку математичних компетентностей, необхідних для професійної діяльності майбутніх фахівців. Деякі аспекти застосування математичного інструментарію до розв'язування прикладних задач з курсів математичного аналізу та оптики описано нами у роботах [7, 8].

Розглянемо задачу з класичного курсу математичного аналізу, створимо її математичну модель за вказаними вище етапами.

Задача 1 [9]. Куля входить у дошку товщиною h = 10 см зі швидкістю $\vartheta_0 = 200$ м/с, а вилітає з дошки, пробивши її, зі швидкістю $\vartheta_1 = 80$ м/с. Припускаючи, що сила опору дошки рухові кулі пропорціональна квадратові швидкості руху, знайти, протягом якого часу триває рух кулі через дошку.

1. *Постановка задачі*. Відповідно до умови задачі маємо об'єкт – це куля, масу якої позначимо через m. Цей об'єкт проходить деякий шлях, який позначимо через x за

час t. Спроектуємо нашу фізичну ситуацію на геометричну площину, при цьому будемо вважати, що початок декартової системи координат співпадає з початком входження кулі в дошку. Зображуємо всі сили, які діють на кулю. ($\overline{P}$ – сила тяжіння, $\overline{N}$ – сила протидії, $\overline{\overline{F_{0п}}}$ – сила опору) (рис.1).

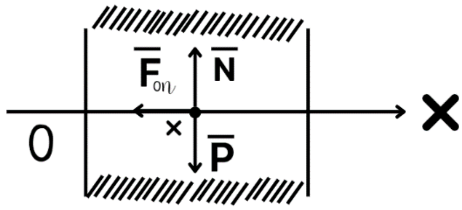


Рис.1

Таким чином, ми потлумачили умову даної задачі математичною мовою з використанням певних фізичних властивостей даного об'єкта.

2. *Створення математичної моделі.*

Згідно другого закону Ньютона $m\overline{a} = \sum_i \overline{F_i}$. в проекції на вісь OX маємо $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(\frac{dx}{dt})^2$ так, як $F_{0п} = -k(\frac{dx}{dt})^2$ згідно умови задачі, або ж $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}(\frac{dx}{dt})^2$.

Таким чином, математичною моделлю даної задачі є диференціальне рівняння 2-го порядку, яке нам і треба розв'язати.

3. *Аналіз моделі.*

Для того, щоб розв'язати отримане диференціальне рівняння, зробимо у ньому наступну заміну: $\frac{dx}{dt} = \vartheta$. Підставивши в дане рівняння, отримаємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, а саме: $\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{k}{m}\vartheta^2$. Відокремивши змінні, матимемо: $\frac{d\vartheta}{\vartheta^2} = -\frac{k}{m}dt$.

Інтегруємо обидві частини останнього рівняння: $\int\frac{d\vartheta}{\vartheta^2} = \int\frac{k}{m}dt$, отримаємо: $\frac{1}{\vartheta} = \frac{k}{m}t + C_1$ або $\vartheta = \frac{1}{\frac{k}{m}t + C_1}$.

Згідно з початковими умовами $\vartheta_0 = 200$ м/с в початковий момент $t = 0$, тому, підставивши їх у загальний розв'язок, ми можемо визначити C_1: $\frac{1}{200} = \frac{k}{m} \cdot 0 + C_1$, $C_1 = \frac{1}{200}$.

Звідси залежність швидкості від часу матиме вигляд: $\vartheta = \frac{1}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{200}}$; $\vartheta = \frac{1}{1+200\frac{k}{m}t}$.

Оскільки швидкість є похідною від шляху, то замінимо її на відповідний вираз: $\vartheta = \frac{dx}{dt}$, звідки отримаємо знову диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, розв'яжемо його аналогічно: $\frac{dx}{dt} = \frac{200}{1+200\frac{k}{m}t}$; $dx = \frac{200dt}{1+200\frac{k}{m}t}$, $x = \frac{m}{k}\ln(1 + 200\frac{k}{m}t) + C_2$. Використавши ще раз початкову умову, тобто $x = 0$ при $t = 0$, отримаємо, що $C_2 = 0$.

