УДК 519.8 **А. О. Емец**

ДОПУСКОВЫЕ РЕШЕНИЯ С РАЗНЫМ ТИПОМ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ДЛЯ НЕЧЕТКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

В статье приведены известные необходимые понятия из теории нечетких чисел и интервальных систем, а именно понятия: нечеткого числа, носителя и функции принадлежности нечеткого числа, дискретного и континуального нечеткого числа; интервальной матрицы; нижней и верхней границ интервальной матрицы; средней матрицы; матрицы радиусов; интервального вектора; нижней и верхней границ интервального вектора; среднего вектора; вектора радиусов.

В работе введены новые понятия, такие как: понятие однопикового нечеткого числа (дискретного и континуального); острого и не острого пика; нормального нечеткого числа; стандартного нечеткого числа; стандартизированного нечеткого числа.

В статье введено понятие нечеткой матрицы, которое связывает интервальный аппарат и аппарат нечетких чисел; введено понятия интервальной линейной системой уравнений; нечеткой линейной системой уравнений.

В работе введено понятие допускового с типом принадлежности $<t,\tau>$ *решения нечеткой линейной системы и дана его характеризация.*

Доказана лемма: если I_A^t *– интервальная матрица, представленная через верхнюю* $\overline{A}^t$ *и нижнюю* $\underline{A}^t$ *границы интервальной матрицы* $[\,\underline{A}^t, \overline{A}^t\,]$, *где* $\underline{A}^t, \overline{A}^t \in R^{m\times n}$, *а* x *допусковый вектор с типом принадлежности* $<t,\tau>$, $x \in R^n$, *тогда семейство с номером* t *правых частей систем линейных уравнений* $A^t x$ *можно представить через матрицу радиусов* Δ^t:
$\{\, A^t x \,\big|\, A^t \in I_A^t \,\} = [A_c^t x - \Delta^t\,|\,x\,|, A_c^t x + \Delta^t\,|\,x\,|]$.

Для семейства с номером t $A^t x$ *правых частей систем линейных уравнений доказано, что следующие утверждения эквивалентны:*

1) x *– допусковое с типом принадлежности* $<t,\tau>$ *решение нечеткой линейной системы вида* $F_A x = F_b$;

2) x *– удовлетворяет неравенству* $|\,A_c^t x - b_c^\tau\,| \le -\Delta^t\,|\,x\,| + \delta^\tau$, *где* A_c^t *– средняя матрица интервальной матрицы,* b_c^τ *– средний вектор интервального вектора,* Δ^t *– матрица радиусов интервальной матрицы,* δ^τ *– вектор радиусов интервального вектора,*

3) $x = x_1 - x_2$, *где* x_1, x_2 *удовлетворяют условиям:* $\overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \le \overline{b}^\tau$; $\underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 \ge \underline{b}^\tau$; $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$, *где* $\overline{A}^t, \underline{A}^t$ *– верхняя и нижняя границы интервальной матрицы;* $\overline{b}^\tau$, $\underline{b}^\tau$ *– верхняя и нижняя границы интервального вектора.*

Обосновано, что проверка того, что x *является допусковым с типом принадлежности* $<t,\tau>$ *решением нечеткой системы, может быть осуществима за полиномиальное время.*

Ключевые слова: *нечеткие линейные системы уравнений, нечеткие числа, интервальные системы, допусковые решения.*

Введение

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными или практическими задачами. Исследование систем уравнений, содержащих нечеткие данные [1, 2], весьма актуальная проблема, в частности в задачах оптимизации и принятия решений [3-11].

Анализ последних исследований и публикаций, в которых предложено решения данной проблемы и на которые опирается автор. В работе [12] начат анализ таких систем с использованием аппарата интервальных систем [13].

Нерешенные прежде задачи общей проблемы, которым посвящается указанная статья. Формулирование целей статьи (постановка задачи). В данной работе вводится понятие допусковых решений таких систем разных типов и дается их характеризация.

Необходимые факты из теории нечетких чисел и интервальных систем

Нечетким числом называют множество пар:

$$A = \{a \mid \mu(a) \big| \, a \in [a_{\mathrm{L}}, a_{\mathrm{R}}] \subset \mathrm{R}^1, \, \mu \in [0,1]\}.$$

Носителем нечеткого числа A называют множество $\{a\}$ чисел $a \in R^1$ в множестве пар, образующих нечеткое число A. Функцией принадлежности называют функцию, ставящую в соответствие $\forall a$ число $\mu(\mathrm{a})$.

