УДК. 536.23 **Б.П.Головня**

МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ТУРБУЛЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Автором была предложена модель турбулентности, основанная на концепции турбулентной вязкости и корректно воспроизводящая каскадный процесс. Вычислительные эксперименты показали, что возможности ее ограничены. В данной работе предлагается модель переноса турбулентных напряжений.

Ключевые слова: *моделирование турбулентности, RANS модели, модели переноса турбулентных напряжений*

Вступление

В моделях $k-\varepsilon$ типа предполагается, что для описания турбулентности в точке достаточно знать один масштаб скорости, а компоненты напряжений Рейнольдса можно выразить через этот масштаб с помощью соотношения Колмогорова-Прандтля для турбулентной вязкости. Однако перенос отдельных компонент напряжений не всегда отражается этим соотношением адекватно, если даже верно описан перенос масштаба скорости. Нужно принять во внимание разницу в эволюции различных компонент напряжений Рейнольдса (представляющих различные масштабы скоростей в сложных течениях) и уметь надлежащим образом учесть перенос этих компонент. Для этого применяются модели, использующие уравнения переноса для отдельных компонент турбулентных напряжений $\overline{u_i u_j}$. Модели, основанные на этих уравнениях, часто относят к схемам замыкания второго порядка. Уравнения для корреляций $\overline{u_i u_j}$ могут быть выведены точно, Вывод точных уравнений имеет то преимущество, что в уравнениях автоматически появляются члены, учитывающие массовые силы, вращательное движение и другие факторы. Но, тем не менее, для получения замкнутой системы в точные уравнения нужно ввести еще и модельные соотношения.

К сожалению, модели турбулентности, основанные на уравнениях переноса $\overline{u_i u_j}$, довольно сложны. Поэтому эти модели, несмотря на их большие потенциальные возможности, редко используются на практике как таковые.

Цель работы

Целью работы является разработка модели турбулентности обладающей повышенными вычислительными возможностями.

Модель переноса турбулентных напряжений без учета воздействия стенок

В работах [1]-[3] автором предложена модель турбулентности k-ε, корректно воспроизводящая закономерности каскадного переноса энергии турбулентности. В данной работе, на основе предложенных идей, автором предлагается модель для расчета турбулентных напряжений.

Полное уравнение переноса турбулентных напряжений выводится на основе уравнений Навье-Стокса. Для его вывода необходимо точное уравнение переноса компоненты импульса в направлении x_i умножить на компоненту скорости U_j, уравнение переноса компоненты импульса в направлении x_j умножить на U_i и результаты сложить. В итоге получаем:

$$U_j \frac{\partial U_k U_i}{\partial x_k} + U_i \frac{\partial U_k U_j}{\partial x_k} = \nu U_j \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} + \nu U_i \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{1}{\rho} U_j \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} U_i \frac{\partial P}{\partial x_j} + U_j F_i + U_i F_j \quad (1)$$

Проводя с уравнением (1) преобразования, совпадающие по смыслу и содержанию с преобразованиями, использовавшимися при выводе уравнения переноса энергии турбулентности, получаем уравнение переноса турбулентных напряжений:

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = \underbrace{\nu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \overline{u_i u_j}}_{1} \underbrace{- \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j u_k}}_{2} \underbrace{- \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \overline{u_i p}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j p}}{\partial x_i} \right)}_{3} -$$

$$\underbrace{- \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k}}_{4} \underbrace{- \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{5} + \underbrace{\overline{\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}}_{6} \underbrace{- 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}}_{7} \quad (2)$$

Слагаемые уравнения описывают:

1 – вязкую диффузию,

2 и 3 – турбулентную диффузию,

4 и 5 – генерацию за счет взаимодействия со средним течением,

6 – перераспределение за счет взаимодействия пульсаций скорости и давления,

7 – скорость диссипации.

В дальнейшем для слагаемых будут использоваться следующие обозначения: $Diff_{turb}$ – оператор турбулентного диффузионного переноса; P_{ij} – генерация; ε_{ij} – скорость диссипации $\overline{u_i u_j}$; π_{ij} - перераспределение.