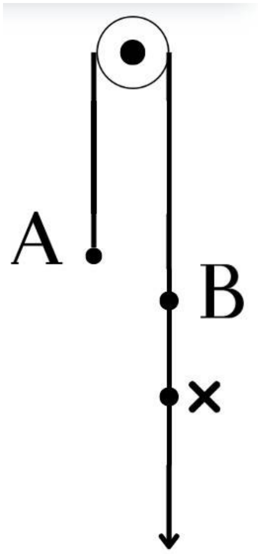
Отже, залежність відстані від часу, яку пройде куля в дошці матиме вигляд:

$$x = \frac{m}{k}\ln(1 + 200\frac{k}{m}t) + C_2.$$

Підставивши $\vartheta = 80\,м/с$ і $x = 0{,}1$м у відповідні рівності, отримаємо систему з невідомими $\frac{k}{m}$ та t:

$$\begin{cases} 80 = \dfrac{200}{1 + 200\dfrac{k}{m}t} \\ 0{,}1 = \dfrac{m}{k}\ln(1 + 200\dfrac{k}{m}t) \end{cases}$$

Виразивши з першого рівняння $1 + 200\frac{k}{m}t - \frac{5}{2}$ і підставивши дане значення у друге рівняння, отримаємо, що $0{,}1 = \frac{m}{k}\ln\frac{5}{2}$, звідси $\frac{k}{m} = 10\ln\frac{5}{2}$. Підставляємо отримане значення у перше рівняння системи і знайдемо час, протягом якого куля рухається в дошці:



$$80 = \frac{200}{1+200\cdot 10\ln\frac{5}{2}t};$$

$$\frac{5}{2} - 1 + 2000\ln\frac{5}{2}t;$$

$$\frac{3}{2} = 2000\ln\frac{5}{2}t\,;$$

$$t = \frac{3}{2\cdot 2000\ln\dfrac{5}{2}} \approx 0{,}0008\,.$$

4. *Інтерпретація результатів.*

Отриманий розв’язок останньої системи рівнянь і є шуканим часом, протягом якого триває рух кулі через дошку, а саме: $t \approx 0{,}0008$ с.

Рис. 2

5. *Перевірка адекватності моделі.*

Отриманий результат є достовірним, тому і є розв’язком даної задачі.

Отже, отримали відповідь: $t \approx 0{,}0008$ с.

Дану задачу варто пропонувати студентам після вивчення курсу математичного аналізу, зокрема після вивчення теми «Інтегральне числення функції однієї змінної», та або під час вивчення курсу «Диференціальні рівняння», або ж наприкінці його в якості закріплення вивченого матеріалу.

Далі розглянемо задачу вже з класичного курсу механіки та за аналогічним принципом побудуємо її математичну модель.

Задача 2 [10]. Мотузка висить на гладенькому блоці. В початковий момент по один бік звисає 10 м мотузки, а по інший 8 м. Сила опору не враховується. Через скільки часу мотузка зісковзне з блоку?

1. *Постановка задачі.* Для того, щоб краще розібратися в умові задачі та описати її математичну модель, необхідно зробити відповідний рисунок (рис. 2). Блок з мотузкою розмістимо у систему координат так, що спрямуємо вісь OX вниз. Блок обираємо як точку відліку. Тоді за умовою задачі $AO = 8$ м, $BO = 10$ м. Нехай в момент часу t точка B при русі знаходиться на відстані x від початку координат.

2. *Створення математичної моделі.*

Відповідно до другого закону Ньютона $m\overline{a} = \sum_i \overline{F_i}$ маємо $m\overline{a} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$, де $\overline{F_1}$ – сила тяжіння правої частини мотузки, а $\overline{F_2}$ – лівої.

Звідси

$F_1 = m_1 \cdot g = x \cdot g \cdot \gamma$,

$F_2 = -m_2 \cdot g = -(18 - x)\gamma g$,

де γ – лінійна густина мотузки , g – прискорення вільного падіння. Отже, маємо:

$$18 \cdot \gamma \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = x \cdot g \cdot \gamma - (18 - x)\gamma g,$$

$$18\frac{d^2 x}{dt^2} = (2x - 18)g,$$

$$9\frac{d^2 x}{dt^2} = (x - 9)g.$$

Таким чином наша математична модель – це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку.

