УДК 004.94
Н. А. Красношлык, А. О. Богатырёв

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ПРОВЕДЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данной работе предложена схема проведения компьютерного моделирования. Приведено описание всех этапов и дана их характеристика. Взаимосвязь основных этапов проведения компьютерного моделирования иллюстрируется на примере гравитационной задачи N-тел.

Ключевые слова: *компьютерное моделирование, математическая модель, задача N-тел.*

Введение

Под математическим моделированием понимают процесс создания и дальнейшего использования математических моделей реальных объектов, процессов или явлений в различных областях науки и техники. Математическое моделирование является научным методом познания, цель которого заключается в объяснении, прогнозировании, изучении свойств и характеристик предмета моделирования путём исследования его математической модели [13]. В настоящее время для исследования математических моделей широко используют вычислительную технику. Для этого на основе рассматриваемой математической модели необходимо создать компьютерную модель, которая представляет собой компьютерную программу, описывающую поведение элементов исследуемой системы в процессе ее функционирования, учитывая их взаимодействие между собой и внешней средой. Процесс создания компьютерной модели является не мене важным, чем создание самой математической модели, и может оказаться достаточно трудоёмким, длительным и кропотливым.

В целом, компьютерное моделирование, как процесс создания и численного исследования предполагает выполнение исследователем ряда взаимосвязанных этапов, от качества реализации которых будет зависеть достоверность полученных результатов моделирования.

Целью данной работы является выделение и формализация основных этапов проведения численного компьютерного моделирования [9] реальных объектов, процессов или явлений, а также их иллюстрация на примере гравитационной задачи *N*-тел.

Основные этапы проведения компьютерного моделирования

Компьютерное моделирование становится главным инструментом современных исследователей при построении сложных математических моделей, позволяя эффективно применять существующий арсенал численных методов и современного программного обеспечения с использованием высокопроизводительных компьютеров.

Суть компьютерного моделирования состоит в получении количественных и качественных результатов по имеющейся модели. Качественные характеристики, получаемые в результате моделирования, позволяют обнаружить неизвестные ранее свойства объекта моделирования: его структуру, динамику развития, устойчивость и др. Количественные характеристики используют для прогноза новых или объяснения существующих свойств данного объекта [10].

Основой процесса моделирования при самом общем подходе является предложенная А. А. Самарским формальная схема модель – алгоритм – программа [14], которая предполагает дальнейшую детализацию.

Процесс построения математической модели и её компьютерной реализации, как правило, состоит из нескольких самостоятельных этапов. Наиболее детально ключевые этапы построения математической модели рассмотрены в работе [6]. Описание отдельных этапов приводится в работах [7, 8, 11–13, 16]. При этом в работе [16] отмечается, что на сегодняшний день термины математическое моделирование и компьютерное моделирование являются почти синонимами.

На основе анализа рассмотренных работ предложена детализированная схема проведения компьютерного моделирования, представленная на рис. 1.

