УДК 519.71 **О.М. Назаренко, А.О. Борода**

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ МАКРОЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Розглядається проблема моделювання та прогнозування стаціонарних часових рядів, що описують слабо формалізовані процеси. Пропонується методика специфікації та ідентифікації лінійної стаціонарної моделі в рамках n-вимірного фазового простору на прикладі динамічного міжгалузевого балансу реальних макроекономічних систем.

Ключові слова: *лінійна стаціонарна модель, циклічні процеси, специфікація, ідентифікація, прогнозування.*

Вступ

Дослідження технічних та економічних процесів повинне спиратись на постійний аналіз статистичних даних [1]. Для конструювання динамічних моделей в економіці необхідно скласти принципи, які ґрунтуються на економічній теорії і дозволяють генерувати рівняння, що адекватно визначають еволюцію досліджуваного процесу. Під математичною моделлю будемо розуміти аналітичні співвідношення, які випливають із сформульованого принципу і розробленого способу обробки статистичних даних. Складені рівняння повинні коректуватись або уточнюватись по мірі надходження нових даних.

Головною ідеєю сучасного математичного моделювання є вивчення реальних динамічних систем за допомогою диференціальних або диференціально-алгебраїчних рівнянь. Однак параметри цих рівнянь, як правило, заздалегідь невідомі. Невизначеними є також фазові координати $\mathbf{x}$, які б однозначно і повністю визначали поведінку даної системи. Тому на практиці будь-якій прямій задачі (імітація, прогнозування, оптимізація) завжди передує обернена задача (специфікація моделі, ідентифікація параметрів та величин, що входять до неї).

Економічні, технічні, як і багато інших слабо формалізованих систем, є керованими. Вектор керувань $\mathbf{u}$ подається на вхід динамічної системи і за його допомогою можна вирішувати проблему специфікації фазових координат та здійснювати керування їх рухом. Конструювання закону керування необхідно здійснювати за допомогою регулюючого пристрою і таким чином переводити систему із деякого початкового стану $\mathbf{x}_0$ в момент часу t_0 в кінцевий бажаний стан $\mathbf{x}_*$ в момент часу t_*. Регулятор повинен реалізувати найважливішу ідею теорії керування – принцип оберненого зв'язку [2], який вказує на те, щоб вектор керувань $\mathbf{u}$ в кожний момент часу був функцією фазових координат $\mathbf{x}$ та їх похідних $\dot{\mathbf{x}}$.

Особливістю моделювання макроекономічних систем є те, що невідомими є не лише коефіцієнти диференціальних рівнянь, які описують дану систему, а й розмірність n фазового простору. У подібних ситуаціях не специфікованими залишаються компоненти фазового вектора $\mathbf{x}$ і керування $\mathbf{u}$. У даній роботі на прикладі динамічного міжгалузевого балансу реальних макроекономічних систем розробляється методика специфікації та ідентифікації лінійної стаціонарної моделі в рамках n-вимірного фазового простору. Моделювання фазових траєкторій і керувань проводиться з урахуванням циклічності, притаманній макроекономічним процесам, і відбувається шляхом виділення гармонічних хвиль, що розповсюджуються в даній системі.

Постановка задачі

Нехай в N цілочисельних точках проміжку $[t_0, t_1)$ з відрізка $[t_0, t_k]$ відома статистична інформація $\{x_t\}$ і $\{u_t\}$ про еволюцію показників x і u даної динамічної системи. Множини x і u необхідно розкласти на підмножини $x_1, x_2, \dots, x_n$ і $u_1, u_2, \dots, u_n$, для яких відомі статистичні дані $\{x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tn}\}$ і $\{u_{t1}, u_{t2}, \dots, u_{tn}\}$, $t = \overline{1, N}$.