Значения генерационного члена вычисляются по точным соотношениям:

$$P_{ij} \equiv -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}. \quad (3)$$

Турбулентная диффузия, перераспределение за счет взаимодействия пульсаций скорости и давления и скорость диссипации должны моделироваться.

В данной работе для вычисления перераспределения использовалось известное соотношение Ротта [4] :

$$\pi_{ij} = -C_a \frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3}\delta_{ij} k \right). \quad (4)$$

Теперь уравнение переноса $\overline{u_i u_j}$ можно переписать в виде:

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_n \partial x_n} + Diff_{turb}\left(\overline{u_i u_j}\right) + P_{ij} - C_a \frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3}\delta_{ij} k \right) - \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

Уравнение переноса скорости диссипации ε_{ii}

Потребуем, чтобы полусумма уравнений переноса $\overline{u_i u_i}$ совпадала с уравнением переноса *k*. Отсюда следует необходимость выполнения равенства $\sum \varepsilon_{ii} = 2\varepsilon$.

Известное соотношение $\varepsilon_{ii} = 2/3\varepsilon$ полностью удовлетворяет этому требованию, но тестовые расчеты показывают, что от его использования лучше отказаться.

В данной модели было решено использовать для диссипативных слагаемых ε_{ii} специальное уравнение переноса. Точное уравнение переноса скорости диссипации отдельных компонент тензора турбулентных напряжений, выводится из уравнений Навье-Стокса и имеет вид:

$$\frac{D\varepsilon_{ij}}{D\tau} = \underbrace{\left\{ \nu \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} \right\}}_{1} + \underbrace{\left\{ -\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_k \varepsilon'_{ij}} \right\}}_{2} + \underbrace{\left\{ -\frac{2\nu}{\rho} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_i}} \right) \right\}}_{3} +$$

$$+ \underbrace{\left\{ -2\nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}} + \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}} \right) \right) \right\}}_{4 \qquad\qquad 5}$$

$$+ \underbrace{\left\{ -2\nu \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_l} \overline{u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_l}} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_k \partial x_l} \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_l}} \right) \right\}}_{6} + \underbrace{\left\{ -2\nu \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_l} \overline{u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_l}} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_k \partial x_l} \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_l}} \right) \right\}}_{7}.$$

Согласно рекомендациям Ханъялича и Лаундера [5] слагаемое (6) меньше слагаемых 1-4 на множитель пропорциональный $Re_t^{-0.5}$ а слагаемое (7) на множитель пропорциональный Re_t^{-1}. Поэтому эти слагаемые в дальнейшем исключаются из рассмотрения.

Слагаемое 3, содержащее корреляции с пульсациями давления, преобразуем следующим образом:

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial p}{\partial x_k}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial p}{\partial x_k}} \right)$$

$$- \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\overline{p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \right) + \overline{\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} + \overline{p \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}.$$

Если обозначить три последних слагаемых правой части как $\pi_{\varepsilon ii}$, то из уравнения неразрывности для пульсаций компонент скорости следует, что $\pi_{\varepsilon 11}+\pi_{\varepsilon 22}+\pi_{\varepsilon 33}\equiv 0$. По этой причине эти слагаемые в уравнении переноса ε_{ii} можно интерпретировать (по аналогии с уравнением переноса $\overline{u_i^2}$) как слагаемые, описывающие перераспределение ε_{ii} в результате взаимодействия пульсаций скорости и давления.

Теперь оставшиеся слагаемые уравнения можно записать следующим образом:

$$\frac{D\varepsilon_{ij}}{Dt} = Diff(\varepsilon_{ij}) + P_{\varepsilon ij} + \pi_{\varepsilon ij} - \varepsilon_{\varepsilon ij},$$

где

$$Diff(\varepsilon_{ij}) \equiv \nu \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_k \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial p}{\partial x_k}} - \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial p}{\partial x_k}}$$ – ффузия ε_{ij},

$$P_{\varepsilon ij} \equiv -2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)}$$ – нерация ε_{ij},

$$\pi_{\varepsilon ij} \equiv 2\nu\left[\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\overline{p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} - \overline{\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} - \overline{p\frac{\partial^2}{\partial x_k x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}\right] -$$

перераспределение ε_{ij} за счет взаимодействия пульсаций давления и скорости,

$$\varepsilon_{\varepsilon ij} \equiv 4\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_k}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_k}}$$ – ссипация ε_{ij}.