3. *Аналіз моделі.*

Для того, щоб розв'язати отримане диференціальне рівняння, перепишемо його в більш зручному вигляді та складемо характеристичне рівняння до нього:

$$9\frac{d^2 x}{dt^2} - xg = -9g$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{g}{9}x = -g$$

Характеристичне рівняння: $k^2 - \frac{g}{9} = 0$ (Позначимо $\frac{g}{9} = a^2, a = \sqrt{\frac{g}{9}} \in R$), тоді отримаємо:

$k_1 = a\ k_2 = -a$,

$x_1 = e^{at}, x_2 = e^{-at}$.

Загальний розв'язок даного рівнянням матиме вигляд: $x = C_1 e^{\sqrt{\frac{g}{9}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{9}}t}$.

Знайдемо константи, використовуючи початкові умови задачі, а саме: $x = 10$, $t = 0$, $\vartheta = 0$. Для цього замінимо швидкість $\vartheta = \frac{dx}{dt}$; $\vartheta = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{9}} \cdot C_1 e^{\sqrt{\frac{g}{9}}t} \cdot C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{9}}t}$.

Отже, $\begin{cases} 10 = C_1 + C_2, \\ 0 = \sqrt{\frac{g}{9}}C_1 - \sqrt{\frac{g}{9}}C_2; \end{cases}$ $\begin{cases} 10 = C_1 + C_2, \\ 0 = C_1 - C_2; \end{cases}$ звідки $C_1 = 5$, $C_2 = 5$.

Закон зміни шляху від часу матиме вигляд: $x = 5e^{\sqrt{\frac{g}{9}}t} + 5e^{-\sqrt{\frac{g}{9}}t} = 10ch\sqrt{\frac{g}{9}}t$.

Підставимо $x = 18$ (м) та отримаємо $18 = 10ch\left(\sqrt{\frac{g}{9}}t\right)$,

звідси : $ch\left(\sqrt{\frac{g}{9}}t\right) = \frac{9}{5}$, $\sqrt{\frac{g}{9}}t = Arch\frac{9}{5}$, $t = Arch2{,}5 \cdot \sqrt{\frac{g}{t}}$, $t \approx 1{,}5$.

4. *Інтерпретація результатів.*

Отриманий розв'язок диференціального рівняння з початковими умовами і є шуканим часом, через який мотузка зісковзне з даного блоку, а саме: $t \approx 1{,}5$ с.

5. *Перевірка адекватності моделі.*

Отриманий результат є достовірним, тому і є розв'язком даної задачі.

Отже, отримали відповідь: $t \approx 1{,}5$ с.

Далі розглянемо дещо складнішу задачу. Для її розв'язання необхідні більш ґрунтовні знання як з фізики, так і з курсів математичного аналізу, диференціальних рівнянь, комплексного аналізу. Тобто насправді розв'язування даної задачі є синергію набутих здобувачами компетентностей з різних навчальних дисциплін, а моделювання задачі спрямоване на відтворення знань з різних розділів математики та фізики.

Задача 3. Коливальний контур складається з ємності *C,* індуктивності *L*, активного опору *R*. Конденсатор заряджається від постійного джерела напругою *U* в початковий момент (вимикач в положенні 1). Потім вимикач переводиться в положення 2 (рис. 3) і в замкнутому електричному колі відбуваються електромагнітні коливання (енергія електричного поля конденсатора переходить в енергію магнітного поля котушки і навпаки). При цьому частина енергії втрачається на активному опорі *R* (результуючий активний опір всіх складових) і величина напруги на конденсаторі зменшується. Знайти закон: 1) зміни напруги на конденсаторі *u*; 2) зміни струму в контурі *i*; 3) зміни заряду конденсатора *q*.