Стан системи будемо характеризувати фазовим вектором $\mathbf{x}(t)$, а вхід системи – вектор-стовпцем керувань $\mathbf{u}(t)$ із n-вимірного простору E^n (значення n заздалегідь невідоме). Фазова траєкторія $\{\mathbf{x}(t)\}$ і траєкторія керувань $\{\mathbf{u}(t)\}$ вважаються неперервними вектор-функціями часу і задовольняють задачу Коші:

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_*) = \mathbf{x}_*, \; t \in [t_0, t_k], \tag{1}$$

де A і B – квадратні матриці (B – невироджена матриця), які разом з граничним значенням $\mathbf{x}_*$ заздалегідь невідомі.

Модель типу (1) розповсюджена на практиці. Так, наприклад, функціонування багатогалузевого господарства вимагає балансу між окремими галузями.

В. Леонтьєв [3] запропонував (1) як динамічну модель міжгалузевого балансу, в якій $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))'$ і $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))'$ – вектор-стовпці валових випусків і невиробничого споживання n галузей; A – матриця прямих витрат, B – матриця приростних капіталовкладень. З економічної точки зору рівність (1) показує поділ вектора валових випусків на три частини: $A\mathbf{x}(t)$ – поточне виробниче споживання, включаючи амортизацію; $B\dot{\mathbf{x}}(t)$ – капітальні витрати на розширення виробництва; $\mathbf{u}(t)$ – кінцеве (невиробниче) споживання.

Метою даної роботи є прогнозування майбутніх станів системи. Тому покладемо $t_* = t_1 = N + 1$, тоді відрізок [1, N] будемо називати періодом ідентифікації, а відрізок $[t_*, t_k]$ – періодом прогнозування. При оцінених значеннях параметрів A, B, $\mathbf{x}_*$ розв'язок задачі Коші (1) дозволяє перевіряти імітаційні властивості на проміжку $[1, t_*)$ і встановлювати прогнозні властивості моделі (1) на відрізку $[t_*, t_k]$.

Зазначимо, що довжина вибірки N повинна бути достатньо великою, щоб стабілізувались взаємозв'язки між елементами системи. Стаціонарність моделі характеризується високою якістю апроксимації, прогнозування та робастністю [4, 5]. Якщо виконані умови стаціонарності, то оцінену на періоді ідентифікації [1, N] лінійну модель (1) можна переносити на період прогнозування $[t_*, t_k]$ за умови $t_k - t_* << N$ в силу інерційності динамічної системи [5].

Вектор $\mathbf{x}(t)$ можна шукати за допомогою декомпозиції траєкторій руху фазових координат на складові [6]. Якщо ці траєкторії ідентифіковані за даними спостережень, то вектор керувань $\mathbf{u}(t)$ може бути знайдений за допомогою оберненого зв'язку:

$$\mathbf{u}(t) = P\,\mathbf{x}(t) - B\,\dot{\mathbf{x}}(t), \quad P = E - A, \; t \in [t_0, t_k] \tag{2}$$

Основна проблема, яка тут виникає, полягає у знаходженні оптимальних значень довжини N періоду ідентифікації, розмірності n фазового простору та специфікації компонент фазового вектора $\mathbf{x}$ і вектора керувань $\mathbf{u}$. Велику роль при вирішенні цієї проблеми відіграє регулятор. У якості регулятора будемо використовувати допоміжну інформацію відносно величин, які не присутні в рівнянні руху, але є невід'ємною частиною даної динамічної системи [6]. Додатковими величинами системи повинні бути обрані такі її характеристики, що акумулюють якомога більше інформації про досліджувану систему в цілому і відносно яких є доступні статистичні дані. У цій роботі регулятор буде складатись з двох пристроїв, які у будь-який момент часу t формують сумарні значення фазових координат і керувань

$$x(t) = \sum_{m=1}^{n} x_m(t), \quad u(t) = \sum_{m=1}^{n} u_m(t) \tag{3}$$

Тоді, якщо модельні траєкторії $\mathbf{x}(t)$ і $\mathbf{u}(t)$ налаштовані на високі імітаційні та прогнозні властивості, то і сумарні траєкторії (3) повинні мати такі ж властивості.

