СЕКЦІЯ «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

УДК 519.856 **О.О. Ємець, Т.М.Барболіна**

ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ ДИРЕКТОРА ЗІ СТОХАСТИЧНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

У роботі побудовано математичну модель задачі директора зі стохастичними параметрами як лінійної безумовної задачі стохастичної оптимізації на переставленнях. Формування критерію оптимальності здійснено на основі введення лінійного порядку на множині дискретних випадкових величин. Досліджено властивості розв'язку поставленої задачі.

Ключові слова: *дискретна випадкова величина, задача директора, комбінаторна оптимізація, лінійний порядок, стохастична оптимізація.*

Вступ

Імовірнісний характер початкових даних, що має місце у багатьох практичних задачах, звертає увагу дослідників на розвиток моделей і методів теорії ймовірностей та стохастичного програмування (див., наприклад, [1]–[4]). Дослідження методів розв'язування оптимізаційних задач на множинах комбінаторної природи з урахуванням різних видів невизначеності, здійснюється, у тому числі, і в рамках евклідової комбінаторної оптимізації. Запропоновано підходи до постановки та розв'язування задач з інтервальною [5], нечіткою невизначеністю [6]. Актуальним залишається пошук методів розв'язування задач в умовах імовірнісної невизначеності.

Розглянемо необхідні поняття й означення евклідової комбінаторної оптимізації, спираючись переважно на [7]. Мультимножиною називають сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові. Будь-яку мультимножину $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ можна задати її основою $S(G)$, тобто кортежем усіх її різних елементів, і кратністю – числом повторів кожного елемента основи. Евклідовою комбінаторною множиною називають множину, різними елементами якої є різні упорядковані k-вибірки з мультимножини вигляду:

$$\left(g_{i_1},...,g_{i_k}\right), \tag{1}$$

де $g_{i_j}\in G$, $i_j\neq i_t$ $\forall i_j,i_t\in J_\eta$, $\forall j,t\in J_k$ (тут і далі через J_n позначено множину n перших натуральних чисел). Прикладом евклідової комбінаторної множини є загальна множина переставлень $E_k(G)$ — множина k-вибірок вигляду (1) з мультимножини G за умови $k=\eta$.

Апарат евклідової комбінаторної оптимізації успішно використовується для формалізації й розв'язування ряду практично значущих задач. Зокрема, як лінійна безумовна задача на переставленнях може бути сформульована задача директора [8]. У приймальній директора знаходиться k відвідувачів. Очікуваний час приймання i-го відвідувача дорівнює g_i. Необхідно встановити порядок приймання відвідувачів таким чином, щоб сумарний час очікування прийому був мінімальним. Нехай x_j – час прийому відвідувача, який буде прийнятий j-м у черзі. Тоді, очевидно, вектор $x=(x_1,...,x_n)$ є елементом множини переставлень з мультимножини $G=\{g_1,...,g_k\}$: $x \in E_k(G)$. Сумарний час очікування дорівнює:

$$L'(x)=(k-1)x_1+(k-2)x_2...+x_{k-1}=\sum_{j=1}^{k}(k-j)x_j \tag{2}$$

Отже, задача полягає у знаходженні такої пари $\langle L'(x^*),x^*\rangle$, що

$$L'(x^*)=\min_{x\in E_k(G)}\sum_{j=1}^{k}(k-j)x_j\ ,\ x^*=\arg\min_{x\in E_k(G)}\sum_{j=1}^{k}(k-j)x_j\ .$$

Як випливає з [8], у випадку, коли елементи мультимножини упорядковані за неспаданням:

$$g_1\le g_2\le...\le g_k\ , \tag{3}$$

мінімум цільової функції досягається у точці

$$x_i^*=g_i\quad \forall i\in J_k\ . \tag{4}$$

Недоліком розглянутої моделі є відсутність урахування невизначеності в оцінюванні часу прийому відвідувачів.