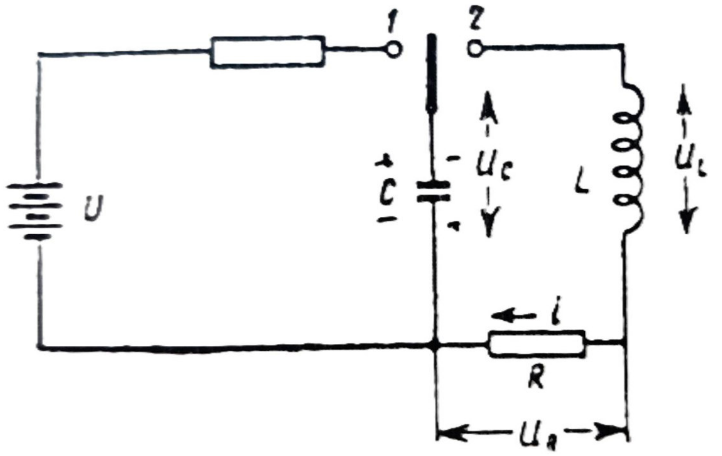


Рис. 3

1. *Постановка задачі.*

Відповідно до умови задачі, коливальний контур, зображений на рисунку 3, складається з ємності *C,* індуктивності *L*, активного опору *R*. Коли вимикач переводять з положення 1 в положення 2, то в замкнутому електричному колі відбуваються електромагнітні коливання. При цьому частина енергії втрачається на активному опорі *R* (результуючий активний опір всіх складових) і величина напруги на конденсаторі зменшується.

2. *Створення математичної моделі.*

Згідно закону Ома струм *i* в контурі визначається як частка від ділення напруги на величину опору, тобто: $i = \dfrac{U_R}{R}$ або $i = \dfrac{U_C - U_L}{R}$.

Звідси $iR = U_C - U_L$ або ж $U_C + iR - U_L = 0$, (1)

де U_C – напруга на конденсаторі, $U_Д$ – напруга на індуктивності.

Відомо, що $U_L = L\dfrac{di}{dt}$, $U_C = \dfrac{q}{c}$, $i = -\dfrac{dq}{dt}$.

Звідси $\frac{di}{dt}=-\frac{d^2q}{dt^2}$.

Тоді рівняння (1) матиме такий вигляд: $-L\frac{d^2q}{dt^2}-R\frac{dq}{dt}-\frac{q}{c}=0$

або ж $\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{Lc}q=0$. (2)

Отже, ми побудували математичну модель даної задачі у вигляді диференціального рівняння 2-го порядку (2), який подає закон зміни заряду на конденсаторі. Далі розв'яжемо його.

3. *Аналіз моделі.*

Після підстановки в (2) $q=cU$ отримаємо закон зміни напруги на конденсаторі:

$c\frac{d^2U}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{cdU}{dt}+\frac{cU}{Lc}=0$, звідки після виконання елементарних дій отримаємо:

$$\frac{d^2U}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dU}{dt}+\frac{U}{Lc}=0. \quad (3)$$

Продиференціюємо рівняння (2) по змінній t і отримаємо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{Lc}q\right)=0,\ \frac{d^3q}{dt^3}+\frac{R}{L}\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{Lc}\frac{dq}{dt}=0.$$

Враховуючи, що $-\frac{d^3q}{dt^3}=\frac{d^2i}{dt^2}$, $-\frac{d^2q}{dt^2}=\frac{di}{dt}$, $-\frac{dq}{dt}=\frac{di}{dt}$, $-\frac{dq}{dt}=i$ отримаємо

диференціальне рівняння закону зміни струму: $\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{Lc}=0$ (4)

Розв'язуємо диференціальне рівняння (4), складаємо характеристичне рівняння та розв'язуємо його: $k^2+\frac{R}{L}k+\frac{1}{Lc}=0$.

$$D=\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2-4\frac{1}{Lc}}=2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{Lc}}.$$

$$k_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{Lc}}.$$

Позначимо $\frac{1}{Lc}=\omega^2$, а $\frac{R}{2L}=\alpha$, тоді корені характеристичного рівняння матимуть вигляд: $k_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega^2}=-\alpha\pm j\sqrt{\omega^2-\alpha^2}$, де через j позначено уявну одиницю в електротехніці ($j^2=-1$).

