УДК 378:517

DOI 10.31651/2076-5886-2023-1-41-48

PACS

БОСОВСЬКИЙ Микола Васильович,
кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри математики та методики навчання математики,
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
e-mail: bosovskyy@gmail.com
ORCID: 0000-0003-1187-5550

СЕРДЮК Зоя Олексіївна,
кандидат педагогічних наук, доцент,
завідувач кафедри математики та методики навчання математики,
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
e-mail: serdyuk_z@ukr.net
ORCID: 0000-0002-9376-4346

АСИМПТОТИЧНА ОЦІНКА ДЕЯКИХ РЕКУРЕНТНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

У статті розглянуто деякі властивості рекурентних послідовностей та уточнено результати для одного класу нескінченно малих послідовностей. Матеріали можуть бути використані в курсах «Додаткові розділи математичного аналізу», «Чисельні методи», «Алгоритмізація та програмування» тощо для підготовки студентів спеціальностей різних математичних та технічних спеціальностей.

Ключові слова: *рекурентні послідовності, нескінченно мала послідовність, асимптотичний метод, теорема.*

Постановка проблеми. Підготовка сучасних фахівців найчастіше вимагає симбіозу знань з різних галузей. Нинішній інженер, програміст, математик має добре поєднувати знання з математики та програмування. Тобто, грунтовні знання з математичних та ІТ дисциплін, а також вдале їх застосування, є гарантією формування професійних навичок у таких спеціалістів. Зокрема, рекурентні співвідношення мають надзвичайно важливе значення для програмування. Вони використовуються у аналізі алгоритмів, наближених обчисленнях, динамічному програмуванні, тощо. Під час розгляду рекурентних послідовностей однією з головних задач є її розв'язання, тобто необхідно виразити x_n через n. Ця задача не завжди розв'язується. Тому постає питання уточнення n для знаходження x_n в залежності від того, як обрано перший член x_0.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Різні аспекти використання рекурентних послідовностей досліджено у роботах А.П. Креневича [1], Т.О.Коротєєвої [2], В.М. Пивоварчик, О.М. Яковлєва, О.М. Болдирєва [3] та інші. Питанням підвищення ефективності викладання курсу вищої математики та математичного аналізу й удосконаленням методики його навчання студентів ЗВО різних технічних спеціальностей присвячені роботи М. Бородіна, Л. Васяк, К. Власенко, М. Жалдак [4], Т. Крилової, О. Кондратьєвої, В. Клочка [5], І. Лов'янової, О. Потапової, С. Федорової, С. Федосєєва та ін.

Мета статті – розглянути деякі властивості рекурентних послідовностей та уточнити результати для одного класу нескінченно малих послідовностей.

Виклад основного матеріалу. Часто трапляється, що під час розв'язання тієї чи іншої задачі, потрібно обчислити визначену яким-небудь чином величину, а це обчислення призводить до надмірно великої кількості операцій, так що їх виконання стає досить складним або ж практично неможливим. У таких випадках справжньою знахідкою може виявитися який-небудь інший метод отримання додаткової інформації про цю величину, який дозволяє знайти її значення хоча б наближено. Такий метод (як зазначив Лаплас) «тим більш точний, чим більш потрібний»; ми отримуємо тим більш точне наближення до шуканої величини, чим більше дій потрібно для її прямого обчислення.

У даному випадку ми говоримо про асимптотичну оцінку або асимптотичну формулу.

Метою асимптотичних методів є отримання *O*-оцінок і *o*-оцінок у випадках, коли скористатися визначенням функції для дуже великих (або дуже малих) значень аргументу досить важко. Трапляється навіть так, що визначення функції настільки важке, що вже для звичайних значень змінної легше отримати асимптотичну інформацію, ніж будь-яку іншу.

Ні *O*-оцінка, ні *o*-оцінка в їх звичайному вигляді безпосередньо не застосовні для обчислювальних цілей. Однак, майже у всіх випадках, де є такі оцінки, можна, переглянувши доведення, замінити *O*-оцінки нерівностями, які містять числові сталі.

Для цього на кожному етапі наших дій ми повинні вказувати визначені числа або функції з визначеними властивостями там, де при отриманні асимптотичних оцінок ми обмежились доведенням існування таких чисел або функцій.

У даній роботі уточнюється результат для одного класу рекурентних послідовностей, які отримані раніше в статті С.С. Линчук «Про швидкість збіжності рекурентних послідовностей», [6, с. 72-79], в якій розглядається один клас нескінченно малих рекурентних послідовностей.