Все слагаемые должны моделироваться.

По рекомендациям Роди [6] и по аналогии с моделированием уравнений переноса $\overline{u_i^2}$ и ε объединяем соотношения для генерации, перераспределения и диссипации в одно целое и моделируем следующим образом:

$$P_{\varepsilon ii} + \pi_{\varepsilon ii} - \varepsilon_{\varepsilon ii} = \frac{\varepsilon}{k}\left(C_1\left(P_{ii} + \pi_{ii}\right) - C_2 \varepsilon_{ii}\right)$$

После подстановки всех модельных соотношений уравнение приобретает вид:

$$\frac{D\varepsilon_{ii}}{Dt} = \nu \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_n \partial x_n} + Diff_{turb}\left(\varepsilon_{ii}\right) + \frac{\varepsilon}{k}\left[C_1\left(P_{ii} - C_a \frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i^2} - \frac{2}{3}k\right)\right) - C_2 \varepsilon_{ii}\right] \quad (6)$$

Из (6) очевидно следует, что сумма уравнений переноса ε_{ii} полностью совпадает с уравнением переноса ε.

В случае $i \neq j$ корреляция $\overline{u_i u_j}$ описывает энергию взаимодействия компонент пульсационной составляющей скорости. Эта энергия не может передаваться по каскадному процессу, так как она возникает в результате взаимодействия конкретных пульсаций в конкретный момент времени. Но во второй главе работы было показано, что ε означает передачу энергии в каскадный процесс. Отсюда следует, что в случае

$i \neq j \quad \varepsilon_{ij} = 0$. Отметим, что равенство $\varepsilon_{ij} = 0$ следует также из изотропности маломасштабных турбулентных движений.

В то же время возникновение корреляции $\overline{u_i u_j} \quad (i \neq j)$ можно схематически описать следующим образом. Представим себе эластичную сферу, подвергаемую периодическим воздействиям в двух диаметрально противоположных точках. Если эти воздействия равны между собой по амплитуде и противоположны по фазе, то центр сферы останется неподвижным. Если воздействия не противофазны, то центр можно считать неподвижным в среднем. В любом случае в центре произведение $\overline{u \times v} = 0$. Но в случае неравенства амплитуд центр начнет двигаться, а произведение скоростей в точке, совпадающей с центром неподвижной сферы, станет неравным нулю. Очевидно, что этот процесс максимизируется, если сфера касается какой-либо твердой поверхности, т.е. одна из точек остается неподвижной.

Расчеты показывают, что диссипативные масштабы первичных вихрей в пристенной области течения больше расстояния до стенки, т.е. эти вихри все время прижаты к стенке. В то же время эти вихри постоянно подвергаются воздействию турбулентных пульсаций, что в сочетании с воздействием стенки и порождает ненулевое значение корреляции $\overline{u_i u_j} \quad (i \neq j)$. Но деформация вихрей непосредственно у стенки очень велика и в результате этого велики пульсации давления внутри вихрей, в пристенной области заметным остается воздействие вязких сил и т.д. Все эти причины порождают пристенное подавление корреляции $\overline{u_i u_j}$, что, в свою очередь, требует введения в уравнение дополнительного слагаемого. Проще всего описать это подавление как часть генерационного слагаемого. Очевидно, что эта часть должна быть связана с расстоянием до стенки. Учитывая эту связь с помощью функции φ, имеем в случае $i \neq j$:

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_n \partial x_n} + Diff_{turb}\left(\overline{u_i u_j}\right) + P_{ij} - C_a \frac{\varepsilon}{k}\overline{u_i u_j} - \varphi P_{ij} \tag{7}$$

Учет воздействия стенки на процессы переноса. Модель для турбулентной диффузии

Согласно предложенной теории часть энергии, получаемой от осредненного течения, идет на создание в пограничном слое образований, хорошо соответствующих когерентным структурам. Этот процесс отображается в модели умножением генерационного члена на функцию f_0. В модели переноса турбулентных напряжений в создании компонент энергии $\overline{u_i u_i}$ участвуют одновременно генерационный и перераспределительный члены. В связи с этим на функцию f_0 умножаем их сумму.