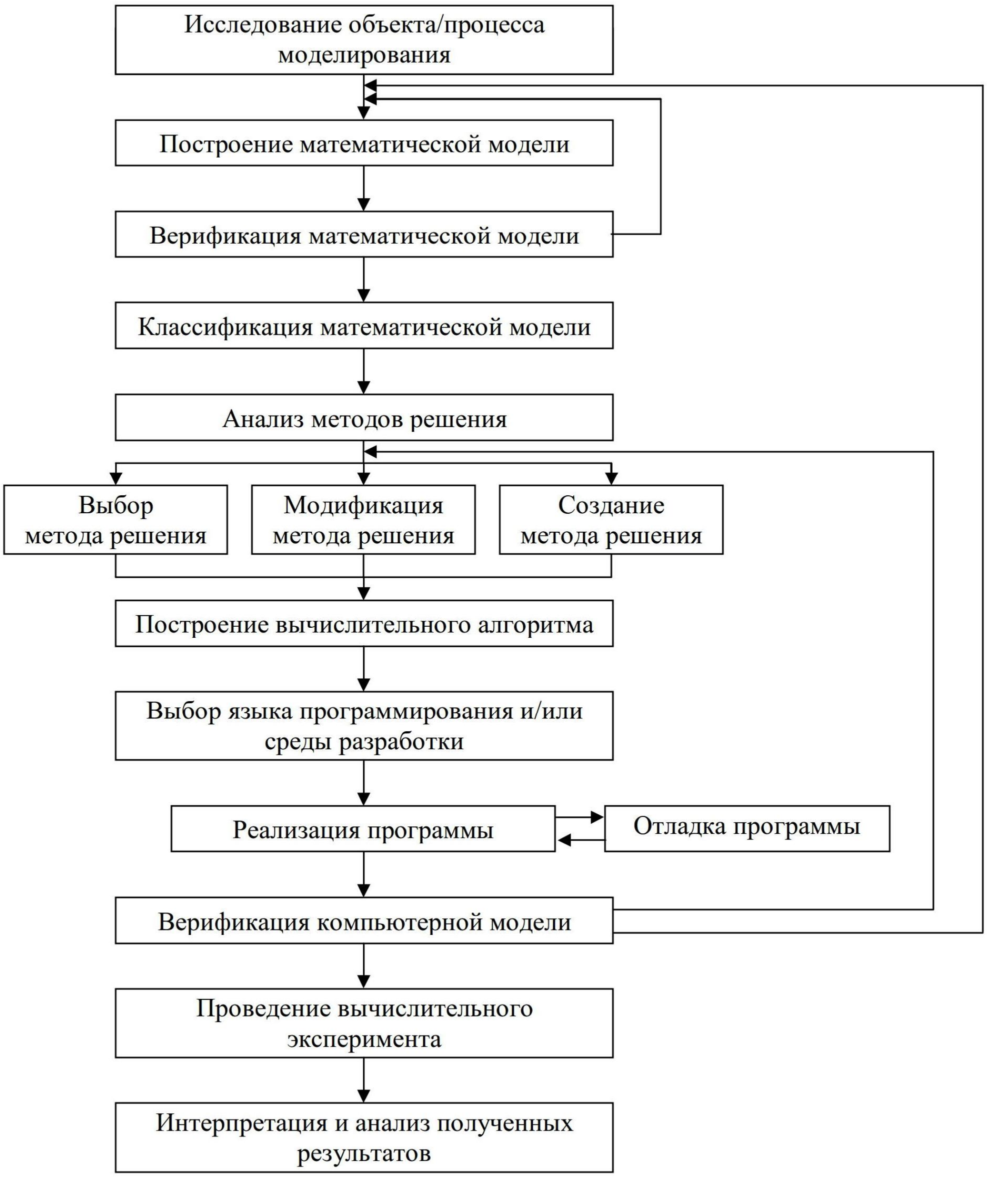


Рис. 1. Этапы проведения компьютерного моделирования

В соответствии с предлагаемой схемой, для проведения компьютерного моделирования некоторого объекта или процесса необходимо выполнить следующие этапы.

1. Исследование объекта/процесса моделирования. Данный этап предполагает сбор информации об объекте или процессе моделирования для составления содержательной постановки задачи моделирования.

2. Построение математической модели. На данном этапе необходимо получить математическую (абстрактную) модель реального объекта в виде алгебраических, дифференциальных и других уравнений.

3. Классификация математической модели. Данный этап служит для формальной классификации полученной математической модели.

4. Верификация математической модели. На данном этапе осуществляется проверка адекватности математической модели, которая предполагает: проведение контроля размерностей величин, входящих в уравнения модели; проверку математической замкнутости; рассмотрение случаев, когда параметры модели приближаются к предельно допустимым для них значениям.

5. Анализ методов решения. На этом этапе следует выполнить сравнительный анализ существующих методов решения задач данного класса. На основе выбранных критериев необходимо: либо определить наиболее подходящий из рассмотренных методов, либо модифицировать существующий метод, либо разработать новый метод численного решения данной задачи.

6. Построение вычислительного алгоритма. На данном этапе для построения вычислительного алгоритма, реализующего предложенный метод решения, необходимо выполнить дискретизацию математической модели.

Выполнять вычисления на компьютере с очень большими или же очень маленькими числами крайне не целесообразно. Поэтому, когда величины в математической модели отличаются от 1 на несколько порядков, предварительно следует перейти к безразмерным переменным.

7. Выбор языка программирования и/или среды разработки. На данном этапе в соответствии с целью создания и дальнейшего использования программного продукта, а также в зависимости от умений и возможностей разработчика, осуществляется выбор языка и среды программирования для реализации программы.

8. Реализация программы. На данном этапе необходимо осуществить программную реализацию вычислительного алгоритма и выполнить отладку программы.

9. Верификация компьютерной модели. На данном этапе проводится сопоставление получаемых результатов с аналитическим решением и/или экспериментальными данными.

10. Проведение вычислительного эксперимента. Данный этап предполагает получение новых численных данных об объекте/процессе моделирования на основе его компьютерной модели.

11. Интерпретация и анализ полученных результатов. Целью данного этапа является обработка, анализ и интерпретация полученных численных данных для реального объекта или процесса моделирования.

Компьютерное моделирование процесса взаимодействия *N*-тел

Рассмотрим гравитационную задачу *N*-тел, которая относится к фундаментальным задачам небесной механики. Данная задача была сформулирована

И. Ньютоном в 1867 году, однако, и в настоящее время не имеет точного решения в общем случае, хотя имеются частные аналитические решения при *N*=2 и *N*=3.

Актуальность задачи *N*-тел обусловлена как её применением в астрофизике для описания движения космических тел, так и её ролью для исследования траекторий движения частиц различных систем в молекулярной динамике, жидкостной динамике, электростатике, что вызывает интерес со стороны многих исследователей. Поэтому классическая задача *N*-тел была выбрана в качестве примера для иллюстрации и пояснения конкретных этапов компьютерного моделирования. С математическим описанием задачи *N*-тел можно ознакомиться, например, в [2, 5].