Згідно з цієї роботою, *n*-й член послідовності виражається через *n* і φ(x). Функція φ(x) отримується з функціонального рівняння $\varphi(f(x)) = \varphi(x) - 11,\ x \in (0, x_0)$.

Асимптотика загального члену одного класу нескінченно малих рекурентних послідовностей. У роботі [6] для одного класу нескінченно малих рекурентних послідовностей в досить загальній ситуації вивчено асимптотичну поведінку їх загального члену. При цьому отримано узагальнення відомих результатів в цьому напрямку.

Скрізь далі асимптотичні рівності для послідовностей розглядаються при $n \to \infty$.

Теорема 1. Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі $(0, x_0)$ і задовольняє умовам:

а) $0 < f(x) < x$ при $0 < x < x_0$;

б) $f(x) = x - ax^2 + bx^3 + cx^4 + 0(x^4)$ при $x \to 0$, де a –додатна, a, b і c – довільні сталі.

Тоді для рекурентної послідовності $x_n = f(x_{n-1}),\ x_1 \in (0, x_0)$ при $n \to \infty$ має місце рівність

$$x_n = \frac{1}{an} + \frac{b-a^2}{a^3} \cdot \frac{\ln n}{n^2} + \frac{\varphi(x_1)}{an^2} + \frac{(b-a^2)^2}{a^5} \cdot \frac{\ln^2 n}{n^3} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right), \qquad (1)$$

де $\varphi(x)$ – деяка функція, визначена на $(0, x_0)$, яка залежить від $f(x)$ і задовольняє співвідношенню $\varphi(f(x)) = \varphi(x) - 1$ при $x \in (0, x_0)$ (2)

Розглянемо приклади.

1) Нехай $f(x)=x-x^2$. Тоді для відповідної рекурентної послідовності $\{x_n\}$, в якій $0<x_1<1$, маємо:

$$x_n=\frac{1}{n}-\frac{\ln n}{n^2}+\frac{\varphi(x_1)}{n^2}+\frac{\ln^2 n}{n^3}+o\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)$$

2) Для послідовності $x_n=\ln(1+x_{n-1}), x_1>0$, при $n\to\infty$ правильні рівність:

$$x_n=\frac{2}{n}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\ln n}{n^2}+\frac{2\varphi(x_1)}{n^2}+\frac{2\ln^2 n}{9n^3}+o\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)$$

Теорема 2. Нехай функція $f\left(x\right)$ неперервна на деякому інтервалі $\left(0;x_0\right)$ і задовольняє умовам:

а) $0<f(x)<x$ при $0<x<x_0$.

б) $f(x)=x+\sum\limits_{k=2}^{m+2} f_k x^k+o(x^{m+2})$ при $x\to 0$

де m – деяке натуральне число, а $f_k\left(k=2,...,m+2\right)$ – дійсні числа, причому $f_2<0$.

Тоді для рекурентної послідовності $x_n=f(x_{n-1}), x_1\in(0,x_0)$ при $n\to\infty$ має місце рівність:

$$x_n=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{i=1} a_i^{(k)}\frac{\ln^k n}{n^i}+a_{m+1}^{(m)}\frac{\ln^m n}{n^{m+1}}+o\left(\frac{\ln^m n}{n^{m+1}}\right), \qquad (3)$$

де $a_i^{(k)}(i=1,...,m;k=0,...,i-1)$ і $a_{m+1}^{(m)}$ – деякі константи.

Таким чином згідно [6], рекурентна послідовність $\{x_n\}$ може бути вивчена за допомогою теорем 1 і 2.

Уточнення деяких асимптотичних рівностей для загального члену деяких рекурентних послідовностей.

Теорема 1.1. Нехай функція $f\left(x\right)$ неперервна на деякому інтервалі $\left(0;x_0\right)$ і задовольняє умовам:

а) $0<f(x)<x$ при $0<x<x_0$

б) $f\left(x\right)=x-ax^2+bx^3$ при $x\to 0$, де a – додатна, а b – довільна стала,

тоді для рекурентної послідовності $x_n=f\left(x_{n-1}\right)$, $x_1\in(0,x_0)$ при $n\to\infty$ має місце рівність:

$$x_n=\frac{1}{an}+\frac{2(b-a^2)}{a^3}\frac{\ln n}{n^2}+\frac{2(b-a)^2}{a^5}\frac{\ln^2 n}{n^3}+o(\frac{\ln^2 n}{n^3}) \qquad (4)$$

Доведення.