Вязкие пристенные взаимодействия отображаются умножением на функцию f_0 диффузионных слагаемых. В разрабатываемой модели пристенные взаимодействия учитываем аналогичным способом.

По всей видимости, одной из наиболее распространенных моделей для турбулентной диффузии является градиентная модель Дейли и Харлоу [7] –

$$Diff_{turb}\left(\overline{u_i u_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k} C_{Diff} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_n} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_n}.$$

В данной работе эта модель использовалась в незначительно упрощенной форме:

$$Diff_{turb}\left(\overline{u_i u_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_k}C_{Diff}\,\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k^2}\,\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}. \tag{8}$$

Модельное соотношение (8) требует дополнительных уточнений.

Коэффициент турбулентной диффузии $C_{Diff}\,\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k^2}$ в (8) является аппроксимаций вполне конкретной величины, предположительно пропорциональной турбулентной вязкости. Ясно, что аппроксимация получена частично на основе экспериментальных данных (значения $\overline{u_i u_j}$, $\overline{u_k^2}$ и k), частично на основе расчетов неизмеримой величины ε. Естественно предположить, что при построении аппроксимации значения ε находились на основе одной из традиционных моделей. Но, предполагая процесс равновесным, в первом приближении можно считать, что $\varepsilon_{\text{т.м.}} \approx f_0 \varepsilon_{\text{д.м.}}$, где индекс “т.м.” означает - “традиционные модели”, а индекс “д.м.” - “данная модель”. Этот факт учитываем в модели для диффузионного члена:

$$Diff_{turb}\left(\overline{u_{0i} u_{0j}}\right)=\frac{\partial}{\partial x_k}C_{Diff}\,f_0\,\frac{k_0}{\varepsilon_0}\overline{u_{0k}^2}\,\frac{\partial \overline{u_{0i} u_{0j}}}{\partial x_k} \tag{9}$$

Модель для турбулентной диффузии ε_{ii} строим по аналогии с (9) с учетом построения уравнения переноса диссипации в k-ε модели:

$$Diff_{turb}\left(\varepsilon_{0ii}\right)=\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{C_\varepsilon}C_{Diff}\,f_0\,\frac{k_0}{\varepsilon_0}\overline{u_{0k}^2}\,\frac{\partial \varepsilon_{0ii}}{\partial x_k}. \tag{10}$$

В итоге модель переноса корреляции $\overline{u_{i0}^2}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{D\overline{u_{0i}^2}}{Dt}=f_0\left(\nu\dfrac{\partial^2 \overline{u_{0i}^2}}{\partial x_i \partial x_i}+Diff_{turb}\left(\overline{u_{0i}^2}\right)\right)+f_0\left(P_{ii}-C_a\dfrac{\varepsilon_0}{k_0}\left(\overline{u_{0i}^2}-\dfrac{2}{3}k_0\right)\right)-\varepsilon_{0ii}, \\ \dfrac{D\varepsilon_{0ii}}{Dt}=f_0\left(\nu\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{0ii}}{\partial x_k \partial x_k}+Diff_{turb}\left(\varepsilon_{0ii}\right)\right)+\dfrac{\varepsilon_0}{k_0}\left[C_1 f_0\left(P_{ii}-C_a\dfrac{\varepsilon_0}{k_0}\left(\overline{u_{0i}^2}-\dfrac{2}{3}k_0\right)\right)-C_2\varepsilon_{0ii}\right]. \end{cases} \tag{11}$$

Турбулентную диффузию вычисляем согласно выражениям (9) и (10).

Теперь рассмотрим построение модели для переноса напряжений $\overline{u_i u_j}$ $(i \neq j)$. Здесь возникают некоторые отличия.

Во первых. Напряжение $\overline{u_i u_j}$ представляет собой энергию взаимодействия компонент пульсации. Эта энергия возникает только при наличии в течении конкретных пульсаций и не может передаваться по цепочке вихрей (первичные вихри, вторичные вихри и т.д.). По этой причине генерационный и перераспределительный члены на функцию f_0 умножать не надо.

