УДК 519.8 **О.О. Ємець, М.В. Леонова**

СИМЕТРІЯ ПЕРЕСТАВНИХ МНОГОГРАННИКІВ ТА ЇХ КОМБІНАТОРНИЙ ТИП

В роботі досліджується множина перестановок з елементів заданої мультимножини, тобто множина перестановок з повтореннями. Досліджено властивості її опуклої оболонки – многогранника перестановок. При цьому використовується така властивість, що множина перестановок збігається з множиною вершин переставного многогранника. Виклад ведеться з використанням термінології мультимножин (основа, кратність елементів, первинна специфікація). В роботі досліджується центральна симетрія переставних многогранників, зокрема розглянута центральна симетрія вершин, ребер та і-граней многогранника.Встановлено критерій центральної симетрії вершин многогранника перестановок у випадку сталості різниці двох сусідніх елементів основи мультимножини та рівності рівновіддалених елементів від кінців кортежа, який є основою цієї мультимножини.

Доведена центральна симетрія переставних многогранників, у яких мультимножини, що визначають перестановки, мають спільну основу з властивістю сталості різниці двох сусідніх елементів основи та їх первинні специфікації є кортежами, один з яких утворюється з іншого зміною порядку слідування елементів на протилежний. Показано, що многогранники, які є опуклими оболонками множин перестановок описаних вище, є центрально симетричними. Доведена центральна симетричність переставного многогранника, коли переставляються різні елементи, що утворюють арифметичну прогресію.

На основі поняття граничного комплексу многогранника та його центральної симетрії, обґрунтовано, що однаковий комбінаторний тип мають переставні многогранники із спільною основою та первинними специфікаціями, що є симетричними відносно порядку елементів.

Ключові слова: *центральнасиметрія, переставний многогранник, комбінаторний тип, множина перестановок.*

Постановка задачі

В наш час актуальною є проблема вивчення ефективності оптимізаційних моделей, в тому числі комбінаторних. При цьому доцільним вбачається дослідження структури та властивостей їх допустимих областей, зокрема загального переставного многогранника[1-6]. Оскільки структура переставних многогранників зв’язана з їх комбінаторним типом, то визначення комбінаторного типу є важливим у дослідженні комбінаторних многогранників. Питання центральної симетрії переставних многогранників у науковій літературі є недослідженим. В [2, 5] розглядається центральна симетрія комбінаторних множин відносно деякої точки, а також як наслідок симетрія деяких переставних многогранників.

Мета статті

Метою статті є дослідження умов центральної симетрії для переставних многогранників для використання цих результатів при комбінаторній типізації переставних многогранників.

Виклад основного матеріалу

Нехай задано мультимножину $G=\{g_1,g_2,...,g_k\}$ з основою $S(G)=(e_1,e_2,...e_\nu)$ і кратностями елементів $k_G(e_i)=\eta_i$. Кортеж кратностей в порядку елементів основи називають первинною специфікацією мультимножини G позначають $[G]=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_\nu)$. Нехай $J_k=\{1,2,...,k\}$; $J_k^0=J_k\cup\{0\}$; $J_0=\varnothing$.

Як відомо [1], множина перестановок елементів мультимножини G збігається з множиною вершин переставного многогранника. Опукла оболонка загальної множини перестановок $E_{k\nu}(G)$ є переставним многогранником $\Pi_{k\nu}(G)$, система умов якого має [1, 3] вигляд:

$$\sum_{i\in\omega}x_i\ge\sum_{i=1}^{|\omega|}g_i\ \ \forall\omega\subset J_k,\ |\omega|<k;\sum_{i=1}^{k}x_i=\sum_{i=1}^{k}g_i, \tag{1}$$

за умови, що $g_i\le g_{i+1}\ \forall i\in J_{k-1}$.

Як відомо [1, 2, 5], точки множини перестановок $E_k(J_k)$ лежать на $(k-1)$-сфері з центром в точці з координатами,

$$\tau=0,5(k+1), \tag{2}$$

і радіусом $r=\frac{1}{6}\sqrt{3k(k+1)(k-1)}$, а $E_{k\nu}(G)$ - на $(k-1)$-сфері з центром в точці $\tau=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}g_i$ та радіусом $r=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(g_i-\tau)^2}$.

В [2, 5] доведено теорему про те, що множина $E_k(J_k)$ центральносиметрична з центром симетрії в точці τ^* з координатами (2). Наслідком [5] є те, що $(k-1)$-многогранник Π_k, який є опуклою оболонкою множини J_k, центральносиметричний з центром симетрії в точці τ^*.

Два многогранника [3] M і M' називаються комбінаторно еквівалентними, якщо ізоморфні їх граничні комплекси $\mathrm{K}_\Gamma(M)$ і $\mathrm{K}_\Gamma(M')$. Іншими словами, многогранники комбінаторно еквівалентні, якщо між їх граничними комплексами існує взаємно однозначне відображення φ, що зберігає порядок включення. Про два комбінаторно еквівалентні многогранника кажуть, що вони є многогранниками одного типу.