Мета статті

Побудувати математичну модель задачі директора для випадку, коли очікуваний час прийому відвідувача є дискретною випадковою величиною; дослідити властивості розв'язку такої задачі. Постановка оптимізаційної задачі здійснюється на основі запропонованого в [9] підходу, який ґрунтується на введенні порядку на множині дискретних випадкових величин.

Виклад основного матеріалу

Надалі позначатимемо дискретні випадкові величини великими латинськими літерами (A,B), їх можливі значення – малими (a^i,b^i). Розглядатимемо ті випадкові величини, серед можливих значень яких існує найменше (множину таких випадкових величин позначимо Ω). Вважатимемо, що можливі значення впорядковані за зростанням, причому найменше значення має індекс 1.

Нехай через $P(\cdot)$ позначається імовірність випадкової події, а через $M(A)$ і $D(A)$ – відповідно математичне сподівання і дисперсія дискретної випадкової величини A. Нехай також порядок на множині дискретних випадкових величин встановлено згідно з наступними означеннями.

Означення 1. Називатимемо дві дискретні випадкові величини A, B упорядкованими у зростаючому (A передує B) порядку $\prec$ (і позначатимемо цей факт $A \prec B$), якщо виконується одна з таких умов:

1. $M(A) < M(B)$;
2. $M(A) = M(B)$ і $D(A) > D(B)$;
3. $M(A) = M(B)$, $D(A) = D(B)$ і знайдеться таке t, що для всіх $1 \le i < t$ $a^i = b^i$, $P(A = a^i) = P(B = b^i)$ і при цьому:
   3.1. або $a^t < b^t$,
   3.2. або $a^t = b^t$ і $P(A = a^t) > P(B = b^t)$.

Означення 2. Називатимемо дві дискретні випадкові величини A, B упорядкованими у неспадаючому порядку $\preceq$ (і позначатимемо цей факт $A \preceq B$), якщо $A \prec B$ або $A = B$.

Аналогічно до того, як це зроблено в [9], легко показати, що відношення, введене в означенні 2, є лінійним порядком на множині Ω тих дискретних випадкових величин, серед можливих значень яких існує найменше. Також, якщо для дискретних випадкових величин A і B виконується умова $A \preceq B$ і величини A і C, B і C – незалежні, то має місце співвідношення $A + C \preceq B + C$. З останньої властивості випливає справедливість такого твердження:

Твердження 1. Якщо для попарно незалежних дискретних випадкових величин A, B, C, D виконуються умови $A \preceq B$ і $C \preceq D$, то також має місце співвідношення $A + C \preceq B + D$.

Доведення. З умови $A \preceq B$ і незалежності випадкових величин A і C, B і C маємо $A + C \preceq B + C$. Аналогічно з $C \preceq D$ випливає $B + C \preceq B + D$. Тоді з транзитивності відношення $\preceq$ маємо, що $A + C \preceq B + D$. Твердження доведено.

Наслідок 2. Якщо для попарно незалежних випадкових величин $A_1, ..., A_n$ і $B_1, ..., B_n$ виконуються умови $A_i \preceq B_i$ $\forall i \in J_n$, то $A_1 + ... + A_n \preceq B_1 + ... + B_n$.

Використовуючи введений в означенні 2 порядок, упорядкуємо елементи заданої скінченної множини дискретних випадкових величин $\omega \subset \Omega$: $X_1 \preceq X_2 \preceq ... \preceq X_s$. Максимумом є величина X_s, а мінімумом — величина X_1.

Нехай $X = (X_1, ..., X_k)$ – багатовимірна випадкова величина, $C(X) = \sum_{j=1}^{k} c_j X_j$. Зрозуміло, що коли $X_1, ..., X_k \in \Omega$, то також $C(X) \in \Omega$. Розглянемо розв'язування лінійної безумовної евклідової задачі комбінаторної оптимізації на переставленнях

$$C(X^*) = \min_{X \in E_k(\Gamma)} \sum_{j=1}^{k} c_j X_j, \quad X^* = \arg\min_{X \in E_k(\Gamma)} \sum_{j=1}^{k} c_j X_j, \tag{5}$$

якщо для елементів мультимножини $\Gamma = \{G_1, ..., G_k\}$ виконується умова $G_i \in \Omega$ $\forall i \in J_k$, а мінімум визначається згідно з описаним вище правилом.