Во вторых. Пристенное воздействие на генерационные процессы зависит от расстояния до стенки, что учитывается функцией φ. Удовлетворительной аппроксимацией для нее служит выражение $\varphi = 1 - f_0$.

В третьих. Как и в случае уравнений переноса $\overline{u_i u_i}$ для учета пристенных вязких воздействий умножаем диффузионные члены на f_0.

Собирая все аппроксимации вместе и приводя подобные, получаем:

$$\frac{D\overline{u_{0i}u_{0j}}}{Dt} = f_0\left(\nu\frac{\partial^2\overline{u_{0i}u_{0j}}}{\partial x_k\partial x_k} + Diff_{turb}\left(\overline{u_{0i}u_{0j}}\right)\right) + f_0P_{ij} - C_a\frac{\varepsilon_0}{k_0}\overline{u_{0i}u_{0j}}\,. \tag{12}$$

Турбулентная диффузия задается выражением (9).

Итоговая модель переноса турбулентных напряжений

Модель дополняется уравнениями переноса k_0 и ε_0. В итоге модель для расчета турбулентных напряжений имеет вид:

$$\frac{Dk_0}{Dt} = f_0\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu + D_k\right)\frac{\partial k_0}{\partial x_k} + f_0P - \varepsilon_0, \tag{13}$$

$$\frac{D\varepsilon_0}{Dt} = f_0\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu + \frac{D_k}{C_\varepsilon}\right)\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x_k} + \frac{\varepsilon_0}{k_0}\left(C_1f_0P - C_2\varepsilon_0\right), \tag{14}$$

$$\frac{D\overline{u_{i0}^2}}{Dt} = f_0\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu + D_k\right)\frac{\partial\overline{u_{i0}^2}}{\partial x_k} + f_0\left(P_{ii} - C_a\frac{\varepsilon_0}{k_0}\left(\overline{u_{i0}^2} - \frac{2}{3}k_0\right)\right) - \varepsilon_{ui0}, \tag{15}$$

$$\frac{D\varepsilon_{ui0}}{Dt} = f_0\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu + \frac{D_k}{C_\varepsilon}\right)\frac{\partial\varepsilon_{ui0}}{\partial x_k} + + \frac{\varepsilon_0}{k_0}\left(C_1f_0\left(P_{ii} - C_a\frac{\varepsilon_0}{k_0}\left(\overline{u_{i0}^2} - \frac{2}{3}k_0\right)\right) - C_2\varepsilon_{ui0}\right), \tag{16}$$

$$\frac{D\overline{u_{i0}u_{j0}}}{Dt} = f_0\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu + D_k\right)\frac{\partial\overline{u_{i0}u_{j0}}}{\partial x_k} + f_0P_{ij} - C_a\frac{\varepsilon_0}{k_0}\overline{u_{i0}u_{j0}}\,, \tag{17}$$

$$P_{ij} \equiv -\overline{u_{0i}u_{0k}}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_{0j}u_{0k}}\frac{\partial U_i}{\partial x_k},\; D_k = C_{Diff}f_0\frac{k_0}{\varepsilon_0}\overline{u_{0k}^2},\; P = 0.5\sum P_{ii}$$

Значения констант: $C_2 = 1.45$, $C_1 = 0.98C_2$, $C_a = 2.8$, $C_{Diff} = 0.26$, $C_\varepsilon = 1.3$.

Здесь D_k – коэффициент турбулентной диффузии в направлении x_k. Отметим, что уравнения переноса выписаны без учета воздействия массовых сил на турбулентность.

Дальнейшая конкретизация модели, зависит от физики процесса, формы записи уравнений переноса (параболическая или эллиптическая) и т.д. Форму записи функции f_0 выбираем в зависимости от геометрии расчетной области.

Приведем несколько конкретных примеров.

Решается задача конвекции у нагретой вертикальной плоскости, т.е. в течении присутствует единственная стенка. Уравнения записываются в параболической форме. Считается, что ось координат x_2 направлена перпендикулярно плоскости.