Означення 1. Точка $x\in R^k$ називається центрально симетричною відносно деякої точки $\tau^*\in R^k$ для точки $y\in R^k$, якщо x,y,τ^* – лежать на одному відрізку з кінцями x,y, де τ^* – його середина.

Теорема 1. Якщо в мультимножині $G=\{g_1,g_2,...,g_k\}$ з основою $S(G)=(e_1,e_2,...e_\nu)$, де $e_{i+1}=e_i+\Delta\ (\forall i\in J_\nu)$, $\Delta>0$; з первинною специфікацією $[G]=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_\nu)$ є така симетрія первинної специфікації: $\eta_i=\eta_{\nu-i+1}\ (\forall i\in J_\nu)$, то дві вершини $x^1=(x_1^1,...,x_k^1)\in E_{k\nu}(G)$ та $x^2=(x_1^2,...,x_k^2)\in E_{k\nu}(G)$ многогранника

$\Pi_{k\nu}(G) = convE_{k\nu}(G)$ є центрально симетричними відносно $\tau^* = (\tau, \tau, ..., \tau)$, де $\tau = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} g_i$, тоді і тільки тоді, коли $x_i^1 = e_{p_i}$, $x_i^2 = e_{q_i}$, а $p_i + q_i = \nu + 1 \; \forall \; i \in J_k; \; p_i, q_i \in J_\nu$.

Доведення. Якщо дві точки x^1, x^2 многогранника $\Pi_{k\nu}(G)$ центрально симетричні відносно точки τ^*, то їх координати з умови поділу відрізка навпіл визначаються так: $x_i^1 + x_i^2 = 2\tau, \; \forall i \in J_k$. $\sum_{i=1}^{k} x_i^1 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = \sum_{i=1}^{k} g_i = k\tau.$ Оскільки $\tau = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} g_i$, то

$$k\left(x_i^1 + x_i^2\right) = 2\sum_{i=1}^{k} g_i. \tag{3}$$

Деяка координата вершини переставного многогранника за умови твердження визначається як член e_i (i – номер елемента основи) арифметичної прогресії з першим членом e_i та різницею Δ: $e_i = e_1 + (i-1)\Delta$, а вираз $\sum_{i=1}^{k} g_i$ – як сума зважених кратністю η_i цих членів, тобто $\sum_{i=1}^{k} g_i = \sum_{i=1}^{\nu} e_i\eta_i$. Нехай маємо два випадки: коли $\nu = 2l$ і $\nu = 2l+1$. Тоді у першому випадку

$$\sum_{i=1}^{k} g_i = \sum_{i=1}^{\nu} e_i\eta_i = \sum_{i=1}^{l} e_i\eta_i + \sum_{i=1}^{l} e_{\nu-i+1}\eta_i = k\left(e_1 + \frac{\Delta(\nu-1)}{2}\right).$$

Тут враховано, що $e_{\nu-i+1} = e_1 + \Delta(\nu - i)$, а $2\sum_{i=1}^{l} \eta_i = k$.

У другому випадку маємо:

$$\sum_{i=1}^{k} g_i = \sum_{i=1}^{l} e_i\eta_i + \sum_{i=1}^{l} e_{\nu-i+1}\eta_i + e_{l+1}\eta_{l+1} = \left(2e_1 + \Delta(\nu-1)\right)\frac{k}{2} + \eta_{l+1}\Delta\left(l - \frac{\nu-1}{2}\right) = k\left(e_1 + \frac{\Delta(\nu-1)}{2}\right),$$

оскільки доданок $\eta_{l+1}\Delta\left(l - \frac{\nu-1}{2}\right) = 0$ в силу того, що $\nu = 2l+1$. Отже, у випадках, коли $\nu = 2l$ і $\nu = 2l+1$, маємо $\sum_{i=1}^{k} g_i = k\left(e_1 + \frac{\Delta(\nu-1)}{2}\right)$.

Підставимо в (3) координати центральносиметричних точок x^1, x^2. Нехай $x_i^1 = e_{p_i}$, $x_i^2 = e_{q_i}$, $p_i, q_i \in J_\nu \;\; \forall i \in J_k$. (Далі індекси i у p_i, q_i опускаємо, якщо це не приводить до плутанини).

$$x_i^1 + x_i^2 = \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k} g_i, \; e_1 + \Delta(p-1) + e_1 + \Delta(q-1) = \frac{2}{k}k\left(e_1 + \frac{\Delta(\nu-1)}{2}\right),$$

$$2e_1 + \Delta(p+q-2) = 2e_1 + \Delta(\nu-1),$$

$$2e_1 + \Delta(p+q-2) = 2e_1 + \Delta(\nu-1), \; p+q = \nu+1.$$

Оскільки $p = p_i$, $q = q_i$, то маємо $p_i + q_i = \nu + 1$, $p_i, q_i \in J_\nu$, $i \in J_k$.