Следуя предлагающейся схеме (рис. 1), для компьютерного моделирования процесса гравитационного взаимодействия многих тел необходимо выполнить следующие этапы.

1. Исследование объекта/процесса моделирования. На данном этапе требуется изучить особенности взаимодействия тел, фундаментальные физические законы и принципы, которыми следует руководствоваться при построении модели.

Таким образом, *содержательная постановка рассматриваемой задачи* будет следующей. Имеется *N* тел, попарное взаимодействие которых подчинено закону всемирного тяготения Ньютона. Силы гравитации аддитивны. Заданы начальные положения и скорости тел. Требуется найти положения тел для всех последующих моментов времени.

2. Построение математической модели. На данном этапе требуется получить математическую модель гравитационной задачи *N*-тел.

Пусть в пространстве находятся *N* гравитирующих тел (материальных точек), которые попарно взаимодействуют между собой. В начальный момент времени для каждой i-ой ($i=\overline{1,N}$) точки известны её масса m_i (кг), положение в пространстве, определяемое радиус-вектором r_i (м) и скорость движения v_i (м·с$^{-1}$).

Согласно закону всемирного тяготения, две материальные точки притягиваются к друг другу с силой:

$$F_{ij}=G\frac{m_i\cdot m_j}{R^2},$$

где F_{ij} – сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками (Н), $G\approx 6.67\cdot 10^{-11}$ – универсальная гравитационная постоянная (м^3·кг$^{-1}$·с$^{-2}$), R – расстояние между точками (м).

Результирующая сила F, действующая на i-ю точку, является суммой сил F_{ij} попарных взаимодействий данной точки со всеми остальными:

$$F=\sum_{j=1}^{N}F_{ij},\ j\neq i,$$

$$F_{ij}=G\cdot m_i\cdot m_j\frac{r_j-r_i}{\left|r_j-r_i\right|^3}.$$

Ускорение движения i-ой точки $a_i=\dfrac{dv_i}{dt}$ (м·с$^{-2}$), можно найти из второго закона Ньютона:

$$a=\frac{F}{m}.$$

В результате получаем:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{F}{m_i} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} Gm_j \frac{r_j - r_i}{\left|r_j - r_i\right|^3}.$$

Таким образом, *математическая модель рассматриваемой задачи* может быть сформулирована следующим образом. Динамика взаимодействия N материальных точек описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} Gm_j \frac{r_j - r_i}{\left|r_j - r_i\right|^3}, \tag{1}$$

$$\frac{dr_i}{dt} = v_i, \tag{2}$$

при начальных условиях

$$r_i(0) = r_i^0, \; v_i(0) = v_i^0, \tag{3}$$

где r_i^0 – значение, определяющее начальное положение i-ой точки в пространстве, v_i^0 – значение, определяющее начальную скорость этой материальной точки.

3. Классификация математической модели. С математической точки зрения рассматриваемая задача N-тел представляет собой задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Верификация математической модели. На данном этапе проведём верификацию полученной математической модели.

Вначале выполним контроль размерностей уравнений модели:

$$\frac{dr_i}{dt} = v_i \;\Rightarrow\; \frac{[\text{м}]}{[\text{с}]} = \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right].$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j\neq i}^{N} Gm_j \frac{r_j - r_i}{\left|r_j - r_i\right|^3} \;\Rightarrow\; \frac{\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]}{[\text{с}]} = \left[\frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}\right]\cdot[\text{кг}]\cdot\frac{[\text{м}]}{\left[\text{м}^3\right]} \;\Rightarrow\; \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right] = \frac{[\text{м}]}{\left[\text{с}^2\right]}.$$

Математическая модель является замкнутой, поскольку необходимо найти зависимости векторных величин $r_i(t)$ и $v_i(t)$, решив систему $2\cdot N\cdot d$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь d – размерность пространства.

5. Анализ методов решения. На этом этапе требуется выбрать метод для решения задачи N-тел.

Рассматриваемая задача не имеет аналитического решения в общем случае, поэтому для её решения необходимо использовать численные методы. Существуют различные методы численного решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений. Это приводит к необходимости выбора метода, наиболее подходящего для данной задачи. Критериями выбора конкретного численного метода для решения задачи N-тел выступают точность, эффективность, т.е. количество операций, необходимых для достижения заданной точности, и устойчивость метода. При выборе численного метода также следует учитывать уровень квалификации, осведомлённость и практический опыт самого разработчика компьютерной модели. Учитывая разнообразие методов вычислительной математики, которые к тому же постоянно пополняются, использование неизвестных или очень сложных для разработчика методов может оказаться неоправданно трудозатратным. Поэтому, изначально следует рассмотреть наиболее распространённые, известные разработчику численные методы, а уже при необходимости либо искать альтернативные методы, либо модифицировать рассмотренные методы с учётом особенностей задачи, либо (в особо сложных случаях) разработать свой метод решения.