З умови а) випливає, що $\{x\}_{n=1}^{\infty}$ – нескінченно мала монотонно спадна послідовність додатних чисел. Використавши двічі теорему Штольца і умову б), отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = l\underset{n\to\infty}{im}\frac{n}{x_n^{-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \frac{1}{a},\ x_n = \frac{1}{an} + o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\ln n}\left(x_n - \frac{1}{an}\right) = \frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{n - \frac{1}{ax_n}}{\ln n} = \frac{b-a^2}{a^3}$$

$$x_n = \frac{1}{an} + \frac{b-a^2}{a^3}\frac{\ln n}{n^2} + o(\frac{\ln n}{n^2}) \text{ при } n\to\infty \tag{6}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{an} + \frac{b-a^2}{a}\ln n\frac{1}{a^2n^2} + o(\frac{\ln n}{n^2}) = x_n + \frac{b-a^2}{a}\ln n x_n^2 + o(\frac{\ln n}{n^2}) =$$

$$= \frac{1}{an} + \frac{b-a^2}{a^3}\frac{\ln n}{n^2} + \frac{b-a^2}{a}\ln n(\frac{1}{an} + \frac{b-a^2}{a^3}\frac{\ln n}{n^2})^2 + o(\frac{\ln n}{n^2}) =$$

$$= \frac{1}{an} + \frac{b-a^2}{a^3}\frac{\ln n}{n^2} + \frac{b-a^2}{a}\ln n(\frac{1}{a^2n^2} + \frac{2(b-a^2)}{a^5}\frac{\ln^2 n}{n^3} + \frac{(b-a^2)^2\ln^2 n}{a^6n^4}) + o(\frac{\ln n}{n^2}) =$$

$$= \frac{1}{an} + \frac{b-a^2}{a^3}\frac{\ln n}{n^3} + \frac{(b-a^2)\ln n}{a^3n^2} + \frac{2(b-a^2)\ln^2 n}{a^5n^3} + \frac{(b-a^2)^3\ln^3 n}{a^7n^4} =$$

$$= \frac{1}{an} + \frac{2(b-a^2)}{a^3}\frac{\ln n}{n^2} + \frac{2(b-a^2)^2}{a^5}\frac{\ln^2 n}{n^3} + o(\frac{\ln^2 n}{n^3}).$$

Теорему доведено.

Розглянемо приклади:

1)* Нехай $f(x) = x - x^2$. Тоді для відповідної рекурентної послідовності $\{x_n\}$, в якій $0 < x < 1$, маємо:

$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{2\ln n}{n^2} + \frac{2\ln^2 n}{n^3} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)$$

2)* Для послідовності $x_n = \ln(1 + x_{n-1}), x > 0$, при $n\to\infty$ правильна рівність:

$$x_n = \frac{2}{n} + \frac{2\left(-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{32}}\cdot\frac{\ln n}{n^2} + \frac{2\left(0 - \frac{1}{4}\right)^2\ln^2 n}{\frac{1}{32}\cdot n^3} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right) =$$

$$\frac{2}{n} + \frac{4\ln n}{n^2} + \frac{4\ln^2 n}{n^3} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right),$$

тобто

$$x_n = \frac{2}{n} + \frac{4\ln n}{n^2} + \frac{4\ln^2 n}{n^3} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right).$$

<u>*Теорема 2.1.*</u> Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі $(0; x_0)$ і задовольняє умовам:

а) $0 < f(x) < x$ при $0 < x < x_0$;

б) $f\left(x\right) = x - ax^2 + bx^3$ при $x \to 0$, де a – додатна, а b – довільна стала,

тоді для рекурентної послідовності $x_n = f\left(x_{n-1}\right)$ $x \in (0, x_0)$ при $n \to \infty$ має місце рівність

$$x_n = \frac{1}{an} + \frac{b-a^2}{a^3}\frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{an^2}\left(-1\right) + o(\frac{\ln^2 n}{n^3}) \tag{7}$$

Доведення.

З умови а) випливає, що $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ – нескінченно мала монотонно спадна послідовність додатних чисел. Використавши двічі теорему Штольца і умову б), отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^{-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \frac{1}{a};\ x_n = \frac{1}{a_n} + o(\frac{1}{n}); \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\ln n}(x_n - \frac{1}{a_n}) = \frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{n - \frac{1}{ax_n}}{\ln n} = \frac{b-a^2}{a^3};$$

$$x_n = \frac{1}{an} + \frac{b-a^2}{a^3}\frac{\ln n}{n^2} + o(\frac{\ln n}{n^2}) \text{ при } n \to \infty \tag{9}$$

$$x_n^2 = \frac{1}{a^2n^2} + \frac{2(b-a^2)}{a^4}\frac{\ln n}{n^3} + \frac{(b-a^2)^2\ln^2 n}{a^6n^4};$$

$$x_n^3 = \frac{1}{a^3n^3} + 3\frac{1}{a^2n^2}\frac{b-a^2}{a^3}\frac{\ln n}{n^2} + 3\frac{1}{an}\frac{(b-a^2)\ln^2 n}{a^6n^4} + \frac{(b-a^2)^3\ln^3 n}{a^9n^6}.$$