Метод розв'язання задачі

Розв'язок задачі Коші (1) будемо шукати за допомогою декомпозиції траєкторій руху фазових координат на складові. Тенденцію розвитку будемо характеризувати лінійним трендом, а коливальний процес лінійною комбінацією гармонік з деякими частотами. Регресійну модель $\mathbf{x}$ будемо подавати у вигляді:

$$\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} (\boldsymbol{a}_k \cos\omega_k t + \boldsymbol{b}_k \sin\omega_k t) + \boldsymbol{\nu}_t, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \ t = \overline{1,N}. \tag{4}$$

де ω_k – частота k-ї гармоніки; $\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_k$ $(k = \overline{1, n-1})$ – вектори невідомих коефіцієнтів розкладу в обрізаний ряд Фур'є; $\boldsymbol{\nu}_t$ – вектор випадкових збурень.

Аналіз циклічних процесів, які відбуваються в макросистемах показує [7], що в них можуть розповсюджуватись хвилі Кондратьєва (k=1), Кузнеця (k=3), Жугляра (k=6). Крім того, можуть бути й інші хвилі. Це вказує на те, що кількість секторів $n \geq 5$, і до цього результату ми повинні прийти, оцінюючи регресійну модель (4). Рафінування (відкидання незначущих МНК-оцінок коефіцієнтів ряду Фур'є) цієї моделі будемо здійснювати за допомогою критерію Ст'юдента [8].

Встановлення частот із спектра (4), на які налаштовані гармонічні хвилі, і визначення періоду коливання T досліджуваної системи можна здійснювати за допомогою першого пристрою регулятора (3), що обчислює суму фазових координат. Для цього розглянемо регресійну модель.

$$x_t - \bar{x} = b(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t) + \mathbf{v}_t, \ t = \overline{1, N}. \tag{5}$$

При встановленому тренді будемо також розглядати регресійну модель коливань:

$$\varepsilon_t = \sum_k (a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t) + \nu_t, \ t = \overline{1, N} \tag{6}$$

Процес виділення значущих гармонічних хвиль, характерних для даної системи, необхідно проводити сумісно з визначенням періоду коливань T. Якщо частоти належать спектру (4), то очевидно N=T. Для встановлення оптимального значення N враховуємо поведінку системи поза періодом ідентифікації $[1, N]$. Оскільки статистичні дані на періоді прогнозування $[N+1,\ t_k]$ нам невідомі, то можна використати відому статистичну інформацію, що передує моменту t_0. Якщо N вибране таким, що модельна траєкторія коливань $\varepsilon(t)$ при $t \le 0$ змінюється в напрямку статистичних даних $\varepsilon_t(\,t = 0, -1, \ldots)$, то гіпотеза $N = T$ підтверджується.

Нехай за допомогою екстраполяції назад, ми ідентифікували період коливань і, отже, встановили оптимальний період ідентифікації [1, N]. При цьому нами виділені n-1 значущих гармонік, що розповсюджуються у даній системі, і тим самим визначена оптимальна розмірність n фазового простору.

Специфікація компонент **x** проводиться при заданому значенні n. При поділі множини x на підмножини $x_1, x_2, \ldots, x_n$ необхідно враховувати фізичну сутність цих підмножин та їх значущість у загальній масі. Якщо фазові координати вибрані, то припускаємо, що властиві їм гармонічні коливання налаштовуються на частоти (4).

Модель коливань фазових координат навколо відповідних трендів

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \sum_k (\boldsymbol{a}_k \cos\omega_k t + \boldsymbol{b}_k \sin\omega_k t) \tag{7}$$

екстраполюється назад на проміжок $t \le 0$ і перевіряється відповідність статистичним значенням $\boldsymbol{\varepsilon}_t(\,t = 0,\ -1,\ \ldots)$. Якщо перевірка нас задовольняє, то можуть бути прийнятними і модельні траєкторії руху фазових координат

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{b}}(t - \bar{t}) + \sum_k (\hat{\mathbf{a}}_k \cos\omega_k t + \hat{\mathbf{b}}_k \sin\omega_k t) \tag{8}$$