В качестве тестового примера для выбора численного метода решения задачи (1)–(3) рассмотрим упрощённую модель движения тел в одномерном пространстве:

$$\frac{dv_i}{dt} = a_i, \tag{4}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i. \tag{5}$$

Численное решение задачи (4)–(5) заключается в вычислении новых значений $v_i^{(k+1)}$ и $x_i^{(k+1)}$ на $k+1$ шаге по времени.

В простейшем случае данную задачу можно решить методом Эйлера. Расчётные формулы метода Эйлера для вычисления ускорений и положения тел через промежуток времени Δt будут иметь вид:

$$v_i^{(k+1)} = v_i^{(k)} + a_i^{(k)} \cdot \Delta t,$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + v_i^{(k)} \cdot \Delta t.$$

Метод Эйлера является методом первого порядка, его точность и устойчивость при решении (4)–(5) ограничены, поэтому следует рассмотреть и его возможные модификации.

Одно из усовершенствований метода Эйлера заключается в том, что при вычислении нового положения тела $x_i^{(k+1)}$ через промежуток времени Δt будет использоваться скорость в момент времени $t + \Delta t$. Соответствующая модификация определяет метод Эйлера-Кромера:

$$v_i^{(k+1)} = v_i^{(k)} + a_i^{(k)} \cdot \Delta t,$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + v_i^{(k+1)} \cdot \Delta t.$$

Ещё одна модификация метода Эйлера заключается в использовании усредненной скорости, в итоге получают метод второго порядка точности по координате и первого по скорости. Данный метод называют методом средней точки, расчётные формулы которого:

$$v_i^{(k+1)} = v_i^{(k)} + a_i^{(k)} \cdot \Delta t,$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{2}\left(v_i^{(k)} + v_i^{(k+1)}\right)\cdot \Delta t .$$

Для численного решения рассматриваемой задачи также используют алгоритм Верле, предназначенный для решения уравнений движения материальной точки. Данный метод имеет третий порядок точности для координаты и второй порядок для скорости. Расчётные формулы алгоритма Верле в скоростной формулировке имеют вид:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + v_i^{(k)}\cdot \Delta t + \frac{1}{2}a_i^{(k)}\left(\Delta t\right)^2, \tag{6}$$

$$v_i^{(k+1)} = v_i^{(k)} + \frac{1}{2}\left(a_i^{(k)} + a_i^{(k+1)}\right)\cdot \Delta t . \tag{7}$$

Одним из широко распространённых методов высших порядков для решения систем дифференциальных уравнений является метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Расчётные формулы метода Рунге-Кутты 4-го порядка для системы (4)–(5) имеют вид:

$$k1x_i = v_i^{(k)}\cdot \Delta t ,$$

$$k1v_i = a^{(k)}\left(x_i\right)\cdot \Delta t ,$$

$$k2x_i = \left(v_i^{(k)} + \frac{k1v_i}{2}\right)\cdot \Delta t ,$$

$$k2v_i = a^{(k)}\left(x_i^{(k)} + \frac{k1x_i}{2}\right)\cdot \Delta t ,$$

$$k3x_i = \left(v_i^{(k)} + \frac{k2v_i}{2}\right)\cdot \Delta t ,$$

$$k3v_i = a^{(k)}\left(x_i^{(k)} + \frac{k2x_i}{2}\right)\cdot \Delta t ,$$

$$k4x_i = \left(v_i^{(k)} + k3v_i\right)\cdot \Delta t ,$$

$$k4v_i = a^{(k)}\left(x_i + k3x_i\right)\cdot \Delta t ,$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{6}\left(k1x_i + 2\cdot k2x_i + 2\cdot k3x_i + k4x_i\right),$$

$$v_i^{(k+1)} = v_i^{(k)} + \frac{1}{6}\left(k1v_i + 2\cdot k2v_i + 2\cdot k3v_i + k4v_i\right).$$

Следует заметить, что здесь $a^{(k)}\left(x_i\right) \equiv a_i^{(k)}$.

Для выбора численного метода необходим сравнительный анализ решений, получаемых различными методами. Основными критериями при этом выступают точность и эффективность. Во всех рассмотренных методах погрешность вычисления координат тел накапливается по-разному. Наиболее точным является метод Рунге-Кутты. Однако в нём вычисление ускорений тел выполняется на каждом шаге по времени 4 раза, в то время как в остальных методах – 1 раз. Ещё одним важным критерием при моделировании движения тел является сохранение полной энергии системы на всём временн*о*м интервале. В целом, ни один из рассмотренных методов не превосходит существенно остальные по всем критериям. Выбирая компромиссный вариант с учётом точности метода, устойчивости получаемого решения и времени работы будем использовать скоростной метод Верле.

6. Построение вычислительного алгоритма. На данном этапе для построения вычислительного алгоритма решения задачи *N*-тел требуется перейти к безразмерной форме уравнений, поскольку физические параметры математической модели (1)–(3) имеют различные порядки.

В качестве величин для масштабирования в задаче *N*-тел выберем следующие параметры:

A = 1 а.е.=$1.486\cdot10^{11}$ м, T = 1 год = $3.15\cdot10^{7}$ с, M = $5.9726\cdot10^{24}$ кг (масса Земли).