Нечеткое число называют дискретным, если мощность носителя $\{a\}$ конечна (синоним – нечеткое число с дискретным носителем). Нечеткое число называют континуальным, если носитель $\{a\}$ имеет мощность континуума (синоним нечеткое число с континуальным носителем). Точки а носителя нечеткого числа A называют пиковыми, если $\mu(\mathrm{a}) = 1$.

Пусть элементы носителя дискретного нечеткого числа A пронумерованы так, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Дискретное число называют однопиковым, если набор подряд идущих чисел носителя $\alpha_L = a_{i+1}$, a_{i+2}, …, $a_{i+p} = \alpha_R$, для которых функция принадлежности равна единице, единственен. Точки a_{i+1}, a_{i+2}, …, a_{i+p} называют пиком числа A. Если $p = 1$, то такой пик называют острым, иначе – не острым.

Континуальное нечеткое число A называют однопиковым, если отрезок $[\alpha_L, \alpha_R] \subset (a_L, a_R)$, для всех чисел a которого $\mu(a) = 1$, единственный. Отрезок $[\alpha_L, \alpha_R]$ называют пиком числа A. Если $\alpha_L = \alpha_R$, то пик называют острым, иначе – не острым.

Нечеткое число называют нормальным, если функция принадлежности слева от первого (левого) пика не убывающая, а справа от последнего (правого) пика не возрастающая.

Нормальное однопиковое число называют стандартным. Оно может быть как дискретным, так и континуальным.

Стандартизированным нечетким числом называют дискретное нечеткое число вида:

$$A = \{\underline{a}_0 \mid 0; \quad \underline{a}_1 \mid 0{,}25; \quad \underline{a}_2 \mid 0{,}5; \quad \underline{a}_3 \mid 0{,}75;$$
$$\underline{a}_4 \mid 1; \quad \overline{a}_4 \mid 1; \quad \overline{a}_3 \mid 0{,}75; \; \overline{a}_2 \mid 0{,}5; \quad \overline{a}_1 \mid 0{,}25; \quad \overline{a}_0 \mid 0\},$$

где $\underline{a}_0 < \underline{a}_1 < \underline{a}_2 < \underline{a}_3 < \underline{a}_4 \le \overline{a}_4 < \overline{a}_3 < \overline{a}_2 < \overline{a}_1 < \overline{a}_0$. Число A удобно задавать упорядоченной десяткой $A = (\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \overline{a}_4, \overline{a}_3, \overline{a}_2, \overline{a}_1, \overline{a}_0)$. Если пик острый, то $\underline{a}_4 = \overline{a}_4$.

Из стандартного нечеткого континуального числа стандартизированное можно получить дискретизацией носителя по значениям $0{,}25i$ функции принадлежности, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\} = J_4^0 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. При этом концы $\underline{a}_i$, $\overline{a}_i$ интервалов $[\underline{a}_i, \overline{a}_i]$ определяются условиями: $\forall a \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i]$ $\mu(a) \in [0{,}25i, 1]$, $\forall \varepsilon > 0$ $\mu(\underline{a}_i - \varepsilon) < 0{,}25i$; $\mu(\overline{a}_i + \varepsilon) < 0{,}25i$, $\underline{a}_0 = a_L$; $\overline{a}_0 = a_R$.

Получение стандартизированного нечеткого числа из стандартного дискретного осуществимо по алгоритмам из [14, 15].

Далее будем рассматривать только стандартизированные нечеткие числа, поэтому слово «стандартизированное» будем опускать.

Введем в соответствии с [13] необходимую терминологию интервальных матриц.

Пусть $\underline{A}$, $\overline{A}$ – две $m \times n$ матрицы с действительными элементами, т. е. $\underline{A}$, $\overline{A} \in R^{m\times n}$. При $n = 1$ такая матрица – это вектор-столбец. Пусть $\underline{A}$ поэлементно не больше $\overline{A}$, обозначим это $\underline{A} \le \overline{A}$.

Множество матриц A, удовлетворяющих условию $\underline{A} \le A \le \overline{A}$, называют интервальной матрицей. Обозначим ее I_A, т. е. $I_A = \{A \mid \underline{A} \le A \le \overline{A}\}$. Матрицу $\underline{A}$ называют нижней, а матрицу $\overline{A}$ – верхней границами интервальной матрицы I_A, которую также обозначают так: $I_A = [\,\underline{A}, \overline{A}]$. Матрицу $A_c = \frac{1}{2}(\underline{A} + \overline{A})$ называют средней матрицей для I_A, а матрицу $\Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$ называют матрицей радиусов для I_A. Очевидно, что элементы Δ_{ij} – матрицы радиусов неотрицательны: $\Delta_{ij} \ge 0$ $\forall i = \overline{1,m}$, $\forall j = \overline{1,n}$.