Отже, заряд конденсатора при знайдених коренях [11] змінюється за законом:

$$q=e^{-\alpha t}\left(C_1\cos\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t+C_2\sin\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t\right). \quad (5)$$

Знаходимо C_1 і C_2 з початкових умов: $t = 0$, $q = Q_{\max}$, $i = 0$.

Підставивши в (5) дані значення, отримаємо, що $Q_{\max} = C_1$.

Тому $q=e^{-\alpha t}\left(Q_{\max}\cos\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t+C_2\sin\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t\right)$.

Звідси

$$i=-\frac{dq}{dt}=e^{-\alpha t}(-\alpha Q_{\max}\cos\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t-\alpha C_2\sin\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t-Q_{\max}\sin\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t\cdot\sqrt{\omega^2-\alpha^2}+$$

$$+C_2\cos\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t\cdot\sqrt{\omega^2-\alpha^2}),$$

$$i=-e^{-\alpha t}\left(\left(\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\cdot C_2-\alpha Q_{\max}\right)\cos\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t-\left(Q_{\max}\sqrt{\omega^2-\alpha^2}+\alpha C_2\right)\sin\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t\right).$$

(6)

При $t=0$, $i=0$ отримаємо: $\sqrt{\omega^2-\alpha^2}C_2-\alpha Q_{\max}=0$, $C_2=Q_{\max}\cdot\dfrac{\alpha}{\sqrt{\omega^2-\alpha^2}}$.

Отримані значення підставимо в (5) та (6) та отримаємо:

$$q=Q_{\max}e^{-\alpha t}\left(\cos\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t+\frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2-\alpha^2}}\sin\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t\right),\tag{7}$$

$$i=Q_{\max}\left(\left(\sqrt{\omega^2-\alpha^2}+\frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2-\alpha^2}}\right)e^{-\alpha t}\sin\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t\right).\tag{8}$$

Максимальне значення струму $I_{\max}=Q_{\max}\left(\sqrt{\omega^2-\alpha^2}+\dfrac{\alpha^2}{\sqrt{\omega^2-\alpha^2}}\right)$, тоді рівність (8)

матиме вигляд: $i=I_{\max}e^{-\alpha t}\sin\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t$. (9)

Використавши залежність $U=\dfrac{q}{c}$, отримаємо закон зміни напруги на ємності:

$$U=U_{\max}e^{-\alpha t}\left(\cos\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t+\frac{\alpha^2}{\sqrt{\omega^2-\alpha^2}}\sin\sqrt{\omega^2-\alpha^2}t\right).\tag{10}$$

4. Інтерпретація результатів.

Отже, рівності (7), (9) та (10) – це і є шукані закони зміни заряду, струму та напруги. Можна зобразити ці затухаючі коливання графічно на рисунку 4.

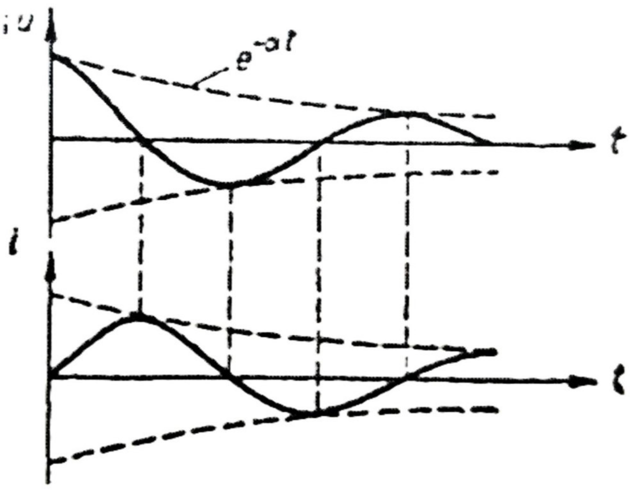


Рис. 4.

5. *Перевірка адекватності моделі.*

Отримані результати є достовірними, тому вони і є розв’язками даної задачі.