Введём безразмерные переменные

$$\overline{r}=\frac{r}{A}\ ,\ \overline{v}=\frac{v\cdot T}{A},\ \overline{t}=\frac{t}{T}$$

и параметры

$$\overline{G}=\frac{G\cdot M\cdot T}{A^3}=\frac{6.67\cdot10^{-11}\left(\text{м}^3\cdot\text{кг}^{-1}\cdot\text{с}^{-2}\right)\cdot5.9726\cdot10^{24}\left(\text{кг}\right)\ \cdot3.15\cdot10^{17}\left(\text{с}^2\right)}{\left(1.486\cdot10^{11}\left(\text{м}\right)\right)^3}\approx1.21\cdot10^{-4}$$

Из данных соотношений выразим размерные величины и подставим их в уравнения (1)–(3), которые описывают рассматриваемую математическую модель процесса взаимодействия *N*-тел. После преобразований, опустив черту над безразмерными величинами, вернемся к исходному виду математической модели.

Далее рассматриваем математическую модель (1)–(3) с безразмерными переменными в двумерном пространстве. Численное решение задачи *N*-тел заключается в вычислении пространственных координат всех тел через определённые промежутки времени.

Пусть заданы массы тел (m_i) и их координаты на плоскости $\left(x_i,y_i\right)$, $i=\overline{1,N}$. На рис. 2. представлены два тела, которые находятся на расстоянии r, где *i*-ое тело притягивается *j*-ым с силой F. Вектор силы в двухмерном пространстве определяется двумя компонентами F_x и F_y.

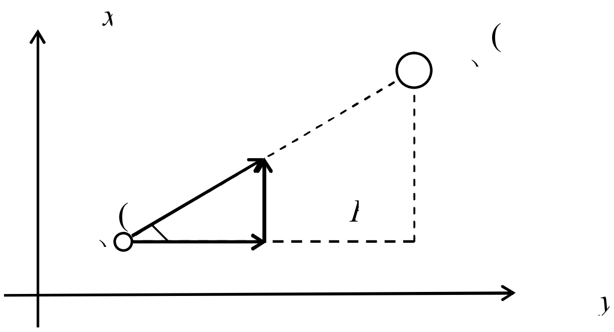


Рис. 2 Определение проекций вектора силы

Найдём проекции вектора F на оси координат:

$$F_x = F \cdot \cos\alpha = \frac{x_j - x_i}{r},$$

$$F_y = F \cdot \sin\alpha = \frac{y_j - y_i}{r},$$

где $r = \sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2}$.

Пусть a_{x_i}, a_{y_i}, v_{x_i}, v_{y_i} – проекции ускорения и скорости на оси.

Используя (1) найдём проекции вектора ускорения:

$$a_{x_i} = \frac{F_x}{m_i} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} Gm_j \frac{x_j - x_i}{r^3},\; a_{y_i} = \frac{F_y}{m_i} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} Gm_j \frac{y_j - y_i}{r^3}. \qquad (8)$$

Алгоритм вычисления новых положений тел в соответствии с методом Верле состоит в следующем:

1. Провести инициализацию переменных:

- задать N – количество тел;
- задать массы тел m_i ($i = \overline{1,N}$);
- задать начальные положения тел $\left(x_i, y_i\right)$, проекции вектора скорости v_{x_i}, v_{y_i} ($i = \overline{1,N}$);
- задать шаг по времени Δt и время окончания вычислительного эксперимента t_{end};

2. Пока $t \le t_{end}$ выполнять:

для каждого i-го тела ($i = \overline{1,N}$) выполнять:

2.1 вычислить новые координаты тела:

$$x_i^{(new)} = x_i^{(old)} + v_{x_i}^{(old)} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_{x_i}^{(old)} \left(\Delta t\right)^2,$$

$$y_i^{(new)} = y_i^{(old)} + v_{y_i}^{(old)} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_{y_i}^{(old)} \left(\Delta t\right)^2;$$

2.2 вычислить проекции нового ускорения:

$$a_{x_i}^{(new)} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} Gm_j \frac{x_j^{(new)} - x_i^{(new)}}{r^3},$$

$$a_{y_i}^{(new)} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} Gm_j \frac{y_j^{(new)} - y_i^{(new)}}{r^3};$$

2.3 вычислить проекции скорости:

$$v_{x_i}^{(new)} = v_{x_i}^{(old)} + \frac{1}{2}\left(a_{x_i}^{(old)} + a_{x_i}^{(new)}\right)\cdot \Delta t\,,$$

$$v_{y_i}^{(new)} = v_{y_i}^{(old)} + \frac{1}{2}\left(a_{y_i}^{(old)} + a_{y_i}^{(new)}\right)\cdot \Delta t\,.$$

7. Выбор языка программирования и/или среды разработки. Целью создания компьютерной модели процесса гравитационного взаимодействия N-тел в пространстве является численное исследование и графическая визуализация динамики данной системы.

Для программной реализации модели выбран язык программирования *C*, графическая библиотека OpenGL и среда разработки Microsoft Visual Studio 2010.

