

УДК 378:517

DOI 10.31651/2076-5886-2022-1-42-49

PACS 01.40.Fk, 02.30.Hq

СЕРДЮК Зоя Олексіївна,кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач
кафедри математики та методики навчання
математики,Черкаський національний університет імені
Богдана Хмельницького

e-mail: serdyuk_z@ukr.net

ORCID: 0000-0002-9376-4346

БОСОВСЬКИЙ Микола Васильович,кандидат педагогічних наук, доцент, доцент
кафедри математики та методики навчання
математики,Черкаський національний університет імені
Богдана Хмельницького

e-mail: bosovsky@y@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1187-5550

ТРЕТЯК Микола Васильович,кандидат педагогічних наук, доцент, доцент
кафедри математики та методики навчання
математики,Черкаський національний університет імені
Богдана Хмельницького

e-mail: tretiak@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

У статті розглянуто чотири рівні сформованості математичних понять, які варто пропрацювати зі студентами природничих, технічних та ІТ-спеціальностей під час вивчення курсів «Диференціальні рівняння», «Математичний аналіз», «Вища математика»; запропоновано приклади відповідних завдань.

Ключові слова: диференціальні рівняння, методи розв'язування, диференціальне та інтегральне числення, студенти природничих та технічних спеціальностей ЗВО.

Постановка проблеми. Курси математичного аналізу та диференціальних рівнянь є одними із основних базових курсів математичного циклу дисциплін, які вивчають як студенти математичних, так і фізичних, технічних, ІТ спеціальностей ЗВО тощо. Ці курси насичені великою кількістю досить складних математичних понять та фактів (теорем, формул тощо). Як показали наші дослідження [7, 8], засвоєння та, що найголовніше, застосування сукупності великої кількості різних математичних фактів та понять у процесі розв'язування задач часто зумовлюють появу труднощів у здобувачів. Тому методика їх вивчення має будуватися як специфічна для такої категорії студентів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Питанням підвищення ефективності викладання курсів диференціальних рівнянь та математичного аналізу, вдосконалення методики їх навчання студентів ЗВО присвячені роботи багатьох сучасних методистів та математиків, зокрема М. Бородіна, Л. Васяк, К. Власенко,

М. Жалдака [1], Т. Крилової [2], О. Кондратьєвої [3], В. Клочка [4], Д. Лили [5], І. Лов'янової, Т. Максимової, І. Михайлової, І. Михайленко, О. Потапової [6], С. Федорової, С. Федосєєва, В. Швеця, Є. Ягової та ін.

Мета статті – розглянути особливості застосування теорії диференціальних рівнянь та методів знаходження різних типів інтегралів до розв'язування задач геометричного та механічного змісту та врахувати їх під час навчання студентів спеціальностей галузей 01 Освіта/ Педагогіка, зокрема 014 Середня освіта, 11 Математика та Статистика, 10 Природничі науки, 12 Інформаційні технології, сформулювати відповідні рекомендації.

Виклад основного матеріалу. У Черкаському національному університеті імені Богдана Хмельницького навчальні дисципліни «Математичний аналіз» та «Диференціальні рівняння» входять до циклу професійної підготовки більшості спеціальностей природничого спрямування, як обов'язкові, або як розділи курсу «Вища математика» зокрема студентів таких спеціальностей, як 014.04 Середня освіта (Математика), 014.08 Середня освіта (Фізика), 014.09 Середня освіта (Інформатика), 104 «Фізика та астрономія», 105 «Прикладна фізика та наноматеріали», 111 Математика, 113 «Прикладна математика», 126 «Інформаційні системи та технології». Ці дисципліни вивчаються у досить великому обсязі, як видно на рисунках 1-4 (представлено фрагменти деяких навчальних планів). Крім того, ці предмети є важливим підґрунтям для подальшого вивчення дисциплін професійного спрямування за вказаними спеціальностями. Тому ґрунтовне вивчення саме даних дисципліни, та їх практичне спрямування, є важливим елементом подальшої професійної підготовки майбутніх фахівців з математичних, фізичних, технічних та ІТ-спеціальностей.

Інструментарій математичного аналізу, що далі використовується у теорії диференціальних рівнянь, зокрема диференціального та інтегрального числення, дуже потужний, тому й використання його під час розв'язування різних фізичних, математичних задач, завдань математичного моделювання, програмування може бути надзвичайно важливим. Тому студенти мають вільно володіти даним матеріалом, зокрема обирати серед багатьох й застосовувати саме ті математичні формули, за допомогою яких задача буде розв'язана якнайпростіше або ж використовувати найбільш раціональні методи знаходження того чи того виду інтеграла тощо.