Тобто номери p_i, q_i елементів основи, яким дорівнюють i-ті елементи центральносиметричних перестановок x^1, x^2, задовольняють умові: $p_i + q_i = \nu + 1$.

Викладення в зворотному порядку дає підтвердження другої частини теореми. Що і треба було довести.

Зауваження 1. Отже, кожна вершина переставного многогранника $\Pi_{k\nu}(G)$ з G ,що задовольняє теоремі 1, має центрально симетричну вершину в $\Pi_{k\nu}(G)$.

Зауваження 2. Якщо у *M* існує центр симетрії вершин, то многогранник завжди можна перенести паралельним перенесенням так, що центр симетрії переміститься в точку $\tau^* = (\tau, \tau, ..., \tau)$, тобто ця умова не є суттєвою.

Означення 2. i-грань Γ_i^1 многогранника $M_1 \subset R^k$ називається центрально симетричною грані Γ_i^2 многогранника $M_2 \subset R^k$ відносно точки $\tau^* = (\tau, \tau, ..., \tau)$, якщо для $\forall z \in \Gamma_i^1 \; \exists \; w \in \Gamma_i^2$ такі, що *z*та *w* – центрально симетричні точки.

Означення 3. Множина $M_1 \subset R^k$ називається центрально симетричною відносно точки $\tau^* = (\tau, ..., \tau) \in R^k$ до множини $M_2 \subset R^k$, якщо для всякої точки $x \in M_1$ існує центрально симетрична відносно τ^* точка $y \in M_2$ і навпаки: $\forall \, y \in M_2 \; \exists x \in M_1$ така, що *x*та *y* – центрально симетричні точки відносно точки τ^*. Такі множини називаються центрально симетричними відносно точки τ^*.

Позначимо $vert\, M$ – множину вершин многогранника *M*.

Твердження 2. Якщо для кожної вершини $x^i, i \in J_r$, многогранника $M_1 \subset R^k$ $x^i \in vertM_1$ існує вершина $y^i \in vertM_2$ многогранника $M_2 \subset R^k$ центрально симетрична відносно точки $\tau^* = (\tau, \tau, ..., \tau)$, то для будь-якої точки $x \in M_1$ існує $y \in M_2$, яка є центрально симетричною відносно τ^*.

Доведення. Згідно умови теореми, для кожної вершини $x^i = \left(x_1^i, ..., x_k^i\right) \in vertM_1$ існує вершина $y^i = \left(y_1^i, ..., y_k^i\right) \in vertM_2$ така, що

$$x_j^i + y_j^i = 2\tau, \; i \in J_r \;\; \forall j \in J_k \tag{4}$$

Скористаємося теоремою (див., наприклад,[3]) про те, що $\forall \; x \in M_1$ існує опукла лінійна комбінація вершин, що є точкою $x : x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^i, \; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1, \; \lambda_i \ge 0 \;\; \forall i \in J_r$. Тобто існує таке представлення координат x_j точки x:

$$x_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_j^i. \tag{5}$$

Помножимо ліву і праву часину рівності (4) на λ_i:

$\lambda_i \left(x_j^i + y_j^i\right) = \lambda_i 2\tau, \; i \in J_r, \; \forall \; j \in J_k$ та візьмемо суму цих рівнянь по *i* від *1* до*r*.

Взявши до уваги вираз (5) та те, що $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$, маємо $x_j + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_j^i = 2\tau \;\; \forall \; j \in J_k$.

Розглянемо $y^* = (y_1, ..., y_k)$, де $y_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_j^i$. Оскільки $y^* = (y_1, ..., y_k) \in M_2$, то для точки $x \in M_1$ існує точка $y \in M_2$ така, що $x_j + y_j = 2\tau$, тобто $x + y = 2\tau^*$. Що і треба було довести.

Твердження 3. Якщо для кожної вершини $x^i \in vertM_1 = \left\{x^1,...,x^r\right\}$ многогранника $M_1 \subset R^k$ існує вершина $y^i \in vertM_2$ многогранника $M_2 \subset R^k$ центрально симетрична відносно точки $\tau^* = (\tau,\tau,...,\tau)$, то будь-яка *i*-грань Γ_i^1 многогранника M_1 має центрально симетричну відносно τ^* *i*-грань Γ_i^2 в M_2, $i \in J_{k-1}$, де $k = \dim M_j$, $j = 1,2$, причому якщо $x \in \Gamma_i^1$ $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^i$, то $y \in \Gamma_i^2$ та $y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y^i$, де x^i, y^i – центрально симетричні відносно τ^* вершини.