8. Реализация программы. На данном этапе выполняется программная реализация вычислительного алгоритма.

В табл. 1 приведены соответствия имен программных и математических переменных для рассматриваемой задачи.

Таблица 1.

Входные данные:		
`N`	N	количество тел
`m[i]`	m_i	одномерный массив, содержащий массы тел
`x[i]`	x_i	одномерные массивы, содержащие координаты тел
`y[i]`	y_i	
`vx[i]`	v_{x_i}	одномерные массивы, содержащие проекции скоростей тел
`vy[i]`	v_{y_i}	
`ax[i]`	a_{x_i}	одномерные массивы, содержащие проекции ускорений тел
`ay[i]`	a_{y_i}	
`T`	t	текущее время
`t_end`	t_{end}	время окончания
`Dt`	Δt	шаг по времени

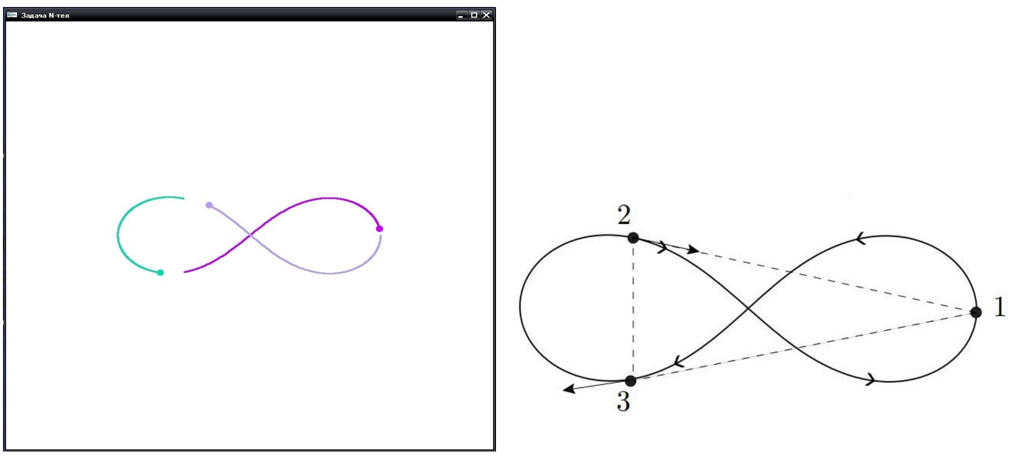
Продолжение Табл. 1

Выходные данные:		
`x[i]`	x_i	одномерные массивы, содержащие текущие координаты тел
`y[i]`	y_i	
Промежуточные переменные		
`Dx`	$x_i - x_j$	
`Dy`	$y_i - y_j$	
`R`	$\sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2}$	
`E`		полная энергия системы
Используемые функции		
`void init(void)`		инициализация переменных
`void calc(void)`		вычисление текущих координат тел
`double calc_energy(void)`		вычисление полной энергии системы

9. Верификация компьютерной модели. Для верификации компьютерной реализации рассматриваемой математической модели можно взять задачу трёх тел, поскольку для этого случая существуют аналитические решения для некоторых частных случаев.

В качестве тестового примера рассмотрим случай, впервые описанный в 1999 г. К. Муром [4], когда три тела одинаковой массы движутся друг за другом вдоль плоской кривой в форме восьмёрки.

Проведено сравнение результатов компьютерного моделирования движения трёх тел на основе реализованной компьютерной модели с имеющимися результатами других авторов [1]. Сопоставляя рис. 3а и рис. 3б можно сделать вывод о качественном соответствии приведенных результатов моделирования. Также выполнено сравнение изменяющихся значений координат тел в процессе моделирования. Результаты сравнения свидетельствуют об адекватности компьютерной реализации модели гравитационного взаимодействия N тел, а также о возможности её применения для исследования динамики данной системы.



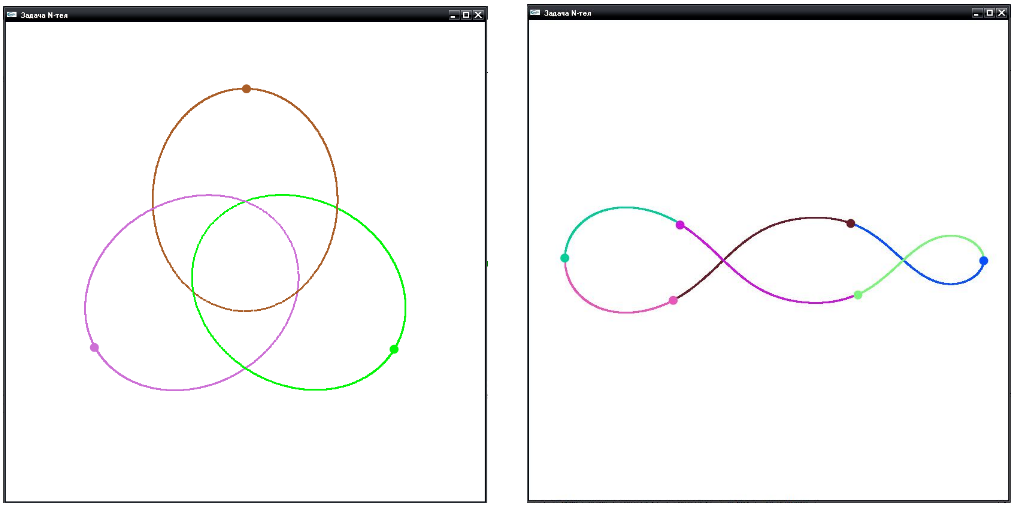
а) б)