Якщо нас не влаштовують імітаційні властивості модельних кривих (7) і (8), то необхідно провести іншу специфікацію фазових координат і переоцінювання відповідних регресійних моделей. Результатом рафінування регресійних моделей (8) і (7) повинна бути також якісна апроксимація статистичних даних $\{\mathrm{x}_t\}$ і $\{\varepsilon_t\}$ сумарними траєкторіями $\{\mathrm{x}(t)\}$ і $\{\varepsilon(t)\}$, які моделює перший пристрій регулятора згідно першого балансового співвідношення (3).

Специфікація вектора керувань **u** здійснюється при заданому фазовому векторі **x**. Враховуючи фізичну сутність, кожній компоненті x_m ставимо у відповідність керування $u_m \quad (m = \overline{1, n})$. Для ідентифікації вектора керувань $\mathbf{u}(t)$ складаємо регресійну модель:

$$\mathbf{u}_t - \bar{\mathbf{u}} = P(\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}) - B(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{b}}) + \mathbf{r}_t, \quad t = \overline{1, N}, \tag{9}$$

яку необхідно оцінювати з додатковими обмеженнями на елементи матриць A і B: з фізичної сутності задачі випливає, що елементи цих матриць додатні.

Адекватність кривих $\mathbf{u}(t)$ статистичним даним перевіряємо за допомогою коефіцієнтів детермінації, а також другого пристрою регулятора, який моделює траєкторію сумарного керування згідно другої балансової рівності (3). Якщо властивості кривих $\mathbf{u}(t)$ нас не влаштовують – розглядаємо заново специфікацію компонент $\mathbf{x}(t)$, скорегувавши поділ заданої множини на підмножини. Ітераційний процес продовжується доки досліджувана система не налаштується на характерні для неї гармонічні хвилі й, як наслідок, будуть забезпечені високі імітаційні та прогнозні властивості траєкторій фазових координат і керувань, а отже, і системи в цілому.

Практична реалізація алгоритму

Як приклад слабо формалізованої динамічної системи розглянемо макроекономіку Франції [9]. У якості координат фазового вектора **x** виберемо валові випуски секторів, а керувань **u** – кінцеві споживчі витрати на продукцію відповідної галузі. Чисельний експеримент з використанням екстраполяції назад за статистичними даними 1957–1959 рр. дозволив встановити оптимальне значення об'єму вибірки $N = 50$: 1960–2009 рр. – період ідентифікації, 2010–2011 рр. – період прогнозування. Аналіз показує, що при рівні значущості $\alpha = 0{,}005$ економіку Франції необхідно ділити на 5 секторів. Дослідження показали, що у якості п'яти секторів можна вибрати наступні: 1 – промисловість та сільське господарство; 2 – будівництво та транспорт; 3 – фінансовий сектор і нерухомість; 4 – комунікації та наука; 5 – сфера послуг. Аналіз отриманих результатів свідчить, що ці сектори відтворюють основні тенденції розвитку макроекономіки Франції в цілому.

Аналіз статистичних даних [9] вказує на те, що дана система розвивається циклічно (фази підйому змінюються фазами спаду). Розкладання часових рядів $\{x_t\}$ на періоді ідентифікації (t = 1, 2, ... ,50) на трендову і періодичну складові підтверджує наявність чотирьох значущих гармонік (k=1, 2, 3, 6).

Оскільки розклад функції випуску на складові містить один тренд і чотири гармоніки, то число секторів n=5. Основним критерієм вибору п'яти секторів є присутність у траєкторіях випусків цих секторів вказаних чотирьох гармонік, причому гармонічні хвилі з іншими періодами повинні бути незначущими, оскільки вони є нехарактерними для макроекономіки Франції.

Параметрична ідентифікація регресійної моделі випусків секторів (8) дала наступні значення коефіцієнтів детермінації R^2 трендів, навколо яких відбуваються коливання в секторах (табл.1).