Сформуємо для дискретної випадкової величини A вектор $H(A) = (M(A); -D(A))$. Через $\overset{l}{<}$ позначатимемо лексикографічне упорядкування в m-

вимірному евклідовому просторі: для будь-яких $u,u' \in R^m$ $u \overset{l}{<} u'$, якщо перша ненульова компонента різниці $u-u'$ є від'ємною. Якщо $u \overset{l}{<} u'$ або $u=u'$, то записуватимемо $u \overset{l}{\le} u'$. Таким чином, для двох дискретних випадкових величин A,B виконується співвідношення $H(A) \overset{l}{<} H(B)$, якщо $M(A)<M(B)$ або при $M(A)=M(B)$ має місце нерівність $-D(A)<-D(B)$ (тобто $D(A)>D(B)$).

Теорема 3. Якщо виконуються умови

$$c_1 > \ldots > c_k \ge 0, \tag{6}$$

та

$$H(G_1) \overset{l}{\le} \ldots \overset{l}{\le} H(G_k), \tag{7}$$

то для розв'язку X^* задачі виконуються співвідношення

$$H\left(X_j^*\right) = H\left(G_j\right) \quad \forall j \in J_k. \tag{8}$$

Спочатку доведемо лему.

Лема 4. Нехай елементи мультимножини $G=\{g_1,\ldots,g_k\}$ є дійсними числами, що задовольняють (3), для коефіцієнтів цільової функції $L(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j x_j$ виконується співвідношення (6), точка x^* визначається згідно з (4). Тоді для будь-якої точки $x \in E_k(G)$, відмінної від x^*, має місце співвідношення $L\left(x^*\right) < L(x)$.

Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що лема не має місця. Тоді для деякої вершини x переставного многогранника, суміжної з вершиною x^*, повинна виконуватися нерівність $L\left(x^*\right) \ge L(x)$. Але, як випливає з теореми 3.1 [7, с.79], точка x^* є мінімаллю функції $L(x)$ на множині $E_k(G)$, тому $L\left(x^*\right) \le L(x)$. Звідси маємо, що $L(x)=L\left(x^*\right)$, тобто

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \left(x_j - x_j^*\right) = 0. \tag{9}$$

Згідно з критерієм суміжності вершин переставного многогранника [7] вершина x суміжна з x^*, якщо вона одержана з вершини x^* переставленням компонент рівних $e_i, e_{i+1} \in S(G)$ ($i \in J_{n-1}$, $n=|S(G)|$), де елементи основи $S(G)$ мультимножини G упорядковані за зростанням. Запишемо рівність (9) так:

$$0=\sum_{j=1}^{k} c_j \left(x_j - x_j^*\right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne s,\, j\ne q}}^{k} c_j \left(x_j - x_j^*\right) + c_s\left(e_i - e_{i+1}\right) + c_q\left(e_{i+1} - e_i\right),$$

де s та q відповідають різним компонентам у вершинах x^* та x. Оскільки $x_j = x_j^*$ для всіх $j \ne s$, $j \ne q$, то останнє співвідношення набуває вигляду

$c_s\left(e_i-e_{i+1}\right)+c_q\left(e_{i+1}-e_i\right)=0$, звідки $\left(e_{i+1}-e_i\right)\left(c_s-c_q\right)=0$, що неможливо, оскільки всі елементи основи мультимножини і всі коефіцієнти цільової функції є різними числами. Отримана суперечність і доводить лему.