1. ОБОВ'ЯЗКОВІ КОМПОНЕНТИ ОСВІТНЬО-ПРОФЕСІЙНОЇ ПРОГРАМИ										
1.1. Цикл професійної підготовки										
ОК 01	Інформатика	1		6	180	60	30	30		120
ОК 02	Програмування	1;2		12	360	120	60	60		240
ОК 03	Дискретна математика		2	5	150	50	24		26	100
ОК 04	Алгебра та геометрія	1;2		11	330	110	54		56	220
ОК 05	Програмне забезпечення та інформаційно-комунікаційні технології		2	5	150	50	20	30		100
ОК 06	Алгоритми та структури даних	3;4		12	360	120	60	60		240
ОК 07	Мови програмування	3;4		10	300	100	40	60		200
ОК 08	Математичний аналіз	4	3	10	300	100	48		52	200
ОК 09	Теорія ймовірностей та математична статистика		3	4	120	40	20		20	80
ОК 10	Архітектура обчислювальних систем	3		4	120	40	14	26		80
ОК 11	Веб-програмування	4		5	150	50	20	30		100
ОК 12	Об'єктно-орієнтоване програмування	5		6	180	60	20	40		120
ОК 13	Бази даних та інформаційні системи	5		6	180	60	20	40		120
ОК 14	Методи обчислень	5		6	180	60	30	30		120

Рис. 1. Фрагмент навчального плану спеціальності 113 «Прикладна математика»

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. ОБОВ'ЯЗКОВІ КОМПОНЕНТИ ОСВІТНЬО-ПРОФЕСІЙНОЇ ПРОГРАМИ											
1.1. Цикл професійної підготовки											
OK01	Вступ до фаху		1		6	180	60	20	20	20	120
OK02	Вища математика	1;2;3			15	450	180	60		120	270
OK03	Математичний аналіз	1;2			9	270	120	40		80	150
OK04	Механіка	2			9	270	90	30	30	30	180
OK05	Молекулярна фізика	3			9	270	90	30	30	30	180
OK06	Електрика і магнетизм	4			9	270	90	30	30	30	180
OK07	Оптика	5			6	180	90	30	30	30	90
OK08	Фізика атома	6			6	180	90	30	30	30	90
OK09	Фізика ядра і елементарних частинок	7			6	180	60	30		30	120
OK10	Курсова робота з фаху			8	3	90					90
OK11	Класична механіка	4			6	180	60	30		30	120

Рис. 2. Фрагмент навчального плану спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»

1. ОБОВ'ЯЗКОВІ КОМПОНЕНТИ ОСВІТНЬО-ПРОФЕСІЙНОЇ ПРОГРАМИ											
1.1. Цикл професійної підготовки											
OK.01	Аналітична геометрія	2			9	270	96	48		48	174
OK.02	Дискретна математика	1	2		10	300	100	48		52	200
OK.03	Лнійна алгебра	2;3			9	270	96	48		48	174
OK.04	Математичний аналіз: функції однієї змінної	1;2			13	390	148	72		76	242
OK.05	Математичний аналіз: функції кількох змінних	4	3		17	510	182	84		98	328
OK.06	Диференціальні рівняння	4	3		9	270	100	50		50	170
OK.07	Диференціальна геометрія і топологія	5	4		9	270	94	46		48	176
OK.08	Комплексний аналіз	6	5		9	270	96	48		48	174
OK.09	Теорія ймовірностей і математична статистика	7;8			12	360	120	60		60	240
OK.10	Актуальні проблеми шкільної математичної освіти		7		6	180	64	32		32	116
OK.11	Методика навчання математики	7			6	180	64	32	32		116
OK.12	Педагогіка	5	4		6	180	72	36		36	108
OK.13	Вікова та педагогічна психологія	3			4	120	48	24		24	72
OK.14	Практикум із розв'язування математичних задач		5		6	180	68	28		40	112
OK.15	Шкільний курс математики та його дидактика	5;6			13	390	140	70		70	250

Рис. 3. Фрагмент навчального плану спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Слідом за відомими методистами виділимо чотири основні рівні сформованості того чи іншого математичного поняття: 1) розсіяне уявлення студента про явище, предмет тощо; 2) студент може відрізнити одне поняття чи явище від іншого, назвати ознаки поняття, але не відрізняє істотні властивості від неістотних; 3) студент засвоює істотні та неістотні властивості, але не може узагальнити поняття; 4) студент може узагальнити поняття, вільно оперує ним [9].