Таблиця 1

Коефіцієнти детермінації трендів

№ сектора	1	2	3	4	5	$\sum$
R^2	0,7607	0,9668	0,9390	0,8878	0,9262	0,8949

Аналіз табл.1 показує, що для деяких секторів (особливо для сектору промисловості та сільського господарства) і для економіки в цілому коливання випусків навколо відповідного тренду є відчутними. Періодичні складові стають причиною підйому та спаду економіки , а їх взаємодія на певних проміжках часу приводить до кризових явищ в економіці. Тому є актуальним виділення характерних для даної макроекономічної системи гармонічних хвиль і дослідження їх впливу на економічний розвиток країни.

Відзначимо, що гармонічні хвилі взаємодіють з трендом, і це ускладнює їх аналіз. Але, якщо розглядати чистий коливальний процес, то гармоніки ряду Фур'є стають некорельованими, і це спрощує аналіз впливу окремих гармонік на загальний коливальний процес. Частки дисперсій гармонік у загальній дисперсії коливань кожного сектора обчислюються за допомогою коефіцієнтів R^2, значення яких наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Вклад гармонік в коливальний процес

№ сектора	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=6$	$\sum$
1	0,0655	0,6617	0,0919	0,0484	0,8675
2	0,2122	0,1429	0,2946	0,1025	0,7522
3	0,0357	0,4528	0,3208	0,0705	0,8798
4	0,6828	0,1612	0,0802	0,0129	0,9371
5	0,8180	–	0,0974	–	0,9154
$\sum$	0,0913	0,4398	0,2066	0,0753	0,8130

Сумарний внесок гармонік в дисперсію коливань випусків секторів становить від 75,22% (2-й сектор) до 93,71% (4-й сектор). Тому регресійні моделі коливань мають якісні апроксимаційні властивості і можна очікувати значущого вкладу в дисперсії випусків і невиробничого споживання. Значення коефіцієнтів детермінації модельних траєкторій випусків подані в табл.3.

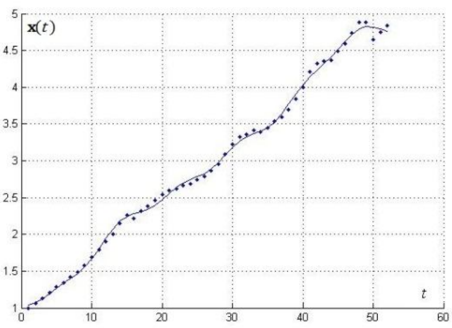
Таблиця 3

Якість модельних траєкторій випусків

№ сектора	1	2	3	4	5	$\sum$
R^2	0,9944	0,9951	0,9994	0,9972	0,9988	0,9964

Порівнюючи результати, наведені в табл.1 і табл.3, робимо висновок про суттєвий вплив гармонік на траєкторії випусків секторів (якість модельних траєкторій перевищує 99%). Так, для першого сектору вклад гармонічних хвиль у дисперсію випуску складає більше 23%, а для валового випуску – більше 10%.

Отримані траєкторії випусків і відповідних коливань мають якісні імітаційні та прогнозні властивості, і вони забезпечують такі ж властивості траєкторій ВВП і відповідного коливання. На рис.1 приведені графіки модельних кривих у випадку макроекономіки Франції. Тут точками зображені статистичні дані, а суцільною лінією – траєкторії руху (всі дані обезрозмірено діленням розрахункових значень на відповідні значення у початковому 1960 р.). Порівняння прогнозних значень з реальними даними (дві останні точки, що відповідають 2010 і 2011 рр.) свідчить про високоточні прогнозні властивості побудованих моделей.



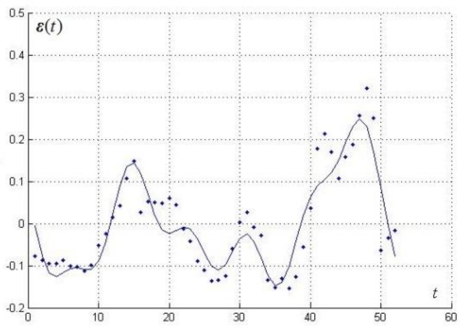


Рис. Модельні траєкторії ВВП та відповідного коливання

Якщо отримані якісні імітаційні та прогнозні властивості траєкторій випусків, то можна тепер оцінювати регресійну модель (9). Параметрична ідентифікація матриць A і B дала наступні результати (табл.4, табл.5).