Рис. 3 Иллюстрация движения трёх тел по орбите в форме восьмёрки
а) результаты компьютерного моделирования, б) результаты из [1]

10. Проведение вычислительного эксперимента. Реализованная компьютерная модель позволяет исследовать динамику взаимодействия N-тел в двумерном пространстве.

Решение задачи N-тел, при котором все тела движутся вдоль одной и той же плоской кривой без столкновений с постоянными сдвигами фаз, называют простой хореографией [15]. Данный термин ввёл К. Симо ввиду того, что при анимации тела совершают танцеподобные движения.

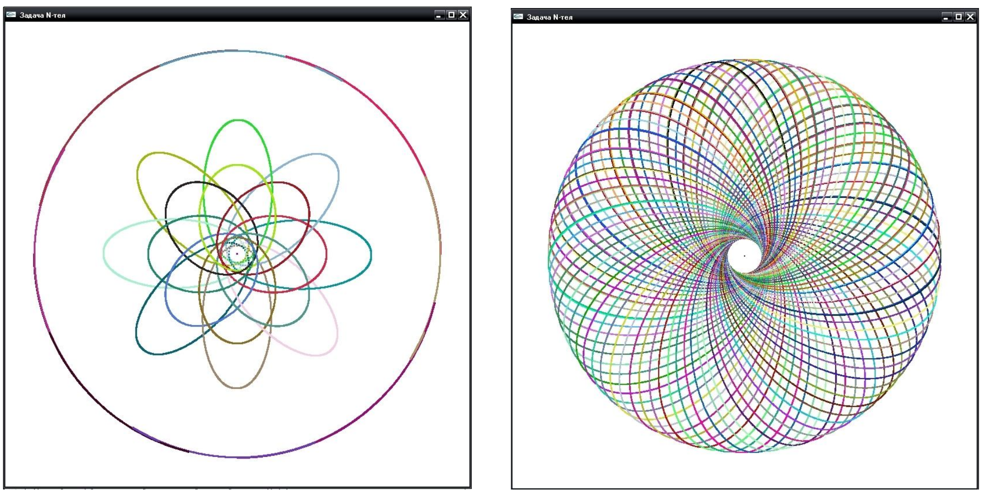
Проведена серия вычислительных экспериментов, демонстрирующая простые хореографии с различным количеством тел.



а) б)

Рис. 3 Иллюстрация простых хореографий при а) N =3, б) N =6

Выполнено компьютерное моделирование гравитационного взаимодействия различных ансамблей тел, результаты которого приведены на рис. 5.



а) б)

Рис. 5 Иллюстрация траекторий движения тел при а) N =25, б) N=101

На рис. 6 представлены результаты компьютерного моделирования динамики формирования спиралевидной галактики при N =1000.

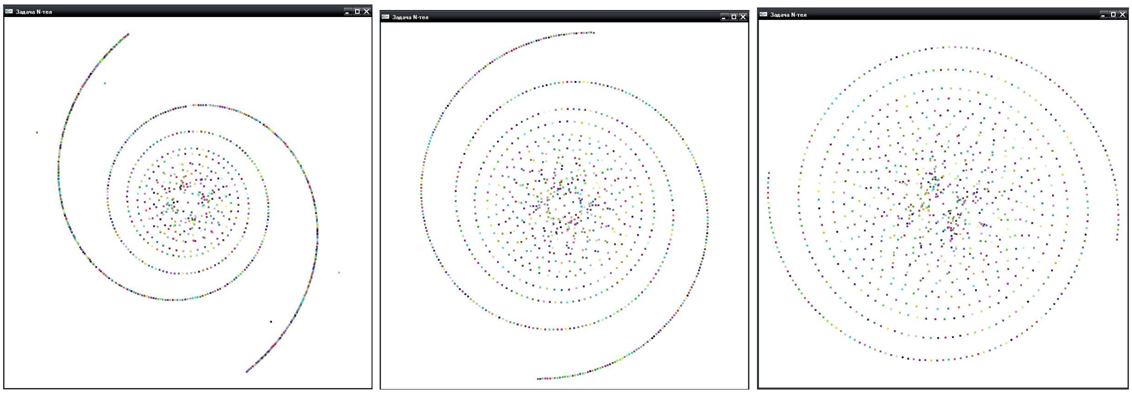


Рис. 6 Эволюция спиралевидной галактики при $N = 1000$.