Щоб досягти четвертого рівня сформованості математичного поняття та вільно оперувати ним під час розв'язування різних задач, зокрема й практичного спрямування, студент має пройти всі етапи. Пропонуємо диференційовану систему вправ для фіксації кожного рівня засвоєння поняття у студентів під час вивчення курсів математичного аналізу та диференціальних рівнянь.

Завдання 1 рівня засвоєння

Тут ми пропонуємо досить прості завдання на розпізнавання того чи іншого виду диференціальних рівнянь за допомогою візуальної оболонки. Тобто студенти мають відтворити лише відтворити певний вид рівнянь, пригадавши його загальний вигляд.

Завдання 1. В готельному номері сейф має чотиризначний пароль. Щоб його відкрити необхідно розгадати цей шифр. Послідовно (не змінюючи порядку), треба

набрати букви, які є правильними відповідями до наступних завдань. У кожному завданні лише одна правильна відповідь.

1. Серед наведених нижче диференціальних рівнянь оберіть рівняння з відокремленими змінними виключно за зовнішніми характеристиками.

A	B	C	D
$(x^2 + y)dx = (y + 1)dy$	$x^2 dx = (y + 1)dy$	$x^2 t dx = (y + t)dy$	$x^{3y} dx = (y + 1)dy$

2. Серед наведених нижче диференціальних рівнянь оберіть однорідне рівняння виключно за зовнішніми характеристиками.

A	B	C	D
$\frac{y}{x} + y' = \frac{y^2}{x^3}$	$y' - \frac{y^2}{x^2} = \frac{y^3}{x^2}$	$\frac{3y}{2x} + y' = \frac{y^2}{x^2}$	$-\frac{y}{x^2} + y' = \frac{y}{x^3}$

3. Серед наведених нижче диференціальних рівнянь оберіть лінійне рівняння виключно за зовнішніми характеристиками.

A	B	C	D
$y' + xy^2 = xy$	$y' + x^2 y = x^3 + 1$	$y' + (x + 1)y = x + y$	$y' + x^2 y^2 = xy$

4. Яке з наведених нижче рівнянь можна розв'язати без застосування підстановки?

A	B	C	D
$ydx + xdy = 0$	$y' + xy = 1$	$xy' + y = x$	$y'' + 5y' + 6 = 0$

Завдання 2-3 рівня засвоєння

Тут ми пропонуємо завдання трохи складніші, які спрямовані не лише на відтворення загальної картини того чи іншого виду диференціального рівняння, а й вже треба пройти один чи кілька кроків у його розв'язанні.

Завдання 2. Студентам потрібно розв'язати чергове завдання квесту, у якому зашифровано чотири літери, які є правильними відповідями до наступного завдання. Послідовно (не змінюючи порядку), треба їх записати.

1. Яку заміну варто використати для розв'язання наступного диференціального рівняння $x^2 y' - y = \sqrt{y^2 - x^2}$?

A	B	C	D
$y = uv, y' = u'v + uv'$	$y = ux, y' = u'x + u$	$y = ux, y' = u'x$	$y = u + x, y' = u' + 1$

2. Яку заміну варто використати для розв'язання наступного диференціального рівняння $xy' - yx = \sqrt{1 - x^2}$?

A	B	C	D
$y = uv, y' = u'v + uv'$	$y = ux, y' = u'x + u$	$y = ux, y' = u'x$	$y = u + x, y' = u' + 1$

3. Яку заміну варто використати для розв'язання наступного диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2 = 0$?

A	B	C	D
$y = e^x$	$y = e^{3x}$	$y = e^{2x}$	$y = e^{kx}$

4. Дано рівняння; $y'' + 2y' - 3 = 5e^x$. Права спеціальна частина його частинного розв'язку буде мати вигляд ...

A	B	C	D
$y = e^x$	$y = 5e^x$	$y = Ae^x$	$y = Axe^x$

Завдання 4 рівня засвоєння

На цьому етапі доцільно вже ускладнити завдання, тобто студент не лише має відтворювати певний вид рівнянь та вказувати алгоритм його розв'язання, а застосовувати весь комплекс отриманих знань та навичок до розв'язування складніших задач – часто геометричного чи механічного змісту. Тут також на допомогу прийдуть і знання з диференціального та інтегрального числення. Робота над практичними задачами дозволяють студентам піднятися на новий вищий творчий рівень відтворення отриманих знань, вмінь та навичок. Такі завдання наближають їх також до життєвих ситуацій. Перед виконанням такого завдання варто зробити певні узагальнення попереднього матеріалу.