В этом случае рассчитываются турбулентные напряжения $\overline{u_0^2}$, $\overline{v_0^2}$ и $\overline{u_0 v_0}$.

Функция f_0 имеет вид:

$$f_0 = \left(1 - \exp\left(-\frac{\mathrm{Re}_{y0}}{5.5}\right)\right)\left(1 - \exp\left(-2.4\frac{x_2}{L_{\varepsilon 0}}\right)\right),\ \mathrm{Re}_{y0} = \frac{\sqrt{k_0}\,x_2}{\nu},\quad L_{\varepsilon 0} = \frac{k_0^{3/2}}{\varepsilon_0}.$$

Диффузией в продольном направлении пренебрегаем. Коэффициент турбулентной диффузии в поперечном направлении вычисляется как $D_2 = C_{Diff} f_0 \dfrac{k_0}{\varepsilon_0}\overline{v_0^2}$

Генерационные члены находятся согласно выражениям:

$$P_k = -\overline{u_0 v_0}\frac{\partial U}{\partial y} + \beta g \overline{u_0 t_0},\quad P_{uv} = -\overline{v_0^2}\frac{\partial U}{\partial y},\ P_u = -2\overline{u_0 v_0}\frac{\partial U}{\partial y},\ P_v = 0.$$

Еще пример. Рассчитывается двумерная задача вынужденной конвекции в замкнутой прямоугольной полости размерами $[0, H_x]\times[0, H_y]$, т.е. течение ограничено четырьмя стенками. Уравнения записываются в эллиптической постановке. Считаем, что U – скорость в направлении x, V – скорость в направлении y.

Из постановки задачи следует, что рассчитываются турбулентные напряжения $\overline{u_0^2}$, $\overline{v_0^2}$ и $\overline{u_0 v_0}$.

Функция f_0 учитывает наличие четырех стенок и имеет вид:

$$f_0 = \left(1 - \exp\left(-\frac{\mathrm{Re}_{1x0}}{5.5}\right)\right)\left(1 - \exp\left(-2.4\frac{x}{L_{\varepsilon 0}}\right)\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{\mathrm{Re}_{2x0}}{5.5}\right)\right)\left(1 - \exp\left(-2.4\frac{H_x - x}{L_{\varepsilon 0}}\right)\right)\times$$

$$\times\left(1 - \exp\left(-\frac{\mathrm{Re}_{1y0}}{5.5}\right)\right)\left(1 - \exp\left(-2.4\frac{y}{L_{\varepsilon 0}}\right)\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{\mathrm{Re}_{2y0}}{5.5}\right)\right)\left(1 - \exp\left(-2.4\frac{H_y - y}{L_{\varepsilon 0}}\right)\right),$$

$$\mathrm{Re}_{1x0} = \frac{\sqrt{k_0}\,x}{\nu}, \mathrm{Re}_{2x0} = \frac{\sqrt{k_0}\,(H_x - x)}{\nu},\ \mathrm{Re}_{1y0} = \frac{\sqrt{k_0}\,y}{\nu}, \mathrm{Re}_{2y0} = \frac{\sqrt{k_0}\,(H_y - y)}{\nu},\ L_{\varepsilon 0} = \frac{k_0^{3/2}}{\varepsilon_0}.$$

Коэффициент турбулентной диффузии в X направлении вычисляется как

$$D_1 = C_{Diff} f_0 \frac{k_0}{\varepsilon_0}\overline{u_0^2},$$

в Y направлении:

$$D_2 = C_{Diff} f_0 \frac{k_0}{\varepsilon_0} \overline{v_0^2} .$$

Генерационные члены находятся согласно выражениям:

$$P_k \equiv -\overline{u_0^2} \frac{\partial U}{\partial x} - \overline{u_0 v_0} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \overline{v_0^2} \frac{\partial V}{\partial y} , \; P_{uv} \equiv -\overline{u_0^2} \frac{\partial V}{\partial x} - \overline{v_0^2} \frac{\partial U}{\partial y} ,$$

$$P_u \equiv -2\overline{u_0^2} \frac{\partial U}{\partial x} - 2\overline{u_0 v_0} \frac{\partial U}{\partial y} , \; P_v \equiv -2\overline{u_0 v_0} \frac{\partial V}{\partial x} - 2\overline{v_0^2} \frac{\partial V}{\partial y} .$$