Доведення. Спершу розглянемо випадок, коли *i*-грань є ребром, тобто *1*-гранню. Тоді будь-яка координата x_i точки x, що лежить на одному з ребер Γ_1^1 може бути представлена у вигляді:

$x_i = \lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2$, де $x \in \left[x^1; x^2\right] = \Gamma_1^1$, $0 \le \lambda \le 1, i \in J_k, x^j = \left(x_1^j,...,x_k^j\right)$, $j = 1,2.$

Співвідношення для координат симетричних відносно $\tau^* = (\tau,\tau,...,\tau)$ точок x, y, що належать двом довільним ребрам $\Gamma_1^1 \subset M_1, \Gamma_1^2 \subset M_2$ відповідно, має вигляд:

$$x_i + y_i = 2\tau, \tag{6}$$

де $y \in \left[y^1; y^2\right] = \Gamma_1^2, y^j = \left(y_1^j,...,y_k^j\right), j = 1,2, i \in J_k.$ Тобто $y_i = 2\tau - x_i$. Нехай $y_i = \alpha y_i^1 + (1-\alpha)y_i^2$, $0 \le \alpha \le 1$, тоді $\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2 + \alpha y_i^1 + (1-\alpha)y_i^2 = 2\tau.$

Врахувавши (6), маємо $(\lambda-\alpha)\left(x_i^1 - x_i^2\right) = 0.$

Оскільки $x_i^1 \ne x_i^2$, то для того, щоб виконувалося останнє співвідношення необхідно і достатньо, щоб $\alpha = \lambda$. Отже, для будь-якої точки x, що належить ребру $\Gamma_1^1 \subset M_1$, існує центрально симетрична їй відносно τ^* точка *y*, що належить ребру $\Gamma_1^2 \subset M_2$. Тобто за умов теореми будь-яке ребро многогранника M_1 має центрально симетричне відносно τ^* ребро в M_2. Причому якщо $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$, то $y = \lambda y^1 + (1-\lambda)y^2$, де y^1 – точка центрально симетрична відносно τ^* до точки x^1, а точка y^2 центрально симетрична відносно τ^* точці x^2.

Аналогічно доводиться існування симетричних *j*-граней многогранників M_1 та M_2 $j \in J_{k-1}$. Нехай *j*-грань Γ_j^1 має s вершин $z^1,...,z^s$. Якщо $z \in \Gamma_j^1 \subset M_1$, то $z = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i z^i$, $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \ge 0, \forall i \in J_s . \left\{z^1,...,z^s\right\} \subset \left\{x^1,...,x^r\right\} = vertM_1$. Утворимо множину точок центральносиметричних до точок $z^i, i \in J_s : \left\{w^1,...,w^s\right\} \subset \left\{y^1,...,y^r\right\} = vertM_2$, тобто множини точок z^i є множинами вершин, для кожної з яких за умов теореми існує центрально симетрична точка w^i. Тобто згідно умови теореми:

$$z^i + w^i = 2\tau^*, \ i \in J_s \tag{7}$$

$$z_j = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i z_j^i. \tag{8}$$

Помножимо ліву і праву часину рівності (7) в координатній формі на λ_i:

$$\lambda_i\left(z_j^i + w_j^i\right) = \lambda_i 2\tau,\ i \in J_s$$

та візьмемо суму від обох частин рівняння по *i* від *1* до*s*.

Взявши до уваги вираз (8) та те, що $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i = 1$, маємо $z_j + \sum_{i=1}^{s}\lambda_i w_j^i = 2\tau$.

Оскільки $w_j = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i w_j^i$, то $z_j + w_j = 2\tau$. Що і треба було довести.

Наслідок. Теореми 2, 3 справедливі при $M_1 = M_2 = M$.

Лема 4. Точка $x = (e_1,...,e_1,e_1+\Delta,...,e_1+\Delta,...,e_1+(t-1)\Delta,...,e_1+(t-1)\Delta,..., e_1+(\nu-1)\Delta,...,e_1+(\nu-1)\Delta) \in R^k$, у якій координата e_1 повторюється η_1 раз, …, координата $e_1+(t-1)\Delta$ повторюється η_t раз, …, координата $e_1+(\nu-1)\Delta$ повторюється η_ν раз, та точка $y = (e_1+(\nu-1)\Delta, e_1+(\nu-1)\Delta,...,e_1+(\nu-t)\Delta,...,e_1+(\nu-t)\Delta,..., e_1+\Delta,...,e_1+\Delta,e_1,...,e_1)$, у якій координата $e_1+(\nu-1)\Delta$ повторюється η_1 раз, $e_1+(\nu-t)\Delta$ η_t раз, $e_1+\Delta$ повторюється $\eta_{\nu-1}$ раз, координата e_1 повторюється η_ν раз, $t \in J_\nu$, $\eta_1+...+\eta_t+...+\eta_\nu = k$, є центрально симетричними відносно точки $\tau^* = (\tau,...,\tau) \in R^k$, де $\tau = e_1+(\nu-1)\frac{\Delta}{2}$.