Повернемося тепер до доведення теореми. Припустимо, що розв'язком задачі (5) є точка $\tilde{X}$, яка не задовольняє (8), у той же час точка X^* задовольняє (8). Тоді $C\left(\tilde{X}\right)\preceq C\left(X^*\right)$. Для точки $X=\left(X_1,...,X_k\right)\in E_k\left(\Gamma\right)$ позначимо $\mu\left(X\right)=\left(M\left(X_1\right),....,M\left(X_k\right)\right)$. Нехай також $\Gamma^M=\left\{M\left(G_1\right),...,M\left(G_k\right)\right\}$. Оскільки для елементів мультимножини Γ виконується умова (7), то має місце співвідношення $M\left(G_1\right)\le...\le M\left(G_k\right)$. Тоді згідно з лемою 4 точка $\mu\left(X^*\right)$ є розв'язком задачі пошуку пари $\left\langle L\left(\mu\left(X^*\right)\right),\mu\left(X^*\right)\right\rangle$ такої, що

$$L\left(\mu\left(X^*\right)\right)=\min_{\mu(X)\in E_k\left(\Gamma^M\right)}\sum_{j=1}^{k}c_jM\left(X_j\right),\ \mu\left(X^*\right)=\arg\min_{\mu(X)\in E_k\left(\Gamma^M\right)}\sum_{j=1}^{k}c_jM\left(X_j\right), \tag{10}$$

причому коли $\mu\left(X\right)\ne\mu\left(X^*\right)$, то $L\left(\mu\left(X^*\right)\right)<L\left(\mu\left(X\right)\right)=\sum_{j=1}^{k}c_jM\left(X_j\right)$. Оскільки $M\left(C\left(X\right)\right)=M\left(\sum_{j=1}^{k}c_jX_j\right)=\sum_{j=1}^{k}c_jM\left(X_j\right)=L\left(\mu\left(X\right)\right)$, то тоді також $M\left(C\left(X^*\right)\right)=M\left(C\left(X\right)\right)$ і за пунктом 1 означення 1 маємо $C\left(X^*\right)\prec C\left(X\right)$. Отже, $\mu\left(\tilde{X}\right)=\mu\left(X^*\right)$, тобто

$$M\left(\tilde{X}_i\right)=M\left(G_i\right)\ \ \forall i\in J_k\,. \tag{11}$$

Якщо всі величини $M\left(G_i\right)$ $(i\in J_k)$ різні, то також $\tilde{X}=X^*$, що суперечить припущенню. Нехай тепер деякі з величин $M\left(G_i\right)$ $(i\in J_k)$ рівні між собою, тобто $\Gamma^M\ne S\left(\Gamma^M\right)$. Тоді з (11) маємо $M\left(C\left(\tilde{X}\right)\right)=M\left(C\left(X^*\right)\right)$ і з $C\left(\tilde{X}\right)\preceq C\left(X^*\right)$ випливає виконання нерівності $D\left(C\left(\tilde{X}\right)\right)\ge D\left(C\left(X^*\right)\right)$. Нехай $S\left(\Gamma^M\right)=\left\{\bar{M}_1,...,\bar{M}_s\right\}$, причому елементи множини $S\left(\Gamma^M\right)$ упорядковані за зростанням. Нехай також індекси q_i $(i\in J_s)$ такі, що $M\left(X_{q_i-1}\right)\ne M\left(X_{q_i}\right)$; вважатимемо також, що $q_{s+1}=k+1$. Тоді з умови (11) випливає, що для всіх $i\in J_s$ виконуються співвідношення $M\left(X_{q_i}\right)=...=M\left(X_{q_{i+1}-1}\right)=\bar{M}_i$, а також $\left(X_{q_i},...,X_{q_{i+1}-1}\right)\in E_{k_i}\left(\Gamma_i\right)$, де $k_i=\left|\Gamma_i\right|$,

$$\Gamma_i=\left\{G_{q_i},...,G_{q_{i+1}-1}\right\}\ \ i\in J_s\,. \tag{12}$$

Нехай $\tilde{C}_i\left(X\right)=\sum_{j=q_i}^{q_{i+1}-1}c_j^2X_j$ $(i\in J_s)$, $\delta_i\left(X\right)=\left(D\left(X_{q_i}\right),...,D\left(X_{q_{i+1}-1}\right)\right)$. З (6) випливає, що $c_1^2>...>c_k^2\ge0$. Тоді згідно з лемою 4 маємо, що точка $\delta_i\left(X^*\right)$ є мінімаллю функції