Согласно определений A_c и Δ имеем: $\underline{A} = A_c - \Delta$; $\overline{A} = A_c + \Delta$. Поэтому, I_A можно представить и так: $I_A = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$ или $I_A = \{A \mid |A - A_c| \le \Delta\}$, где модуль (абсолютная величина) $|B|$ матрицы $B = (b_{ij}) \in R^{m\times n}$ определяется как матрица $|B| = (|b_{ij}|) \in R^{m\times n}$.

Интервальным вектором-столбцом I_b называют интервальную матрицу с одним столбцом. Будем I_b с использованием $\overline{b}$ – верхней и $\underline{b}$ – нижней границ для I_b обозначать так: $I_b = \{b \mid \underline{b} \le b \le \overline{b}\}$, где $\underline{b}, \overline{b} \in R^m$. Вектор $b_c = \frac{1}{2}(\underline{b} + \overline{b})$ называют средним вектором интервального вектора I_b, а вектор $\delta = \frac{1}{2}(\overline{b} - \underline{b})$ – вектором радиусов для I_b. Таким образом, $I_b = [\,\underline{b}, \overline{b}\,] = [\,b_c - \delta; b_c + \delta\,]$.

Используя понятие интервальной матрицы, введем понятие нечеткой матрицы.

Определение 1. Нечеткой матрицей F_A назовем пятислойную таблицу (матрицу, массив), состоящую на каждом слое t, $t \in J_4^0$, из интервальных матриц $I_A^t = [\,\underline{A}^t, \overline{A}^t\,]$, где матрицы $\underline{A}^t = (\underline{a}_{ijt}) \in R^{m\times n}$, $\overline{A}^t = (\overline{a}_{ijt}) \in R^{m\times n}$, а числа $\overline{a}_{ijt}$, $\underline{a}_{ijt}$ – это элементы стандартизированного нечеткого числа $a_{ij} = (\underline{a}_{ij0}, \underline{a}_{ij1}, \underline{a}_{ij2}, \underline{a}_{ij3}, \underline{a}_{ij4}, \overline{a}_{ij4}, \overline{a}_{ij3}, \overline{a}_{ij2}, \overline{a}_{ij1}, \overline{a}_{ij0})$.

Число t будем называть номером слоя матрицы F_A, матрицу I_A^t – слоем t матрицы F_A, а нечеткую матрицу F_A обозначать (a_{ij}) или (a_{ijt}) $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$; $t \in J_4^0$.

Если $n = 1$, то нечеткую матрицу назовем нечетким вектором-столбцом с m

нечеткими координатами $b_i = (\underline{b}_{i0}, \underline{b}_{i1}, \underline{b}_{i2}, \underline{b}_{i3}, \underline{b}_{i4}, \overline{b}_{i4}, \overline{b}_{i3}, \overline{b}_{i2}, \overline{b}_{i1}, \overline{b}_{i0})$ и обозначим $F_b = (b_i)$ или $F_b = (b_{it})$ $i = \overline{1,m}$, $t \in J_4^0$.

Вектор $I_b^t = [\underline{b}^t, \overline{b}^t]$, где $\underline{b}^t = (\underline{b}_{1t}, \underline{b}_{2t}, ..., \underline{b}_{mt})$, $\overline{b}^t = (\overline{b}_{1t}, \overline{b}_{2t}, ..., \overline{b}_{mt})$, назовем t-ым слоем вектора F_b, а вектор F_b – пятислойным.

Интервальной линейной системой уравнений

$$I_A x = I_b \tag{1}$$

называют семейство всех систем линейных уравнений

$$Ax = b, \tag{2}$$

где

$$A \in I_A;\ b \in I_b. \tag{3}$$

Определение 2. Нечеткой линейной системой уравнений

$$F_A x = F_b \tag{4}$$

назовем совокупность пяти интервальных линейных систем уравнений

$$\left[\begin{array}{l} I_A^4 x = I_b^4; \\ I_A^3 x = I_b^3; \\ I_A^2 x = I_b^2; \\ I_A^1 x = I_b^1; \\ I_A^0 x = I_b^0; \end{array}\right. \tag{5}$$

где F_A и I_A^t, F_b и I_b^t, $t \in J_4^0$ соотносятся между собой согласно определения 1, то есть I_A^t является слоем t матрицы F_A, а I_b^t есть слоем t вектора F_b.