Оскільки, $x_n = f(x_{n-1})$, то

$$x_{n+1} = x_n - ax_n^2 + bx_4^3 = \frac{1}{an} + \frac{b-a^2}{a^3}\frac{\ln n}{n^2} - \frac{1}{an^2} - \frac{2(b-a^2)\ln n}{a^3n^3} - \frac{(b-a^2)^2\ln^2 n}{a^5n^4} +$$

$$+\frac{b}{a^3n^3} + \frac{3b(b-a^2)\ln n}{a^5n^4} + +\frac{3b(b-a^2)^2\ln^2 n}{a^7n^5} + \frac{b(b-a^2)^3\ln^3 n}{a^9n^6} =$$

$$= \frac{1}{an} + \frac{b-a^2}{a^3n^2}\ln n + \frac{1}{an^2}(-1) + o(\frac{\ln^2 n}{n^3})$$

Теорему доведено.

Розглянемо приклади:

1)** Нехай $f(x) = x - x^2$. Тоді для відповідної рекурентної послідовності $\left\{x_n\right\}$, в якій $0 < x < 1$, маємо:

$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)$$

2)** Для послідовності $x_n = \ln(1 + x_{n-1}), x > 0$, при $n \to \infty$ правильна рівність:

$$x_n = \frac{2}{n} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{8}} \cdot \frac{\ln n}{n^2} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right) = \frac{2}{n} - \frac{2\ln n}{n^2} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right),$$

тобто $x_n = \frac{2}{n} - \frac{2\ln n}{n^2} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)$.

Наслідки та ілюстративні приклади до теорем 1.1 та 2.1.

При визначенні x_n через n не враховується x_1, тому щоб врахувати x_1 потрібно підрахунок провести не до n, як пропонується в теоремах 1.1, 2.1, а до $n+k-1$. Для визначення k пропонується наслідок 1 та наслідок 2.

Наслідок 1. У теоремі 1.1 загальний член послідовності знаходився за формулою:

$$x_n = \frac{1}{an} + \frac{2(b-a^2)}{a^3}\frac{\ln n}{n^2} + \frac{2(b-a)^2}{a^5}\frac{\ln^2 n}{n^3} + o(\frac{\ln^2 n}{n^3}).$$

При врахуванні x_1, загальний член послідовності x_n може бути представлений формулою:

$$x_n = \frac{1}{a(n+k-1)} + \frac{2\left(b-a^2\right)}{a^3}\frac{\ln\left(n+k-1\right)}{\left(n+k-1\right)^2} + \frac{2\left(b-a^2\right)^2}{a^5}\frac{\ln^2\left(n+k-1\right)}{\left(n+k-1\right)^3} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right),$$

де k залежить від x_1 і визначається з рівності:

$$x_1 = \frac{1}{ak} + \frac{2\left(b-a^2\right)}{a^3}\frac{\ln k}{k^2} + \frac{2\left(b-a^2\right)^2}{a^5}\frac{\ln^2 k}{k^3}.$$

Наслідок 2.

У теоремі 2.1 загальний член послідовності знаходився за формулою:

$$x_n = \frac{1}{an} + \frac{b-a^2}{a^3}\frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{an^2}\left(-1\right) + o(\frac{\ln^2 n}{n^3}).$$

При врахуванні x_1, загальний член послідовності x_n може бути представлений формулою:

$$x_n = \frac{1}{a(n+k-1)} + \frac{b-a^2}{a^3}\frac{\ln\left(n+k-1\right)}{\left(n+k-1\right)^2} - \frac{1}{a\left(n+k-1\right)^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right),$$

де k залежить від x_1 і визначається з рівності: $x_1 = \frac{1}{ak} + \frac{b-a^2}{a^3}\frac{\ln k}{k^2} - \frac{1}{ak^2}$.