Завдання 3. Знайти лінії, в яких піднормаль в будь-якій точці так відноситься до суми абсциси і ординати, як ордината цієї точки до її абсциси.

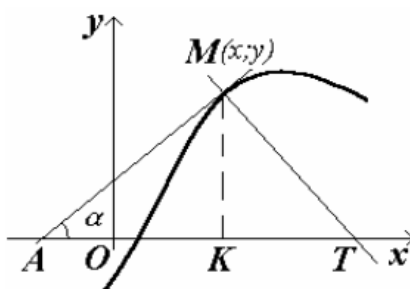


Рис. 4

Розв'язання. Спочатку виконаємо відповідний рисунок (рис. 4) та позначимо точку дотику (M), нормаль (MT) та під нормаль (KT). Очевидно, що $KT = -y \cdot y'$. Далі

відповідно до умови задачі складаємо рівняння: $-\frac{yy'}{x+y} = \frac{y}{x}$ та розв'язуємо його:

$-\frac{y'}{\frac{x}{y}+1} = \frac{y}{x}$. Отримали однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Щоб

його розв'язати, виконаємо заміну: $y = tx, y' = t'x + t$. Далі маємо: $-\frac{t'x+t}{\frac{1}{t}+1} = t$,

$$t'x + t = 1 + t, t'x = 1, \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}, dt = \frac{dx}{x}, t = \ln \frac{C}{x}, \text{ звідси } y = x \ln \frac{C}{x}.$$

$$\text{Відповідь: } y = x \ln \frac{C}{x}.$$

Під час розв'язування практичних задач геометричного чи фізичного змісту студенти узагальнюють як всі здобуті знання з курсу диференціальних рівнянь, математичного аналізу, а також елементарні знання з геометрії та фізики. Наприклад, що таке дотична і нормаль до кривої, під дотична і під нормаль, площі різних геометричних фігур, об'єми тіл тощо. Такі завдання доцільно пропонувати студентам і під час практичних занять і для індивідуальних розрахункових робіт.

Висновки. Подальші дослідження ми вбачаємо у розробці системи підготовчих диференційованих завдань для підготовки до розв'язування геометричних та фізичних задач за допомогою диференціальних рівнянь.

Список використаної літератури:

1. Жалдак М. І. Математичний аналіз з елементами інформаційних технологій: навчальний посібник / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, С. Я. Деканов. – К. : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2012. – 128 с.
2. Клочко В. І. Формування знань майбутніх інженерів з інформаційних технологій розв'язування диференціальних рівнянь : монографія / В. І. Клочко, З. В. Бондаренко. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 216 с.
3. Кондратьєва О. М. Методична система контролю і коригування знань та умінь студентів технічних спеціальностей у процесі навчання вищої математики : автореф. дис... канд. пед. наук : 13.00.02 – теорія та методика навчання математики / Оксана Марківна Кондратьєва ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 2007. – 20 с.
4. Крилова Т. В. Наукові основи навчання математики студентів нематематичних спеціальностей (на базі металургійних, енергетичних і електромеханічних спеціальностей вищого закладу технічної освіти) : автореф. дис... д-ра пед. наук: 13.00.02; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 1999. – 36 с.
5. Диференціальні рівняння: Посібник. Розробники: В. К. Григоренко, Д.М. Лиля; Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького. – Черкаси: Вид. від. Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького, 2011. – 232 с.
6. Потапова О. М. Аналіз дослідження труднощів студентів технічних спеціальностей при вивченні математичного аналізу / О. М. Потапова // Вісник Черкаського університету. Серія Педагогічні науки. – № 12 (265). – Черкаси, 2013. – С. 83–90.
7. Сердюк З. О. Реалізація компетентнісного підходу під час вивчення курсу математичного аналізу в ВНЗ. – Вісник Черкаського університету, Випуск № 8 (341): серія «Педагогічні науки». – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2015. – С. 101-106.
8. Тарасенкова Н. А., Сердюк З. О. Особливості викладання курсу математичного аналізу для фахівців з аналізу даних. Вісник Черкаського університету. Серія “Прикладна математика. Інформатика”. 2020. № 1. Черкаси : Вид. від. ЧНУ ім. Б.Хмельницького. С. 57-73. Published: Mar 18, 2021. DOI 10.31651/2076-5886-2020-1-77-86
9. Тарасенкова Н. А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики : [монографія] / Н. А. Тарасенкова. – Черкаси : Відлуння-плюс, 2002. – 400 с.