Таблиця 4

МНК- оцінки елементів матриці A

0,2449	0,3539	0,2768	0,3712	0,3293
0,0588	0,0446	0,2389	0,2585	0,2341
0,0663	0,0678	0,3976	0,1399	0,1309
0,0706	0,1937	0,2339	0,2524	0,3006
0,0913	0,0785	0,0026	0,0612	0,7290

Таблиця 5

МНК- оцінки елементів матриці B

0,1290	0,1099	0,0996	0,0719	0,1002
0,0367	0,0462	0,0520	0,0536	0,0566
0,0090	0,0220	0,0226	0,0311	0,0140
0,0120	0,0245	0,0413	0,0183	0,0488
0,0215	0,0255	0,0193	0,0498	0,0440

Висновки

У даній роботі запропонований параметричної ідентифікації лінійної стаціонарної моделі слабо формалізованої динамічної системи.

Алгоритм ідентифікації структурних матриць моделі міжгалузевого балансу макроекономічної системи може бути використаний для ефективного розподілу ресурсів при формуванні взаємовідносин між окремими секторами, а також для створення механізму регулювання економічним процесом.

Література

1. Aubin J. P. Dynamic Economic Theory // Springer – Verlag, 1997. 510 p.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний // Изд. 4-е, исправл. – М.: Наука, 2004. – 591с.
3. Leontief W. Input-Output Economics // Oxford University Press, New York, 1986. – 436 p.
4. Greene W. H. Econometric Analysis // – 5th ed. – N.Y.: Pearson Educ. Int., 2003. – 1056 p.
5. Назаренко А.М., Фильченко Д.В. Идентификация и оптимизация слабо формализированных процессов в классе стационарных LQ моделей // Кибернетика и вычислительная техника.– К., 2009. – Вып. 158. – С. 42–61.
6. Назаренко О. М. Побудова та ідентифікація лінійно-квадратичних моделей слабо формалізованих динамічних систем // Вісник ХНУ. Сер. «Матем. моделювання. Інформ. технології. Автом. системи управління». – 2008. Т. 10, № 833. – С. 185-192.
7. Korotayev A.V., Tsirel S.V. Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development // Structure and Dynamics. – 2010. Vol.4. No. 1. – P. 3–57.
8. Назаренко О. М. Основи економетрики // Вид. 2-ге, перероб.: Підручник – Київ: Центр навчальної літератури, 2005. – 392 с.
9. INSEE, [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.bdm.insee.fr/bdm2/index.action.

Стаття надійшла _09_._10_._2014___

Прийнято до друку _04_._11_._2014___

Аннотация

А.М. Назаренко, А.А. Борода
Параметрическая идентификация модели динамического межотраслевого баланса

Рассматривается проблема моделирования и прогнозирования стационарных временных рядов, описывающих слабо формализованные процессы. Предлагается методика спецификации и идентификации линейной стационарной модели в рамках n-мерного фазового пространства на примере динамического межотраслевого баланса реальных макроэкономических систем. Проводится апробация построенных алгоритмов на реальных статистических данных.

Ключевые слова: *линейная стационарная модель, циклические процессы, спецификация, идентификация, прогнозирование.*

Summary

O.M. Nazarenko, A.O. Boroda
Parametric identification of models of dynamical interindustry balance

The problem of modeling and forecasting stationary time series describing weakly formalized processes. The technique specification and identification of linear time-invariant model within the n-dimensional phase space as an example of dynamic input-output balance of real macroeconomic systems. Conducted testing of these algorithms on real statistics.

Key words: *linear stationary model, cyclic processes, specification, identification, prediction.*