$\tilde{L}_i\left(\delta_i\left(X\right)\right)=-\sum\limits_{j=q_i}^{q_{i+1}-1}c_j^2D\left(X_j\right)$ на множині $E_{k_i}\left(\Gamma_i^D\right)$, де $\Gamma_i^D=\left\{D\left(G_{q_i}\right),...,D\left(G_{q_{i+1}-1}\right)\right\}$ (з умов (7) і (11) випливає, що елементи цієї мультимножини упорядковані за незростанням), причому $L_i\left(\delta_i\left(X^*\right)\right)<L_i\left(\delta_i\left(\tilde{X}\right)\right)$, якщо $\delta_i\left(\tilde{X}\right)\neq\delta_i\left(X^*\right)$. Оскільки елементи мультимножини є незалежними дискретними випадковими величинами, то на допустимій множині мають місце рівності:

$$-D\left(C\left(X\right)\right)=-D\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=q_i}^{q_{i+1}-1}c_jX_j\right)=-\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=q_i}^{q_{i+1}-1}c_j^2D\left(X_j\right)=\sum_{i=1}^{s}L_i\left(\delta_i\left(X\right)\right).$$

Таким чином, якщо $\delta_i\left(\tilde{X}\right)\neq\delta_i\left(X^*\right)$ принаймні для одного $i\in J_s$, то $-D\left(C\left(X^*\right)\right)<-D\left(C\left(\tilde{X}\right)\right)$. З іншого боку, для всіх $X\in E_k\left(\Gamma\right)$, які задовольняють умову (11) (а отже, і для $\tilde{X}$), справджується рівність $M\left(C\left(X\right)\right)=M\left(C\left(X^*\right)\right)$, а тоді $C\left(X^*\right)\prec C\left(\tilde{X}\right)$, що суперечить припущенню. Отже, для всіх $i\in J_s$ повинна виконуватися рівність $\delta_i\left(\tilde{X}\right)=\delta_i\left(X^*\right)$, тобто $D\left(\tilde{X}_j\right)=D\left(X_j^*\right)$ для всіх $j\in J_k$. Враховуючи (11), маємо $H\left(\tilde{X}_j\right)=H\left(X_j^*\right)$ для всіх $j\in J_k$, тобто точка $\tilde{X}$ задовольняє умову (8). Одержана суперечність і доводить теорему.

Наслідок 5. Якщо виконуються умови (6), (7) та

$$H\left(G_i\right)\neq H\left(G_j\right),\text{ якщо } G_i\neq G_j\quad i,j\in J_k, \tag{13}$$

то точка

$$X_j^*=G_j\quad\forall j\in J_k \tag{14}$$

є розв'язком задачі (5).

Слід зазначити, що коли для елементів мультимножини має місце співвідношення (7), але умова (13) не виконується, то твердження, аналогічне наслідку 5, місця немає.

Приклад 1. Розглянемо задачу пошуку пари (5), де $C\left(X\right)=5X_1+4X_2$, $\Gamma=\left\{G_1,G_2\right\}$, причому дискретні випадкові величини G_1,G_2 задані рядами розподілу згідно з табл. 1

Таблиця 1

Ряди розподілу дискретних випадкових величин для прикладу 1

величини	G_1				G_2			
Їх значення	2	6	8	12	2	7	12	16
відповідні ймовірності	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{23}{45}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{72}$

Для величин G_1 і G_2 згідно з пунктом 3.1 означення 1 має місце співвідношення $G_1 \prec G_2$, оскільки $M(G_1)=M(G_2)=7$, $D(G_1)=D(G_2)=13$, при цьому $g_1^1=g_2^1=2$, $P(G_1=2)=P(G_2=2)=\frac{1}{4}$, $g_1^2=6<g_2^2=7$. Проте мінімаллю є точка (G_2,G_1). Дійсно, для випадкових величин $F_1=5G_1+4G_2$, $F_2=5G_2+4G_1$ справедливі співвідношення: $M(F_1)=M(F_2)=63$, $D(F_1)=D(F_2)=533$, але при цьому $f_1^1=5g_1^1+4g_2^1=18=f_2^1=5g_2^1+4g_1^1$, $P(F_1=18)=P(F_2=18)=\frac{1}{16}$, $f_2^2=34$, $f_1^2=38$, звідки за пунктом 3.1 означення 1 маємо, що $F_2 \prec F_1$.