Имеет место включения (см. теорему 1 из [12]): $I_A^t \subset I_A^{t-1}$, $I_b^t \subset I_b^{t-1}$ $\forall t \in \{0, 1, 2, 3\} = J_3^0$, где знак $\subset$ может означать и равенство.

Допусковые решения нечеткой линейной системы уравнений

Поставим в соответствие каждой интервальной линейной системе уравнений из (5) $I_A^t x = I_b^t$, $t \in J_4^0$, семейство с номером t систем линейных уравнений вида (2) с данными вида (3) соответственно:

$$A^t x = b^t; \tag{6}$$

$$A^t \in I_A^t;\ b^t \in I_b^t. \tag{7}$$

Определение 3. Назовем вектор $x \in R^n$ допусковым с типом принадлежности $< t, \tau >$ решением нечеткой линейной системы вида (4) $F_A x = F_b$, если для него выполняется условие:

$$A^t x = I_b^\tau \quad \forall A^t \in I_A^t,\ t, \tau \in J_4^0. \tag{8}$$

Название решения объясняется тем, что вектор $A^t x$, определяемый данными со значениями принадлежности не меньше $0{,}25t$, остается внутри интервала (интервала «допусков») I_b^τ, определяемого данными со значением функций принадлежности не меньше $0{,}25\tau$, независимо от выбора матрицы $A^t \in I_A^t$.

Определение 3 может быть представлено в виде: вектор x, называемый допусковым с типом принадлежности $< t, \tau >$ решением нечеткой системы (4), должен удовлетворять условию:

$$\{A^t x \mid A^t \in I_A^t\} \subset I_b^\tau. \tag{9}$$

Заметим, что определение 3 вводит в рассмотрение 25 допусковых решений, соответствующих разным значениям $t, \tau \in J_4^0$. В работе [12] числовым значениям t (τ) приписывается определенный смысл, который мы будем иметь в виду и в этой работе. Тип $t = 0$ ($\tau = 0$) будем называть нечетким, $t = 1$ ($\tau = 1$) будем называть квазинечетким, $t = 2$ ($\tau = 2$) – полунечетким (синоним – получетким), $t = 3$ ($\tau = 3$) тип назовем квазичетким, а при $t = 4$ ($\tau = 4$) – четким. Такие названия определяются соответствующим значением функций принадлежности – не меньше $0{,}25t$ ($0{,}25\tau$ соответственно) – согласно определению стандартизированного нечеткого числа (см. табл. 1).

Таблица 1

Типы принадлежности допусковых решений

t \ τ	0	1	2	3	4
0	нечетко-нечеткий	нечетко-квазинечеткий	нечетко-полунечеткий	нечетко-квазичеткий	нечетко-четкий
1	квазинечетко-нечеткий	квазинечетко-квазинечеткий	квазинечетко-полунечеткий	квазинечетко-квазичеткий	квазинечетко-четкий
2	полунечетко-нечеткий	полунечетко-квазинечеткий	полунечетко-полунечеткий	полунечетко-квазичеткий	полунечетко-четкий
3	квазинечетко-нечеткий	квазинечетко-квазинечеткий	квазинечетко-полунечеткий	квазинечетко-квазичеткий	квазинечетко-четкий
4	четко-нечеткий	четко-квазинечеткий	четко-полунечеткий	четко-квазичеткий	четко-четкий

Напомним определение слабого решения [13] интервальной линейной системы уравнений:

$$I_A^t x = I_b^t, \tag{10}$$

где

$$I_A^t = \{\, \underline{A}^t \le A^t \le \overline{A}^t \,\},\ I_b^t = \{\, \underline{b}^t \le b^t \le \overline{b}^t \,\}.$$

Вектор $x \in R^n$ называется слабым решением системы (10), если он удовлетворяет для некоторых $A^t \in I_A^t$; $b^t \in I_b^t$ системе $A^t x = b^t$.

Для множества, стоящего в левой части соотношения (9), справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Если I_A^t – интервальная матрица $[\,\underline{A}^t, \overline{A}^t\,]$, где $\underline{A}^t, \overline{A}^t \in R^{m\times n}$, а $x \in R^n$, тогда

$$\{\, A^t x \,\big|\, A^t \in I_A^t \,\} = [A_c^t x - \Delta^t \,|\, x\,|,\, A_c^t x + \Delta^t \,|\, x\,|]\,. \tag{11}$$