Наведемо приклади, які ілюструють висновки, отримані в теоремах 1.1, 2.1. **У** таблицях 1 і 2 для різних значень n підраховано точне значення x_n, наближене значення з теоремами 1.1 та 2.1. Таблиця 1 ілюструє приклад 1. Таблиця 2 ілюструє приклад 2**.**

Висновки. У даній роботі сформульовано та доведено Теорему 1.1 та Теорему 2.1, які є уточненням результатів Теорем 1 та 2 [4]. Висновки теорем перевірені експериментально, про що говорить таблиця 1 та 2. При досить великих n експериментальні дані майже співпадають з точними, що вказує на правильність теорем.

Список використаних джерел

1. Креневич А.П. Алгоритми і структури даних. Підручник. – К.: ВПЦ "Київський Університет", 2021. – 200 с.
2. Коротєєва Т. О. Алгоритми та структури даних: навч. Посібник. Львів: Львівської політехніки, 2014. – 280 с.
3. В. М. Пивоварчик, О. М. Яковлєва, О. М. Болдарєва. Дискретна математика (частина 1). Навчальний посібник. – Одеса : ПНПУ імені К. Д. Ушинського, 2022. – 145 с.
4. Жалдак М. І., Г. О. Михалін, С. Я. Деканов. Математичний аналіз з елементами інформаційних технологій: навчальний посібник. – К. : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2012. – 128 с.
5. Клочко В. І., З. В. Бондаренко. Формування знань майбутніх інженерів з інформаційних технологій розв'язування диференціальних рівнянь : монографія – Вінниця: ВНТУ, 2010. – 216 с
6. Линчук С.С. Про швидкість збіжності рекурентних послідовностей. Математика, Випуск 11 (1997), С. 72-79.
7. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: підручник. К.: Либідь, 1993. – 320 с.

References.

1. Krenevich, A. (2021). Algorithms and data structures: [textbook] [in Ukrainian].
2. Koroteeva, T. (2014). Algorithms and data structures: [textbook] [in Ukrainian].
3. Pyvovarchyk, V., Yakovleva, O., Boldareva, O. (2022). Discrete mathematics (part 1): [textbook] [in Ukrainian].
4. Zhaldak, M., Mikhalin, G., Dekanov, S. (2012). Mathematical analysis with elements of information technology: [textbook] [in Ukrainian].
5. Klochko, V., Bondarenko, Z. (2010). Formation of knowledge of future engineers on information technologies for solving differential equations: [monograph] [in Ukrainian].
6. Lynchuk, S. (1997). On the rate of convergence of recurrent sequences. Mathematics, Issue 11.
7. Dorogovtsev, A. (1993). Mathematical analysis: [textbook] [in Ukrainian].

BOSOVSKIY Mykola,
PhD (Pedagogical Sciences), Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Learning of Mathematics,Cherkasy Bohdan Khmelnytsky National University
SERDIUK Zoia,
PhD (Pedagogical Sciences), Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Learning of Mathematics,Cherkasy Bohdan Khmelnytsky National University

ASYMPTOTIC ESTIMATION OF SOME RECURRENT SEQUENCES

Abstract. Introduction. *The training of modern specialists often requires a symbiosis of knowledge from different fields. Basic knowledge of mathematical and IT disciplines, as well as their successful application, is a guarantee of the formation of professional skills in such specialists. Recurrence relations are extremely important for programming. They are used in algorithm analysis, approximate calculations, dynamic programming, etc. When considering recurrent sequences, one of the main problems is its solution, that is, it is necessary to express xn in terms of n. This task is not always solved. Therefore, the question arises of refining n to find xn depending on how the first term x0 is chosen.*

Originality. *The purpose of asymptotic methods is to obtain O-estimates and o-estimates in cases where it is quite difficult to use the function definition for very large (or very small) values of the argument. Sometimes it is easier to obtain asymptotic information than any other.*

Neither the O-score nor the o-score in their usual form are directly applicable for computational purposes. However, in almost all cases where such estimates are available, it is possible, after reviewing the proof, to replace the O-estimates with inequalities that contain numerical constants. For this, at each stage of our actions, we must indicate certain numbers or functions with certain properties where, when obtaining asymptotic estimates, we limited ourselves to proving the existence of such numbers or functions. In this work, the result for one class of recurrent infinitesimal *recurrent sequences is refined.*

Conclusion. *In this article, Theorem 1.1 and Theorem 2.1 are formulated and proved, which are refinements of the results of Theorems 1 and 2.*

The conclusions of the theorems have been tested experimentally, which is shown in Tables 1 and 2. For sufficiently large experimental data, they almost coincide with the exact ones, which indicates the correctness of the theorems

Одержано редакцією 25.08.2023 р.
Прийнято до публікації 27.09.2023 р.