Розглянемо детальніше розв'язування задачі (5), якщо елементи мультимножини Γ задовольняють умову (7), але не задовольняють (13). Розіб'ємо мультимножину Γ на підмультимножини вигляду (12), де індекси q_i ($i\in J_r$) такі, що $H(G_{q_i-1})\neq H(G_{q_i})$, $q_{r+1}=k+1$. Якщо у мультимножині Γ_i усі елементи однакові, то з умови (8) випливає, що для оптимального розв'язку X^* задачі (5) мають місце рівності $X^*_{q_i}=\ldots=X^*_{q_{i+1}-1}=G_{q_i}$. Якщо серед величин $G_{q_i},\ldots,G_{q_{i+1}-1}$ є різні, то $\left(X^*_{q_i},\ldots,X^*_{q_{i+1}-1}\right)$ є переставленням елементів мультимножини Γ_i.

Нехай точка $\tilde{X}$ така, що для всіх $i\in J_r$ $\left(\tilde{X}_{q_i},\ldots,\tilde{X}_{q_{i+1}-1}\right)$ надає мінімум функції $C_i(X)=\sum_{j=q_i}^{q_{i+1}-1}c_jX_j$ на множині $E_{k_i}(\Gamma_i)$ (як і вище, $k_i=|\Gamma_i|$), тобто $C_i(\tilde{X})\preceq C_i(X)$, де $\left(X_{q_i},\ldots,X_{q_{i+1}-1}\right)\in E_{k_i}(\Gamma_i)$ (якщо $|S(\Gamma_i)|=1$, то така точка у множині $E_{k_i}(\Gamma_i)$ єдина). Тоді згідно з наслідком 5 одержуємо, що $C(\tilde{X})=\sum_{i=1}^{r}C_i(\tilde{X})\preceq\sum_{i=1}^{r}C_i(X)=C(X)$ яка б не була точка $X\in E_k(\Gamma)$. Таким чином, точка $\tilde{X}$ є розв'язком задачі (5).

Приклад 2. Розглянемо задачу директора для випадку, коли час очікування відвідувачів задається мультимножиною $\Gamma=\{G_1,G_2,G_3,G_3,G_4,G_5\}$, де ряди розподілу випадкових величин G_1,G_2 наведено в табл. 1, а ряди розподілу випадкових величин G_3,G_4,G_5 – у табл. 2.

Таблиця 2

Ряди розподілу дискретних випадкових величин для прикладу 2

величини	G_3			G_4				G_5		
їх значення	1	7	9	2	4	8	11	4	8	10
відповідні ймовірності	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Цільова функція у цьому випадку має вигляд:

$$C(X)=5X_1+4X_2+3X_3+2X_4+X_5.$$

Сформуємо вектори $H(G_j)=\left(M(G_j);-D(G_j)\right)$ для величин G_j ($j\in J_5$):

$$H(G_1) = H(G_2) = (7;-13),\ H(G_3) = H(G_4) = (7;-10),\ H(G_5) = (8;-6).$$

Отже, для елементів мультимножини Γ виконується умова (7). При цьому розбиття мультимножини Γ на підмультимножини вигляду (12) відбувається так:

$$\Gamma_1 = \{G_1, G_2\},\ \Gamma_2 = \{G_3, G_3, G_4\},\ \Gamma_3 = \{G_5\}.$$

Таким чином, в оптимальному розв'язку $(X_1, X_2) \in E_2(\Gamma_1)$, $(X_3, X_4, X_5) \in E_3(\Gamma_2)$, $X_6 = G_5$. Як показано у прикладі 1, мінімум функції $C_1(X) = 5X_1 + 4X_2$ на множині $E_2(\Gamma_1)$ досягається у точці (G_2, G_1). Множина $E_3(\Gamma_2)$ містить 3 переставлення: $E_3(\Gamma_2) = \{(G_3, G_4, G_4), (G_4, G_3, G_4), (G_4, G_4, G_3)\}$, відповідні значення функції $C_2(X) = 3X_3 + 2X_2 + X_1$ дорівнюють $F_1 = 3G_3 + 2G_4 + G_4$, $F_2 = 3G_4 + 2G_3 + G_4$, $F_3 = 3G_4 + 2G_4 + G_3$. Оскільки $f_1^1 = 9 < f_2^1 = 10 < f_3^1 = 11$, то найменше значення функції $C_2(X)$ досягається на переставленні (G_3, G_4, G_4). Таким чином, розв'язком задачі є переставлення $X^* = (G_2, G_1, G_3, G_4, G_4, G_5)$.

Висновки і перспективи

У роботі побудовано математичну модель задачі про оптимальну перестановку відвідувачів на прийомі, якщо очікуваний час прийому задається дискретними випадковими величинами. Поняття мінімуму вводиться на основі відношення порядку на множині дискретних випадкових величин.

Запропоновано підхід до розв'язування лінійних безумовних задач на переставленнях зі стохастичними параметрами для випадку, коли коефіцієнти цільової функції упорядковані за спаданням. Актуальною залишається розробка методів вибору оптимальних переставлень серед випадкових величин з рівними математичними сподіваннями та дисперсіями, наприклад, застосування методу гілок і меж.

Література

1. Ермольев Ю.М. Стохастические модели и методы в экономическом планировании / Ю. М. Ермольев, А. И. Ястремский. – М. : Наука, 1979. – 256 с.
2. Сергиенко И.В. Применение методов стохастической оптимизации для исследования трансформационных процессов в экономике / И. В. Сергиенко, М.В. Михалевич // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2004. — № 4. — С. 7–29
3. Кан Ю.С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями / Ю.С. Кан, А.И.Кибзун. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 375 с
4. Емец О.А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности / О. А. Емец, А. А. Роскладка // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 5. – С.35-44.
5. Сергиенко И.В. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ / И. В. Сергиенко, О. А. Емец, А. О. Емец // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – №5. – С. 38-50.
6. Ємець О.О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах : монографія / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/352.
7. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г.Стоян, О.О.Ємець. – К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487.
8. Шкурба В.В. Задача трех станков / В. В. Шкурба. – М. : Наука, 1976. – 96с.

9. Емец О.А. Об оптимизационных задачах с вероятностной неопределенностью / О. А. Емец, Т. Н. Барболина // Доповіді НАН України. – 2014. – № 11. – С. 40 - 45.

Стаття надійшла _12_._02_._2014___
Прийнято до друку _04_._03_._2014___

Аннотация

О.А. Емец, Т.Н. Барболина
Построение и исследование математической модели задачи директора со стохастическими параметрами

В работе построена математическая модель задачи директора со стохастическими параметрами как линейная безусловная задача стохастической оптимизации на перестановках. Формирование критерия оптимальности осуществлено на основе введения линейного порядка на множестве дискретных случайных величин. Исследованы свойства решения линейной безусловной задачи оптимизации на перестановках в случае, когда все коэффициенты целевой функции неотрицательны и различны. На основе полученных результатов предложен подход к решению сформулированной в статье задачи с вероятностной неопределенностью.

Ключевые слова: *дискретная случайная величина, задача директора, комбинаторная оптимизация, линейный порядок, стохастическая оптимизация*.

Summary

O.O. Iemets, T.M. Barbolina
Construction and research of mathematical model of director's task with stochastic parameters

In this work we construct the mathematical model of director's task as linear unconditional problem of stochastic optimization on permutations. The optimality criterion is based on the linear order on set of discrete random variables. Also we research properties of solution of linear unconditional optimization problem on permutations when coefficients of goal function are different non-negative numbers. Based on such results we propose an approach for solution of problem with probability uncertainty which was formulated in the article.

Key words: *discrete random variable, director's task, combinatorial optimization, linear order, stochastic optimization.*