Доказательство

Пусть $b^t \in \{\, A^t x \,\big|\, A^t \in I_A^t \,\}$. Тогда существует $A^t \in I_A^t$, что $A^t x = b^t$, т. е. вектор x является слабым решением интервальной линейной системы уравнений

$$A^t x = [\,b^t, b^t\,]\,. \tag{12}$$

Воспользуемся теоремой Оеттли-Прагера [13, с. 79]. Согласно этой теоремы, вектор x является слабым решением интервальной линейной системы уравнений $I_A^t x = I_b^t$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет неравенству:

$$|\, A_c^t x - b_c^t \,| \le \Delta^t \,|\, x\,| + \delta^t\,, \tag{13}$$

что для системы (12), поскольку $I_b^t = [\,b^t, b^t\,]$, а следовательно, а $\delta^t = 0$, и $b_c^t = b^t$, дает:

$$|\, A_c^t x - b^t \,| \le \Delta^t \,|\, x\,|\,. \tag{14}$$

Перепишем неравенство (14) в виде:

$$-\Delta^t \,|\, x\,| \le A_c^t x - b^t \le \Delta^t \,|\, x\,|\ ,$$

Которое разрешим относительно b^t:

$$A_c^t x - \Delta^t \,|\, x\,| \le b^t \le A_c^t x + \Delta^t \,|\, x\,|\ . \tag{15}$$

В силу произвольности выбора $b^t \in \{\, A^t x \,\big|\, A^t \in I_A^t \,\}$, неравенство (15) означает, что $\{\, A^t x \,\big|\, A^t \in I_A^t \,\} \subset [\, A_c^t x - \Delta^t \,|\, x\,|;\, A_c^t x + \Delta^t \,|\, x\,|\,]$, где знак $\subset$ принадлежности подмножества означает и равенство тоже. Для справедливости (11) покажем и обратное включение.

Пусть $b^t \in [\, A_c^t x - \Delta^t \,|\, x\,|;\, A_c^t x + \Delta^t \,|\, x\,|\,]$, тогда для него выполняется (15), (14) и (13), т. е. x является слабым решением интервальной линейной системы уравнений (12). Но это означает, что $b^t \in \{\, A^t x \,\big|\, A^t \in I_A^t \,]$, т. е. справедливо обратное включение. Это означает, что доказательство леммы закончено.

Эту лемму используем для доказательства эквивалентности разных описаний допусковых решений нечеткой линейной системы уравнений.

Теорема 2. Следующие утверждения эквивалентны:

1) x – допусковое с типом принадлежности $< t, \tau >$ решение нечеткой линейной системы вида (4) $F_A x = F_b$;

2) x – удовлетворяет неравенству $|\, A_c^t x - b_c^\tau \,| \le -\Delta^t \,|\, x\,| + \delta^\tau$;

3) $$x = x_1 - x_2\,, \tag{16}$$

где x_1, x_2 удовлетворяют условиям:

$$\overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \le \overline{b}^\tau ; \tag{17}$$

$$\underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 \ge \underline{b}^\tau ; \tag{18}$$

$$x_1 \ge 0 ; \; x_2 \ge 0 . \tag{19}$$

Доказательство. Доказательство построим по схеме доказательства: из 1) вытекает 2); из 2) следует 3); из 3) получаем 1).

Докажем, что из 1) вытекает 2). В соответствии с леммой 1.

$$\{ A^t x \,\big|\, A^t \in I_A^t \} = [\, A_c^t x - \Delta^t \,|\, x \,|, A_c^t x + \Delta^t \,|\, x \,| \,] . \tag{20}$$

Пусть x – допусковое с типом принадлежности $< t, \tau >$ решение нечеткой системы (4), тогда по (9) и по (20):

$$[\, A_c^t x - \Delta^t \,|\, x \,|, A_c^t x + \Delta^t \,|\, x \,| \,] \subset [\, b_c^\tau - \delta^\tau ; b_c^\tau + \delta^\tau \,] . \tag{21}$$

Включение (21) дает неравенство:

$$b_c^\tau - \delta^\tau \le A_c^t x - \Delta^t \,|\, x \,| \le A_c^t x + \Delta^t \,|\, x \,| \le b_c^\tau + \delta^\tau . \tag{22}$$

Отнимем в (22) от всех частей b_c^τ:

$$-\delta^\tau \le A_c^t x - \Delta^t \,|\, x \,| - b_c^\tau \le A_c^t x + \Delta^t \,|\, x \,| - b_c^\tau \le \delta^\tau . \tag{23}$$

Из правого неравенства в (23), перенеся $\Delta^t \,|\, x \,|$ вправо, имеем:

$$A_c^t x - b_c^\tau \le \delta^\tau - \Delta^t \,|\, x \,| . \tag{24}$$

Из левого неравенства в (23), перенеся $\Delta^t \,|\, x \,|$ влево, имеем:

$$\Delta^t \,|\, x \,| - \delta^\tau \le A_c^t x - b_c^\tau . \tag{25}$$

Объединяя (24) и (25), получаем неравенство из условия << 2) >> теоремы. Т. е., доказано следование из условия << 1) >> утверждения << 2) >>.