Висновки. Математичне моделювання фізичних задач є ефективним засобом розвитку математичних компетентностей студентів, оскільки сприяє формуванню здатності застосовувати математичні знання для аналізу реальних процесів, критичного мислення та самостійного розв’язання комплексних проблем.

Інтеграція фізичних задач у навчальний процес з математики дозволяє посилити міжпредметні зв’язки, актуалізувати прикладний характер математичних знань і підвищити мотивацію студентів до їх вивчення.

Застосування етапів математичного моделювання (аналіз задачі, побудова моделі, математичний розв'язок, інтерпретація результатів) формує у студентів цілісний підхід до розв'язання задач, розвиває аналітичні навички та вміння переносити знання у нові контексти.

Практичні результати впровадження методики засвідчили, що цілеспрямоване використання фізичних задач у процесі навчання математики сприяє не лише кращому засвоєнню теоретичного матеріалу, а й формуванню ключових компонентів математичної компетентності: логічного мислення, здатності до абстрагування, математичного мовлення та математичного моделювання.

Отже, математичне моделювання фізичних задач доцільно розглядати як педагогічну технологію, що забезпечує ефективне формування математичної компетентності студентів у процесі їхньої фахової підготовки.

Список використаних джерел

1. Greer, B., Verschaffel, & Mukhopadhyay. Modelling for life: Mathematics and children's experience. In W. Blum, W. Henne, & M. Niss (Eds), Applications and modelling in mathematics education. 2007. pp. 89-98. (ICMI Study 14).
2. Schukajlow S., Krawitz J., Kanefke J., Blum W., Rakoczy K. Open modelling problems: cognitive barriers and instructional prompts. Educational Studies in Mathematic. 2023.
3. Arseven A. Mathematical Modelling Approach in Mathematics EducationUniversal Journal of Educational Research 3(12), 2015. pp. 973-980.
4. Krawitz J., Kanefke J., Schukajlow S. Rakoczy K. Making realistic assumptions in mathematical modelling. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.). Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, 2022. pp. 59-66.
5. Прус А. Математичне моделювання як лінза реального світу. Фізико-математична освіта, 38(4), 2023. С. 56–61. DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-4-008.
6. Богатирьова І.М., Сердюк З.О. Методика розв'язування прикладних задач у шкільному курсі геометрії. Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки». Черкаси: Вид. від. ЧНУ 2011. С. 19-23.
7. Тарасенкова Н. А., Сердюк З. О. Особливості викладання курсу математичного аналізу для фахівців з аналізу даних. Вісник Черкаського університету. Серія "Прикладна математика. Інформатика". 2020. № 1. Черкаси : Вид. від. ЧНУ ім. Б.Хмельницького. С. 57-73.DOI 10.31651/2076-5886-2020-1-77-86.
8. Сердюк З.О., Ткаченко А.В. Застосування математичного інструментарію до розв'язування фізичних задач. Збірник наукових праць "Актуальні питання природничо-математичної освіти". Випуск № 1 (21). Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Суми, 2023. С. 77-85.
9. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: підручник. К.: Либідь, 1993. 320 с.
10. Диференціальні рівняння: Посібник. Розробники: В. К. Григоренко, Д.М. Лила; Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького. Черкаси: Вид. від. Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького, 2011. 232 с.
11. Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М. Диференціальні та інтегральні рівняння. К. Либідь, 2004. 408 с.

References:

1. Greer, B., Verschaffel, & Mukhopadhyay. (2007). Modelling for life: Mathematics and children's experience. In W. Blum, W. Henne, & M. Niss (Eds), Applications and modelling in mathematics education. [in English].
2. Schukajlow S., Krawitz J., Kanefke J., Blum W., Rakoczy K. (2023). Open modelling problems: cognitive barriers and instructional prompts. Educational Studies in Mathematic. [in English].
3. Arseven A. (2015). Mathematical Modelling Approach in Mathematics EducationUniversal Journal of Educational Research 3(12). [in English].
4. Krawitz J., Kanefke J., Schukajlow S. Rakoczy K. (2022) Making realistic assumptions in