11. Интерпретация и анализ полученных результатов. В настоящее время найдены сотни хореографических решений, причём число «различных» хореографий быстро возрастает при увеличении N. Наибольшее число N, для которого найдена простая хореография, когда все тела движутся вдоль восьмёркообразной кривой, равно 799 [15]. Численные исследования, нацеленные на поиск различных хореографий для заданного N продолжаются. Авторами работы [3] предложена классификация существующих групп плоских симметричных хореографий N-тел.

В процессе исследования проведено компьютерное моделирование взаимодействия N-тел при $N=1000$. Следует отметить, что при увеличении числа тел, количество взаимодействий между ними, которое необходимо учитывать в формуле (8), растёт как $O\left(N^2\right)$. При больших значениях N для повышения эффективности результирующего алгоритма с точки зрения быстродействия при вычислении (8) целесообразно использовать либо параллельные вычисления, либо алгоритм Барнса-Хата.

Выводы

Компьютерное моделирование является одним из эффективных методов изучения объектов, процессов или явлений различной природы. Процесс компьютерного моделирования можно условно разделить на несколько взаимосвязанных этапов.

В работе предложена общая схема проведения численного компьютерного моделирования, которая содержит ключевые этапы и отображает связи между ними. Приведено как общее описание всех этапов моделирования, так и конкретизированное описание каждого из них на примере задачи взаимодействия N-тел. Представленная схема раскрывает основную суть процесса компьютерного моделирования и может применяться для повышения его эффективности.

Литература

1. Chenciner A. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses / Alain Chenciner, Richard Montgomery // Annals of Mathematics. – 2000. – №152. – P. 881-901.
2. Gould H. An Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical Systems / H. Gould, J. Tobochnik, W. Christian. – [3-rd ed.]. – Addison-Wesley, 2006. – 796 p.
3. Montaldi J. Classification of symmetry groups for planar n-body choreographies [Электронный ресурс] / James Montaldi, Katrina Steckles // arXiv.org : [сайт]. – Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1305.0470.
4. Moore C. Braids in classical dynamics / Cristopher Moore // Phys. Rev. Lett.. – 1993. – Vol.70. – P. 3675-3679.
5. Бутиков Е. И. Движения космических тел в компьютерных моделях. II Задача многих тел / Е. И. Бутиков // Компьютерные инструменты в образовании. – 2001. – № 5. – С. 4-23.

6. Введение в математическое моделирование : учеб. пособие / [В. Н. Ашихмин и др.] ; под ред. П. В. Трусова. – М.: Университетская книга, Логос, 2007. – 440 с.
7. Колесов Ю. Б. Моделирование систем. Динамические и гибридные системы : учеб. пособие / Ю. Б. Колесов, Ю. Б. Сениченков. – СПб: БХВ-Петербург, 2012. – 224 с.
8. Лазарєв Ю. Ф. Моделювання на ЕОМ : навчальний посібник / Ю. Ф. Лазарєв. – К.: Політехніка, 2007. – 2009 с.
9. Майер Р. В. Компьютерное моделирование : учебник для педвузов. – Глазов: ГГПИ, 2014. – 531 с.
10. Макарова Н. В. Информатика : учебник для вузов / Н. В. Макарова, В. Б. Волков. – СПб: Питер, 2011. – 576 с.
11. Маликов Р. Практикум по компьютерному моделированию физический явлений и объектов : учеб. пособие / Р. Ф. Маликов. – Уфа: Изд-во БашГПУ, 2005. – 291 с.
12. Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей / А. Д. Мышкис. – [3-е изд., испр.]. – М.: КомКнига, 2007. – 192 с.
13. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
14. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / Самарский А. А., Михайлов А. П. – [2-е изд., испр.]. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
15. Современные проблемы хаоса и нелинейности / [К. Симо и др.]. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 304 с.
16. Тарасевич Ю. Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс : учеб. пособие / Ю. Ю. Тарасевич. – [4-е изд., испр.]. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 152 с.

Стаття надійшла _24_._09_._2014___

Прийнято до друку _07_._10_._2014___

Анотація

Н. О. Красношлик, О. О. Богатирьов

Основні етапи проведення комп'ютерного моделювання

У даній роботі запропонована схема проведення комп'ютерного моделювання. Наведено опис всіх етапів і дана їх характеристика. Взаємозв'язок основних етапів проведення комп'ютерного моделювання ілюструється на прикладі гравітаційної задачі N-тіл. Для розглянутої задачі описано побудову математичної моделі, обґрунтовано вибір чисельного методу розв'язування, наведено відповідний обчислювальний алгоритм та представлено результати обчислювальних експериментів.

Ключові слова: *комп'ютерне моделювання, математична модель, задача N-тіл.*

Summary

N. A. Krasnoshlyk, A. O. Bogatyrev

Basic stages of computer simulation

In this paper we propose a scheme of computer simulation. A description of all the stages and their characteristic is given. The relationship of the main stages of computer simulation is illustrated by the gravitational N-body problem. For this problem the mathematical model building is described, the choice of a numerical method of solution is substantiated, appropriate computational algorithm is given and results of computational experiments are presented.

Key words: *computer simulation, mathematical model, N-body problem.*