Докажем, что из утверждения << 2) >> вытекает условие << 3) >>. Пусть x – удовлетворяет неравенству из условия << 2) >> теоремы. Обозначим $x_1 = \max\{ x, 0\}$, $x_2 = \max\{-x, 0\}$, где знаки $\max$ обозначают взятие покомпонентного максимума. Легко видеть, что $x = x_1 - x_2$, а $x_1 + x_2 = |\, x \,|$.

Справедливое неравенство из условия << 2) >> теоремы приобретает в этих обозначениях вид:

$$\Delta^t (x_1 + x_2) - \delta^\tau \le A_c^t (x_1 - x_2) - b_c^\tau \le -\Delta^t (x_1 + x_2) + \delta^\tau . \tag{26}$$

Вспомнив, что $\overline{A}^t = A_c^t + \Delta^t$; $\underline{A}^t = A_c^t - \Delta^t$, помножив $\overline{A}^t$ на x_1, а $\underline{A}^t$ на x_2:

$\overline{A}^t x_1 = A_c^t x_1 + \Delta^t x_1$, $\underline{A}^t x_2 = A_c^t x_2 - \Delta^t x_2$, и вычтя из первого равенства второе, получаем:

$$\overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 = A_c^t (x_1 - x_2) + \Delta^t x_1 + \Delta^t x_2 . \tag{27}$$

Выразим из (27)

$$A_c^t (x_1 - x_2) = \overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 - \Delta^t x_1 - \Delta^t x_2$$

и подставим в правую часть (26), перенеся слагаемые с Δ^t и b_c^τ в правую часть получаемого неравенства:

$$\overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \le \delta^\tau + b_c^\tau . \tag{28}$$

Учтя, что $b_c^\tau + \delta^\tau = \overline{b}^\tau$, из (28) получаем (17).

Для получения (18) $\overline{A}^t$ умножим на x_2, а $\underline{A}^t$ – на x_1: $\overline{A}^t x_2 = A_c^t x_2 + \Delta^t x_2$; $\underline{A}^t x_1 = A_c^t x_1 - \Delta^t x_1$, и вычтем из второго равенства первое:

$$\underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 = A_c^t (x_1 - x_2) - \Delta^t x_1 - \Delta^t x_2 . \tag{29}$$

Выразив из (29) $A_c^t (x_1 - x_2) = \underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 + \Delta^t x_1 + \Delta^t x_2$ и подставив в левую часть (26), получаем:

$$\underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 \ge b_c^\tau - \delta^\tau ,$$

что с учетом равенства $\underline{b}^\tau = b_c^\tau - \delta^\tau$ дает (18).

Справедливость (19) следует из определения x_1 и x_2. Таким образом, доказано, что из << 2) >> следует утверждение << 3) >>.

Завершает доказательство теоремы обоснование того факта, что из утверждения << 3) >> следует условие << 1) >>.

Пусть $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ – решения неравенств (17), (18). Для произвольной матрицы $A^t \in I_A^t$ и для вектора $x = x_1 - x_2$ выполняется:

$$A^t x = A^t (x_1 - x_2) \le \overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \le \overline{b}^\tau ;$$

$$A^t x = A^t (x_1 - x_2) \ge \underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 \ge \underline{b}^\tau ,$$

или

$$\underline{b}^\tau \le A^t x \le \overline{b}^\tau ,$$

т. е.

$$A^t x \in I_b^\tau \qquad \forall A^t \in I_A^t ,$$

последнее означает, согласно определения 3, что x – допусковое решение нечеткой линейной системы (4).

Таким образом, теорема доказана.

Замечание. Проверка того, что x является допусковым с типом принадлежности

$< t, \tau >$ решением нечеткой системы (4), может быть осуществима за полиномиальное время, поскольку это простая проверка разрешимости системы (17)-(19).

Выводы

Результаты исследования: в работе введено понятие допускового с типом принадлежности $< t, \tau >$ решения нечеткой линейной системы уравнений и дана его характеризация.

Перспективы дальнейших исследований в этом направлении: далее целесообразно провести числовые эксперименты по проверке решения нечеткой системы на допусковость.