References:

1. Zhaldak, M., Mikhailin, G., Dekanov, S. (2012). Mathematical analysis with elements of information technology: [textbook] [in Ukrainian].

2. Klochko, V., Bondarenko, Z. (2010). Formation of knowledge of future engineers on information technologies for solving differential equations: [monograph] [in Ukrainian].
3. Kondratieva, O. (2007). Methodical system of control and correction of knowledge and skills of students of technical specialties in the process of learning higher mathematics: author. dis ... cand. ped. sciences: 13.00.02 - theory and methods of teaching mathematics [in Ukrainian].
4. Krylova, T. (1999). Scientific bases of teaching mathematics to students of non-mathematical specialties (based on metallurgical, energy and electromechanical specialties of higher technical education): author's ref. dis ... Dr. ped. Sciences: 13.00.02 [in Ukrainian].
5. Differential equations: Manual. Developers: Grigorenko, V., Lyla, D. (2011). Cherkassy: Ed. from. Cherkasy National University named after Bohdan Khmelnytskyi. 232 p. [in Ukrainian].
6. Potapova, O. (2013). Analysis of the study of difficulties of students of technical specialties in the study of mathematical analysis. Bulletin of Cherkasy University. Pedagogical Sciences Series, 12 (265), 83–90 [in Ukrainian].
7. Serdiuk, Z. (2015). Implementation of the competence approach during the study of the course of mathematical analysis in higher education. Bulletin of Cherkasy University, 8 (341): series "Pedagogical Sciences", 101-106 [in Ukrainian].
8. Tarasenkova, N., Serdiuk, Z. (2020). Features of teaching a course of mathematical analysis for data analysis specialists. Bulletin of Cherkasy University. Series "Applied Mathematics. Informatics", 1, 57-73. Published: Mar 18, 2021. DOI 10.31651/2076-5886-2020-1-77-86
9. Tarasenkova, N. (2002). The use of sign-symbolic means in teaching mathematics: [monograph] [in Ukrainian].

SERDIUK Zoia,

PhD (Pedagogical Sciences), Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Learning of Mathematics, Cherkasy Bohdan Khmelnytsky National University

BOSOVSKIY Mykola,

PhD (Pedagogical Sciences), Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Learning of Mathematics, Cherkasy Bohdan Khmelnytsky National University

TRETIK Mykola,

PhD (Pedagogical Sciences), Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Learning of Mathematics, Cherkasy Bohdan Khmelnytsky National University

APPLICATION OF THE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS TO SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS

Abstract. Introduction. *The courses of mathematical analysis and differential equations are one of the main basic courses of the mathematical cycle of disciplines, which are studied by students of mathematical, physical, technical, IT specialties of higher education institutions, etc. As our studies have shown, acquisition and, most importantly, the application of a set of a large number of different mathematical facts and concepts in the process of solving problems often lead to the appearance of difficulties in achievers. As shown by our studies, assimilation and, most importantly, the application of a set of a large number of different mathematical facts and concepts in the process of solving problems often lead to the appearance of difficulties in learners. Therefore, the method of their study should be built as specific for this category of students.*

The purpose of the article is to consider the peculiarities of the application of the theory of differential equations and methods of finding different types of integrals for solving problems of geometric and mechanical content and to take them into account during the training of students in the fields of 01 Education/ Pedagogy, in particular 014 Secondary Education, 11 Mathematics and Statistics, 10 Natural Sciences sciences, 12 Information technologies, formulate appropriate recommendations.

Originality. *in the article, we indicated the vectors that should be used with students to consolidate and reproduce the methods of solving differential equations when solving problems in geometry and physics. Exercises have been developed in accordance with four levels of the formation of a mathematical concept: 1) the student's scattered idea of a phenomenon, subject, etc.; 2) the student can distinguish one concept or phenomenon from another, name the features of the concept, but does not distinguish essential properties from non-essential ones; 3) the student learns essential and non-essential properties, but cannot generalize concepts; 4) the student can generalize concepts, freely operates with them.*

Conclusion. *We see further research in the development of a system of preparatory differential problems to prepare for solving geometric and physical problems using differential equations.*

Keywords: *differential equations, solution methods, differential and integral calculus, students of natural and technical specialties of the university*

Одержано редакцією 17.10.2022р.
Прийнято до публікації 03.11.2022р.