Доведення. Здійснюється безпосередньою перевіркою того, що $x+y = 2\tau$.Для будь-якого *t*, $1 \le t \le \nu$, координати x_i та y_i, що приймають значення відповідно $x_i = e_1+(t-1)\Delta$ та $y_i = e_1+(\nu-1)\Delta$ у сумі дають: $x_i + y_i = 2e_1+(\nu-t)\Delta = 2\tau$.

Що і треба було довести.

Лема 5. Якщо точки $x' = (x_{i_1},...,x_{i_k})$, $y' = (y_{i_1},...,y_{i_k})$, утворені як перестановки координат відповідно точок *x*та *y* з леми 4, то такі точки x' та y' являються центрально симетричними відносно точки $\tau^* = (\tau,...,\tau)$, де $\tau = e_1+(\nu-1)\frac{\Delta}{2}$.

Доведення. Після перестановки координати x_i, y_i точок*x*та *y*з леми 4 стають на деяке місце $i_j, 1 \le i_j \le k$, але на одне й те саме. Отже їх сума не змінюється, тобто $x_{i_j} + y_{i_j} = 2\tau$, що і треба було довести.

Теорема 6. Множини перестановок $E_{k\nu}(G_1)$ та $E_{k\nu}(G_2)$, що утворені з мультимножин $G_1 = \{g_1,...,g_k\}$, $G_2 = \{g_1',...,g_k'\}$ відповідно зі спільною основою $S(G_1) = S(G_2) = (e_1,...,e_\nu)$, де $e_{i+1} = e_i + \Delta, \Delta > 0, i \in J_{\nu-1}$; та первинними специфікаціями $[G_1] = (\eta_1,\eta_2,...,\eta_\nu)$, $[G_2] = (\eta_\nu,\eta_{\nu-1},...,\eta_1)$, є центрально симетричними відносно точки $\tau^* = (\tau,...,\tau)$, де $\tau = e_1+(\nu-1)\frac{\Delta}{2}$.

Доведення. Точки-перестановки g' з $E_{k\nu}(G_1)$ – це перестановки, що утворюються з точки x з леми 4: $g' = (g_1,...,g_k) = x = (e_1,...,e_1,e_1+(t-1)\Delta,...,e_1+(t-1)\Delta, ...,e_1+(\nu-1)\Delta,...,e_1+(\nu-1)\Delta)$. А точки $g'' \in E_{k\nu}(G_2)$ – це перестановки, що утворюються з точки y з леми 4: $g''=\left(g_1',...,g_k'\right)=y=\left(e_1+\left(\nu-1\right)\Delta,...,\right.$ $\left.e_1+\left(\nu-1\right)\Delta,...,e_1+\left(\nu-t\right)\Delta,...,e_1+\left(\nu-t\right)\Delta,...,e_1,...,e_1\right)$.

Згідно леми 5 $\forall g'\in E_{k\nu}\left(G_1\right)\ \exists g''\in E_{k\nu}\left(G_2\right)$, яка їй центрально симетрична відносно $\tau^*=\left(\tau,...,\tau\right)$, де $\tau=e_1+\left(\nu-1\right)\dfrac{\Delta}{2}$, і навпаки. Що і доводить теорему.

Наслідок (теорема 4.3 з [5]). При $\Delta=1; \nu=k$ маємо $E_k\left(J_k\right)$ – центрально симетрична множина відносно точки τ^* сама до себе.

Теорема 7. Два переставні многогранники $\Pi_{k\nu}\left(G_1\right), \Pi_{k\nu}\left(G_2\right)$, що визначаються мультимножинами $G_1=\left\{g_1,g_2,...,g_k\right\}$ і $G_2=\left\{g_1',g_2',...,g_k'\right\}$ відповідно, зі спільною основою $S=(e_1,e_2,...e_\nu)$, $e_{i+1}=e_i+\Delta$, де $\Delta>0,\ i=1,2,...,\nu-1$ та первинними специфікаціями $\left[G_1\right]=\left(\eta_1^1,...,\eta_\nu^1\right)=\left(\eta_1,...,\eta_\nu\right)$, $\left[G_2\right]=\left(\eta_\nu^2,...,\eta_1^2\right)=\left(\eta_\nu,...,\eta_1\right)$, $\left(\eta_i^1=\eta_{\nu-i+1}^2\right)$ $\forall\ i\in J_\nu$ є центрально симетричними відносно $\tau^*=\left(\tau,...,\tau\right)$, де $\tau=e_1+\left(\nu-1\right)\dfrac{\Delta}{2}$.