Выводы

В работе предложены модели для расчета турбулентных напряжений турбулентных тепловых потоков. Расчеты с использованием этих моделей продемонстрировали удовлетворительное соответствие с экспериментальными и расчетными данными разных авторов. Но в то же время необходимо добавить следующее. Как показывают расчеты, модели $k-\varepsilon$ типа, как правило, достаточно быстро выходят на правильное решение. Результаты расчетов весьма слабо зависят от начальных условий. В то же время описанная модель очень чувствительна по отношению к начальным условиям расчета. При незначительных погрешностях в начальных условиях расчеты по данной модели могут стабилизироваться в месте, резко отличающемся от верного решения. Здесь погрешности нужно понимать как отличие начальных условий от предполагаемых результатов расчетов по данной модели, а не отличие от экспериментальных данных. По этой причине к результатам расчетов по этой модели новых, плохо исследованных процессов нужно относиться с осторожностью.

В то же время необходимо отметить следующий факт. В литературе неоднократно отмечались большие сложности, возникающие при численном решении дифференциальных уравнений моделей турбулентности даже $k-\varepsilon$ типа (см. например Кастро [8]), т.е. систем, содержащих всего четыре дифференциальных уравнения, а именно – уравнение переноса импульса, уравнение неразрывности и два уравнения модели. Вышеописанная модель требует решения системы из 9 нелинейных дифференциальных уравнений, а именно – уравнения переноса импульса, уравнения переноса тепловой энергии, уравнения неразрывности, по два уравнения для описания переноса k, $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, а также уравнение для описания переноса $\overline{uv}$. Разнообразные проблемы, возникающие в процессе решения, просто огромны.

Литература

1. Golovnya B.P. Modelling of the fluctuating component in the form of the sum of an infinite number of random quantities// Int.J. of Heat and Mass Transf. - V 52 - 2009 - pp.5218-5228
2. Golovnya B.P. Modelling of the fluctuating component in the form of the sum of an infinite number of random quantities. Part 2. Model of transfer of turbulent stresses and turbulent heat fluxes// Int.J. of Heat and Mass Transf. - V. 52 – 2009 - pp. 5229-5240
3. Головня Б.П. Некоторые систематические ошибки в моделях пристенной турбулентности. Тезисы XIII международной научно-технической конференции «Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования» 24-29 сентября 2012 г., г. Харьков, Украина
4. Ротта И.К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости.-Л.:-Судостроение-1967.
5. *Hanjalic K., Launder B.E.* Contribution towards a Reynolds-stress closure for a low-Reynolds-number turbulence. // J. of Fluid Mech. - 1976. - V.74. - P.593-610.

6. *Rodi W.* On the equation governing the rate of turbulent energy dissipation.// Imperial College, Mech.Eng.Rep. TWF/TN/A/14. - 1971.
7. *Daly B.J., Harlow F.H.* Transport equations of turbulence // Phys. Fluids – 1970 – V.13 – P.26-34.
8. *Кастро И. П.* Трудности при численном расчете сложных турбулентных течений. // В кн.: Турбулентные сдвиговые течения 1. М.: Машиностроение – 1982 - С.227-246.

Стаття надійшла _16_._09_._2014___

Прийнято до друку _07_._10_._2014___

Анотація

Б.П. Головня

Модель переносу турбулентних напруг

Автором була запропонована модель турбулентності, що заснована на концепції турбулентної в'язкості, яка коректно відтворює каскадний процес. Обчислювальні експерименти показали, що її можливості обмежені. У даній роботі пропонується модель переносу турбулентних напруг.

Ключові слова: *моделювання турбулентності, RANS моделі, моделі переносу турбулентних напруг..*

Summary

B.P.Golovnya

Model of turbulent stresses transfer

The new model of turbulence was offered by author in previous works. This model bases on turbulent viscosity conception and correctly reproduces cascade transfer process. Calculations show that possibilities of this model are restricted. In given work model of turbulent stresses transfer is offered.

Key words: *turbulence modeling, RANS models, transport turbulent stress.*