Стаття надійшла _03_._10_._2014___
Прийнято до друку _04_._11_._2014___

Литература

1. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде – М: Мир, 1976 – 165 с.
2. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
3. Сергиенко И. В. Применение понятий размытой математики для формализации и решения комбинаторных оптимизационных задач / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – №2. – С. 158-162.
4. Сергиенко И. В. Об одной нечеткой задаче многопараметрического выбора оптимальных решений / И. В. Сергиенко, И. Н. Парасюк, М. Ф. Каспшицкая // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – №2. – С. 3-15.
5. Ємець О. О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах: монографія / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець – Полтава: ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
6. Ємець О. О. Операції та відношення над нечіткими числами / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008 – №5. – С. 39-46.
7. Ємець О. О. Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008 – №6. – С. 25-33.
8. Донец Г. А. Постановка и решение задачи о рюкзаке с нечеткими данными / Г. А. Донец, А. О. Емец // Проблемы управления и информатики – 2009. – №5. – С. 65-76.
9. Емец О. А. Операции над нечеткими числами с носителем мощности континуум для моделирования в комбинаторной оптимизации / О. А. Емец, Т. А. Парфенова // Проблемы управления и информатики. – 2010. – №2. – С. 86-101.
10. Емец О. А. Метод ветвей и границ для задач оптимизации на нечетких множествах / О. А. Емец, А. О. Емец, Т. А. Парфенова // Проблемы управления и информатики. – 2013. – №2. – С. 55–60.
11. Зайченко Ю. П. Исследование операций: Нечеткая оптимизация: Учеб. пособие / Ю. П. Зайченко. – К.: Выща шк., 1991. – 191 с.
12. Емец О. А. О слабой разрешимости и слабой допустимости нечетких линейных систем уравнений / О. А. Емец, А. О. Емец // Матеріали ІІІ Всеукраїнського наукового семінару "Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ-2013)", (Полтава, 30-31 серпня 2013 р.): тези доп. – Полтава: ПУЕТ, 2013. – С. 27-35.
13. Фидлер М. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерманн. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2008 – 288 с.
14. Емец О. А. Редукция нечетких чисел с дискретным носителем / О. А. Емец, А. О. Емец // Материалы Международной научной конференции "Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта (ISDMCI '2012)", (Евпатория, 27-31 2012 г.): тез. докл. – Херсон, ХНТУ, 2012. – С. 361-362.
15. Iemets O. O. About the Problem of Growing of a Discrete Fuzzy Number Carrier during Algebraic Operations. / O. O. Iemets, O. O. Yemets` // XX International Conference Problems of Decision Making

under Uncertainties: (Brno, Czech Republic, September 17-21, 2012): abstracts. – Kyiv. – P. 117–124.

Анотація

О. О. Ємець

Допускові розв'язки з різним типом належності для нечітких лінійних систем рівнянь

В статті наведені відомі необхідні поняття з теорії нечітких чисел та інтервальних систем, а саме, поняття: нечіткого числа, носія і функції належності нечіткого числа, дискретного і континуального нечіткого числа; інтервальної матриці; нижньої та верхньої межі інтервальної матриці; середньої матриці; матриці радіусів; інтервального вектору; нижньої та верхньої межі інтервального вектору; середнього вектору; вектору радіусів.

У роботі введені нові поняття, такі як: поняття однопікового нечіткого числа (дискретного і континуального); гострого и не гострого піку; нормального нечіткого числа; стандартного нечіткого числа; стандартизованого нечіткого числа.

В статті введено поняття нечіткої матриці, яке пов'язує інтервальний апарат і апарат нечітких чисел; введено поняття інтервальної лінійної системи рівнянь; нечіткої лінійної системи рівнянь.

В роботі введено поняття допускового з типом належності $<t,\tau>$ *розв'язку нечіткої лінійної системи і дана його характеризація.*

Доведена лема: якщо I_A^t *– інтервальна матриця, що представлена через верхню* $\overline{A}^t$ *і нижню* $\underline{A}^t$ *межі інтервальної матриці* $[\,\underline{A}^t,\overline{A}^t\,]$, *де* $\underline{A}^t,\overline{A}^t \in R^{m\times n}$, *а* x *допусковий вектор з типом належності* $<t,\tau>$, $x\in R^n$, *тоді сімейство з номером* t *правих частин систем лінійних рівнянь* $A^t x$ *можна представити через матрицю радіусів* Δ^t: $\{\,A^t x \,\big|\, A^t \in I_A^t\,\} = [A_c^t x - \Delta^t\,|\,x\,|, A_c^t x + \Delta^t\,|\,x\,|]$.