Доведення. Як відомо [1], множина вершин переставного многогранника збігається з множиною перестановок, що його (многогранник) утворює. Тобто, маємо: $E_{k\nu}\left(G_1\right)=vert\Pi_{k\nu}\left(G_1\right); E_{k\nu}\left(G_2\right)=vert\Pi_{k\nu}\left(G_2\right)$, де $\Pi_{k\nu}\left(G_j\right)=convE_{k\nu}\left(G_j\right),\ j=1,2.$

За теоремою 6 множини $E_{k\nu}\left(G_1\right)$ та $E_{k\nu}\left(G_2\right)$центрально симетричні. Скористаємося теоремою 2, з якої і випливає центральна симетрія многогранників $\Pi_{k\nu}\left(G_1\right), \Pi_{k\nu}\left(G_2\right)$. Що і треба було довести.

Теорема 8. Якщо $M_1\subset R^k$ та $M_2\subset R^k$ – множини центрально симетричні відносно точки $\tau_k^*=\left(\tau_1,...,\tau_k\right)\in R^k,\ \tau_i=\tau=const,\forall i\in J_k$, то проекції $\Pi\left(M_1\right)_j\subset R^{k-1}$ та $\Pi\left(M_2\right)_j\subset R^{k-1}$ множин M_1 та M_2 відповідно на площини $x_j=c_1=const$ та $x_j=c_2=const$ є центральносиметричними відносно точки $\tau_{k-1}^*=\left(\tau,...,\tau\right)\in R^{k-1}$.

Доведення. Після проектування M_1 та M_2на площини $x_j=c_1$ та $x_j=c_2$ відповідно точки $x=\left(x_1,...,x_k\right)\in M_1$ та $y=\left(y_1,...,y_k\right)\in M_2$, що мають властивість $x+y=2\tau_k^*$, або в координатах:

$$x_i+y_i=2\tau\ \forall i\in J_k \tag{9}$$

перетворюються в точки $\bar{x}=\Pi\left(x\right)_j=\left(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_k\right)=\left(\bar{x}_1,...,\bar{x}_{k-1}\right)$ та $\bar{y}=\Pi\left(y\right)_j=.$ $=\left(y_1,...,y_{j-1},y_{j+1},...,y_k\right)=\left(\bar{y}_1,...,\bar{y}_{k-1}\right)$. В силу (9) для координат точок $\bar{x}\in\Pi\left(M_1\right)_j$ та $\bar{y}\in\Pi\left(M_2\right)_j$ маємо

$$\bar{x}_i+\bar{y}_i=2\tau\ \forall i\in J_{k-1}. \tag{10}$$

Властивість (10) означає$\bar{x}+\bar{y}=2\tau_{k-1}^*$, що за означенням 1 свідчить, що точки $\bar{x},\ \bar{y}$ – центрально симетричні. В силу довільності $x\left(y\right)$ маємо довільність $\bar{x}\left(\bar{y}\right)$, що за означенням 3 свідчить про центральну симетричність розглянутих проекцій M_1 та M_2. Що і треба було довести.

Теорема 9. Якщо $\nu = k$, то $\Pi_{k\nu}(G_1) = \Pi_{k\nu}(G_2)$; де G_1, G_2 – задані умовами теореми 7, і цей многогранник є центрально симетричним сам до себе відносно τ^*.

Доведення. При $\nu = k$ маємо: $\eta_1 + ... + \eta_k = k,\ \eta_i \geq 0,$ тобто $\eta_i = 1\ \forall i \in J_k$. Отже, многогранники рівні $\Pi_{k\nu}(G_1) = \Pi_{k\nu}(G_2)$, а з теореми 7 маємо їх центральну симетрію.

Наслідок [5]. За умов теореми 8 та при $\Delta = 1$ переставний многогранник $\Pi_k(J_k)$– центрально симетричний відносно τ^*.

Твердження 10. У переставному многограннику $\Pi_{k\nu}(G)$ у випадку центральної симетрії його вершин кожна *i*-грань має центрально симетричну *i*-грань, що належить $\Pi_{k\nu}(G)$.

Доведення випливає з умови теореми 3, як її наслідок.

Теорема 11. Якщо многогранник $M_1 \subset R^k$, $M_2 \subset R^k$ – центрально симетричні, $K_\Gamma(M_1), K_\Gamma(M_2)$ – граничні комплекси многогранників M_1 та M_2 відповідно, то ці граничні комплекси многогранників ізоморфні.

Доведення. Позначимо:

$$K_\Gamma(M_j) = \left\{\Gamma^j_{01}, \Gamma^j_{02}, ..., \Gamma^j_{0n_0}, \Gamma^j_{11}, \Gamma^j_{12}, ..., \Gamma^j_{1n_1}, ...,\ \Gamma^j_{k-1,1}, ..., \Gamma^j_{k-1,n_{k-1}}\right\} = \Gamma^j_0 \cup \Gamma^j_1 \cup ... \cup \Gamma^j_{k-1},$$

$j = 1, 2$, де Γ^j_i – множина *i*-граней $\Gamma^j_{il},\ l = 1, 2, ..., n_i$ многогранника M_j, n_i – кількість *i*-граней многогранників M_1 та M_2 (зауважимо, що згідно теореми 3 кількість *i*-граней M_1 та M_2 однакова).