mathematical modelling. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.). Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3. [in English].
5. Prus A. (2023) Mathematical modeling as a lens of the real world. Physics and mathematics education, 38(4), [in Ukrainian].
6. Bogatyreva I., Serdiuk Z. (2011) Methodology for solving applied problems in the school geometry course. Bulletin of Cherkasy University. Series "Pedagogical Sciences". Cherkasy, 19-23. [in Ukrainian].
7. Tarasenkova, N., Serdiuk, Z. (2020). Features of teaching a course of mathematical analysis for data analysis specialists. Bulletin of Cherkasy University. Series "Applied Mathematics. Informatics", 1, 57-73. Published: Mar 18, 2021. DOI 10.31651/2076-5886-2020-1-77-86. [in Ukrainian].
8. Serdiuk Z., Tkachenko A. (2023). Application of mathematical tools to solving physical problems. Collection of scientific works "Actual issues of natural and mathematical education". Issue No. 1 (21). Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko, Sumy, 77-85. [in Ukrainian].
9. Dorogovtsev, A. (1993). Mathematical analysis: [textbook] [in Ukrainian].
10. Differential equations: Manual. Developers: V. K. Hryhorenko, D. M. Lyla. (2011). Cherkasy National University named after Bohdan Khmelnytsky. – Cherkasy: Publishing house of Cherkasy National University named after Bohdan Khmelnytsky: [textbook] [in Ukrainian].
11. Kryvosheya S., Perestyuk M., Burym V. (2004). Differential and Integral Equations. K. Lybid: [textbook] [in Ukrainian].

BOSOVSKIY Mykola,
PhD (Pedagogical Sciences), Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Learning of Mathematics,Cherkasy Bohdan Khmelnytsky National University
SERDIUK Zoia,
PhD (Pedagogical Sciences), Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Learning of Mathematics,Cherkasy Bohdan Khmelnytsky National University
TRETIAK Mykola,
PhD (Pedagogical Sciences), Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Learning of Mathematics,Cherkasy Bohdan Khmelnytsky National University

DEVELOPMENT OF STUDENTS' MATHEMATICAL COMPETENCIES THROUGH MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL PROBLEMS.

Abstract. Introduction. *The article examines an approach to the development of students' mathematical competencies through mathematical modeling of physical problems. The relevance of integrating mathematical and physical knowledge in the educational process is substantiated, with the aim of fostering analytical thinking, the ability to apply mathematical methods to describe real phenomena, and to solve applied problems. The stages of mathematical modeling and their impact on the assimilation of mathematical concepts, the development of creative abilities, and the increase in motivation to study mathematics are analyzed. Particular attention is paid to examples of problems that can be effective in forming interdisciplinary connections and professionally relevant competencies. The article concludes that the systematic use of mathematical modeling is advisable in the training of specialists in technical and natural sciences.*

The purpose *of the article is to study the process of forming mathematical competencies in students through the use of mathematical modeling of physical problems, to analyze the effectiveness of using mathematical tools and methods for the development of critical thinking and analytical skills in the educational process.*

Originality. *The application of the stages of mathematical modeling (problem analysis, model construction, mathematical solution, interpretation of results) forms a holistic approach to solving problems in students, develops analytical skills and the ability to transfer knowledge to new contexts.*

The practical results of the implementation of the methodology have shown that the purposeful use of physical problems in the process of teaching mathematics contributes not only to better assimilation of theoretical material, but also to the formation of key components of mathematical competence: logical thinking, the ability to abstract, mathematical speech and mathematical *modeling.*

Conclusion. *Mathematical modeling of physical problems is an effective means of developing students' mathematical competencies, as it contributes to the formation of the ability to apply mathematical knowledge to analyze real processes, critical thinking and independent solution of complex problems. Integration of physical problems into the educational process of mathematics allows to strengthen interdisciplinary connections, actualize the applied nature of mathematical knowledge and increase students' motivation to study them. Therefore, mathematical modeling of physical problems should be considered as a pedagogical technology that ensures the effective formation of students' mathematical competence in the process of their professional training.*

Keywords: *mathematical analysis, differential equations, complex analysis, mathematical modeling, physical problems, mathematical competencies, higher education students.*

Одержано редакцією 24.09.2024 р.
Прийнято до публікації 30.10.2024 р.