Для сімейства з номером t $A^t x$ *правих частин систем лінійних рівнянь доведено, що наступні твердження еквівалентні: 1)* x *– допусковий з типом належності* $<t,\tau>$ *розв'язок нечіткої лінійної системи виду* $F_A x = F_b$*; 2)* x *– задовольняє нерівності* $|\,A_c^t x - b_c^\tau\,| \le -\Delta^t\,|\,x\,| + \delta^\tau$, *де* A_c^t *– середня матриця інтервальної матриці,* b_c^τ *– середній вектор інтервального вектору,* Δ^t *– матриця радіусів інтервальної матриці,* δ^τ *– вектор радіусів інтервального вектору,*

3) $x = x_1 - x_2$, *де* x_1, x_2 *задовольняють умовам:* $\overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \le \overline{b}^\tau$; $\underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 \ge \underline{b}^\tau$; $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$, *де* $\overline{A}^t, \underline{A}^t$ *– верхня і нижня межі інтервальної матриці;* $\overline{b}^\tau$, $\underline{b}^\tau$ *– верхня і нижня межі інтервального вектору.*

Обґрунтовано, що перевірка того, що x *є допусковим з типом належності* $<t,\tau>$ *розв'язком нечіткої системи, може бути здійснена за поліноміальний час.*

Ключові слова: *нечіткі лінійні системи рівнянь, нечіткі числа, інтервальні системи, допускові розв'язки.*

Summary

O. O. Yemets`

Admitable solutions with the different type of membership for uncertain linear systems of equations

Necessary familiar concepts from fuzzy numbers theory and interval systems are presented in the article, namely, concepts of: a fuzzy number; the carrier and the membership function of fuzzy number; a discrete and continual fuzzy number; an interval matrix; low and upper bounds of an interval matrix; a middle matrix; a matrix of radiuses; an interval vector; low and upper bounds of an

interval vector; a middle vector; the vector of radiuses.

New concepts such as concepts of a one-peak fuzzy number (discrete and continual); an acute and not acute peak; a normal fuzzy number; a standard fuzzy number; a standardized fuzzy number are introduced in the work.

The concepts of a fuzzy matrix, which connects interval apparatus and fuzzy numbers apparatus; interval linear systems of equations; the fuzzy linear system of equations are introduced in the work.

The concept of admitable with the type of membership $< t, \tau >$ *solution of an uncertain linear system of equations is introduced in the work. Characterization of a solution is given.*

It is proved the lemma that if I_A^t *is an interval matrix, presented through its low* $\underline{A}^t$ *and upper* $\overline{A}^t$ *bounds* $[\, \underline{A}^t, \overline{A}^t \,]$, *where* $\underline{A}^t, \overline{A}^t \in R^{m \times n}$, *and* x *is admitable with the type of membership* $< t, \tau >$ *solution,* $x \in R^n$, *then the family with the number* t *of right parts of systems of linear equations* $A^t x$ *can be presented through the matrix of radiuses* Δ^t: $\{\, A^t x \mid A^t \in I_A^t \,\} = [A_c^t x - \Delta^t \,|\, x \,|, A_c^t x + \Delta^t \,|\, x \,|]$.

It is proved for the family with the number t $A^t x$ *of right parts of systems of linear equations, that next statements are equivalent:*

1) x *is admitable with the type of membership* $< t, \tau >$ *solution of uncertain linear system of equations of the form* $F_A x = F_b$;

2) x *satisfies the inequality* $|\, A_c^t x - b_c^\tau \,| \le -\Delta^t \,|\, x \,| + \delta^\tau$, *where* A_c^t *is the middle matrix of the interval matrix,* b_c^τ *is the middle vector of the interval vector,* Δ^t *is the matrix of radiuses of the interval matrix,* δ^τ *is the vector of radiuses of the interval vector.*

3) $x = x_1 - x_2$, *where* x_1, x_2 *satisfy conditions:* $\overline{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \le \overline{b}^\tau$; $\underline{A}^t x_1 - \overline{A}^t x_2 \ge \underline{b}^\tau$; $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$, *where* $\overline{A}^t, \underline{A}^t$ *are low and upper bounds of the interval matrix;* $\overline{b}^\tau$, $\underline{b}^\tau$ *are low and upper bounds of the interval vector.*

It is substantiated that the check that x *is admitable with the type of membership* $< t, \tau >$ *solution of the uncertain system can be executed for the polynomial time.*

Key words: *uncertain linear systems of equations, fuzzy number, interval systems, admitable solutions.*