Згідно означення ізоморфності комплексів треба довести, що центральна симетрія φ (яка, як випливає з теореми 3, – взаємно однозначне відображення: $\varphi\left(\Gamma^1_{il}\right) = \Gamma^2_{il}\ \ \forall l \in J_{n_i}\ \ \forall i \in J^0_{n_i}$) зберігає операцію включення: тобто

$$\forall \Gamma^j_{i_1l_1}, \Gamma^j_{i_2l_2} \in K_\Gamma(M_j)\ \ j = 1, 2; \Gamma^1_{i_1l_1} \subset \Gamma^1_{i_2l_2} \Leftrightarrow \Gamma^2_{i_1l_1} \subset \Gamma^2_{i_2l_2}.$$

1) Нехай $\Gamma^1_{i_1l_1} \subset \Gamma^1_{i_2l_2}$, покажемо, що $\Gamma^2_{i_1l_1} \subset \Gamma^2_{i_2l_2}$. За умовою $\Gamma^2_{i_jl_j} = \varphi\left(\Gamma^1_{i_jl_j}\right),\ j = 1, 2$. Нехай i_2-грань $\Gamma^2_{i_2l_2}$ має вершини $W = \left\{w^1, w^2, ..., w^{m_{l_2}}\right\} \subset \subset \left\{y^1, ..., y^r\right\} = Y = vertM_2$, тоді вершини $\Gamma^2_{i_1l_1}$ – $V = \left\{v^1, ..., v^{m_{l_1}}\right\} \subset W \subset Y$. Нехай $U = \left\{u^1, ..., u^{m_{l_1}}\right\} = vert\Gamma^1_{i_1l_1}$, а $Z = \left\{z^1, ..., z^{m_{l_2}}\right\} = vert\Gamma^1_{i_2l_2}\ \ \subset X = \left\{x^1, ..., x^r\right\} = vertM_1$, тобто $U \subset Z \subset X$. Але M_1 і M_2– центрально симетричні, отже $\forall\, x^i, z^j, u^t\ \ \ \exists\ y^i = \varphi\left(x^i\right);\ w^j = \varphi\left(z^j\right), v^t = \varphi\left(u^t\right)\ i \in J_s$ $j \in J_{m_{l_2}};\ t \in J_{m_{l_1}}$. Оскільки $V \subset W$, то будь-яка опукла лінійна комбінація цих точок (тобто точка з $\Gamma^2_{i_1l_1}$)належить $\Gamma^2_{i_2l_2}$, що і треба було довести в 1).

2) Нехай $\Gamma^2_{i_1l_1} \subset \Gamma^2_{i_2l_2}$, покажемо, що $\Gamma^1_{i_1l_1} \subset \Gamma^1_{i_2l_2}$. Використовуючи позначення з 1), маємо таке. Оскільки $U \subset Z$, то будь-яка лінійна опукла комбінація цих точок (тобто точка з $\Gamma^1_{i_1l_1}$) належить $\Gamma^1_{i_2l_2}$, що і треба було довести в 2). Теорема доведена.

Теорема 12. Якщо мультимножини G_1 та G_2 мають спільну основу $S=(e_1,...,e_\nu)$ з властивістю: $e_{i+1}=e_i+\Delta,\ \Delta>0,\ \forall i\in J_{\nu-1}$, та первинні специфікації $[G_1]=(\eta_1,...,\eta_\nu),\ [G_2]=(\eta_\nu,...,\eta_1)$, то переставні многогранники $\Pi_{k\nu}(G_1)$ та $\Pi_{k\nu}(G_2)$ мають один і той же комбінаторний тип.

Доведення. Доведення теореми є наслідком з попередньо доведених теорем 7 та 11.Дійсно, за умови теореми згідно теореми 7 переставні многогранники $\Pi_{k\nu}(G_1)$ та $\Pi_{k\nu}(G_2)$ є центрально симетричними. Многогранник комбінаторно еквівалентні, якщо між їх граничними комплексами існує взаємно-однозначна відповідність φ, що зберігає порядок включення – це для переставних многогранників $\Pi_{k\nu}(G_1)$ та $\Pi_{k\nu}(G_2)$ випливає з теореми 11. Теорема доведена.

Наслідок. Один і той же комбінаторний тип мають переставні многогранники $\Pi_{k\nu}(G_1)$ та $\Pi_{k\nu}(G_2)$, якщо елементи основи мультимножини G_1 є $e_i=e_1+(i-1)\Delta,\ \Delta>0;\ i\in J_\nu$, а елементи основи G_2 є $\varepsilon_i=\varepsilon_1+(i-1)\delta,\ \delta>0;\ i\in J_\nu$, а $[G_1]=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_{\nu-1},\eta_\nu),\ [G_2]=(\eta_\nu,\eta_{\nu-1},...,\eta_2,\eta_1)$.

Доведення. Справедливість твердження випливає з теореми 12 та того факту, що комбінаторний тип не змінюється при розтягуванні (стисненні) простору R^n [3].

Висновки

Досліджено питання центральної симетрії переставних многогранників, використано ці результати в типізації переставних многогранників. Розглянута залежність між комбінаторним типом переставних многогранників та їх симетрією.

Література:

1. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. – К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с.– Режим доступу http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487
2. Стоян Ю.Г. Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств / Ю.Г. Стоян. –Харьков: Академия наук УССР, 1980. –22 с. – (Препринт АН УССР/ Ин-тпроблеммашиностр.;85).
3. Емеличев В.А. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников) / В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К. Кравцов. – М.: Наука. Глав.ред. физ-матем. лит., 1981. – 344 с.
4. GaihaP. Adjacent vertices on a permutohedron / P. Gaiha, S.K. Gupta // SIAM J. Appl. Math, 1977. – V. 32, №2. – P. 323-327.
5. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев – К.: Наук. думка, 1986 – 268 с.
6. Леонова М.В. Переставні многогранники: центральна симетрія та комбінаторна еквівалентність / М. В. Леонова, О. О. Ємець // Інформатика та системні науки (ІСН-2014): Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 13-15 березня 2014 р.) . – Полтава: ПУЕТ, 2014. – С. 180-186.

Стаття надійшла _21_._02_._2014___
Прийнято до друку _04_._03_._2014___

Аннотация

Емец О.А., Леонова М.В.

Симметрия перестановочных многогранников, их комбинаторный тип.

В работе исследуется множество перестановок элементов заданного мультимножества, т.е. множество перестановок с повторениями. Исследованы свойства его *выпуклой оболочки – многогранника перестановок. При этом используется свойство, что множество перестановок совпадает с множеством вершин перестановочного многогранника. Изложение ведется с использованием терминологии мультимножеств (основание, кратность элементов, первичная спецификация). В работе исследуется центральная симметрия перестановочных многогранников, в частности рассмотрена центральная симметрия вершин, ребер и i-граней многогранника. Установлен критерий центральной симметрии вершин многогранника перестановок в случае постоянства разности двух соседних элементов основания мультимножества, и равенством равноудаленных от концов элементов кортежа, который является первичной спецификацией этого мультимножества.*

Доказана центральная симметрия перестановочных многогранников, у которых мультимножества, определяющие перестановки, имеют общее основание со свойством постоянства разности элементов основания и первичными спецификациями, одна из которых образуется из другой изменением порядка следования элементов на противоположный. Показано, что многогранники, являющиеся выпуклыми оболочками множеств перестановок, описанных выше, – центрально симметричные. Доказана центральная симметрия перестановочного многогранника, когда в перестановках разные элементы, образующие арифметическую прогрессию.

На основе понятия граничного комплекса многогранника и его центральной симметрии, обоснованно, что одинаковый комбинаторный тип имеют перестановочные многогранники с общей основой и первичными спецификациями, которые являются симметричными относительно порядка элементов.

Ключевые слова: *центральная симметрия, перестановочный многогранник, комбинаторный тип, множество перестановок.*

Summery

O. A. Iemets, M. V. Leonova

Symmetry of permutations polyhedrons and their combinatorial type

In the articlethe set of permutations of the elements given multiset are investigated, namely the set of permutations with repetitions. The properties of its convex hull –permutationspolyhedron are investigated. It uses the property that the set of permutations coincides with the set of vertices of the polyhedron. The presentation is made using the terminology of multisets (base, multiplicity of elements, the primary specification). In this paperthe central symmetry of permutations polyhedron is investigated, in particular considered the central symmetry of vertices, edges and i-facets of the polyhedron.A criterion for the central symmetry of the vertices of permutation polyhedron is set in the case of constant difference between two adjacent base elements of the multiset, and equality of equidistant elements from the ends of the cortege, which is the basis of this multiset.

The article justifies the central symmetry of permutation polyhedrons in which the multisets defining permutations have a common basis with the property of constancy in difference between adjacent elements and their primary specifications are sequences, one of which is formed from the other by changing the order of the elements to the reversed one. It is shown that the polyhedrons which are convex hulls of permutations described above are centrally symmetric. The central symmetry of resettable polyhedron is proved when different elements are rearranged, forming an arithmetic progression.

Based on the notion of the boundary complex of a polyhedron and its central symmetry, it has been established that resettable polyhedron with a common basis and primary specifications that are symmetric with respect to the order of elements have the same combinatorial type.

Key words: *central symmetry, permutation polyhedron, combinatorial type, the set of permutations.*