СЕКЦІЯ «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

УДК 514.182 **С.В. Залевський**

МОДЕЛЮВАННЯ ЧАРУНКИ КООРДИНАТНОЇ СІТКИ U І V ПОВЕРХНЕЮ КУНСА І ПОБУДОВА ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ

Розглядається питання моделювання чарунки координатної сітки поверхнею Кунса, як один із засобів універсального методу геометричного і технологічного опрацювання поверхонь, визначенних упорядкованним каркасом точок. Запропоновано алгоритм побудови геодезичних ліній на поверхні.

Ключові слова – *точковий каркас, поверхня Кунса, сітка, чарунка, лінійна інтерполяція, геодезична, паралельне перенесення вектора.*

Вступ

Велике різномаїття поверхонь технічних форм і способів їх задання породжує і велику кількість розрахункових алгоритмів та програм, що, в свою чергу, створює певні труднощі при розв'язанні інженерно-геометричних задач.

Найбільш універсальним способом задання поверхні, максимально незалежним від варіанту її утворення є задання поверхні упорядкованим каркасом точок. Ці точки є вершинами криволінійних координатних чотирикутників на які координатна сітка u і v розбиває поверхню $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$.

Мета статті

Метою даної роботи є аналітичне представлення відсіків незакономірної поверхні, заданої упорядкованим каркасом точок, поверхнями Кунса. Це дозволяє здійснювати розв'язок інженерно геометричних задач, зокрема будувати геодезичні лінії на поверхні. Вони можуть бути використані для обробки поверхні на станках з ЧПУ, так як робочий орган має рухатися по найкоротших траєкторіях на поверхні.

Виклад основного матеріалу

Нехай незакономірна поверхня задана каркасом опорних точок - вершин криволінійних чотирикутників, на які координатна сітка u і v розбиває поверхню (Рис.1).

Розглянемо криволінійний чотирикутник, визначений точками $A_{i,j}, A_{i+1,j}, A_{i,j+1}, A_{i+1,j+1}$. Уведемо на ньому власну систему криволінійних координат u,v, де $0 \le u,v \le 1$, таким чином, щоб точка $A_{i,j}$ мала криволінійні координати $(0,0), A_{i+1,j}(1,0), A_{i,j+1}(0,1), A_{i+1,j+1}(1,1)$ (Рис. 2).

Тоді рівняння граничних прямих $A_{i,j}, A_{i+1,j}$ і $A_{i,j+1}, A_{i+1,j+1}$ - координатних ліній $u \quad (v = const)$ запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \vec{r}(u,0) &= (1-u)\cdot\vec{r}(0,0) + u\cdot\vec{r}(1,0) \\ \vec{r}(u,1) &= (1-u)\cdot\vec{r}(0,1) + u\cdot\vec{r}(1,1) \end{aligned},$$

де $\vec{r}(0,0), \vec{r}(0,1), \vec{r}(1,0), \vec{r}(1,1)$ радіуси-вектори вершин криволінійного чотирикутника.

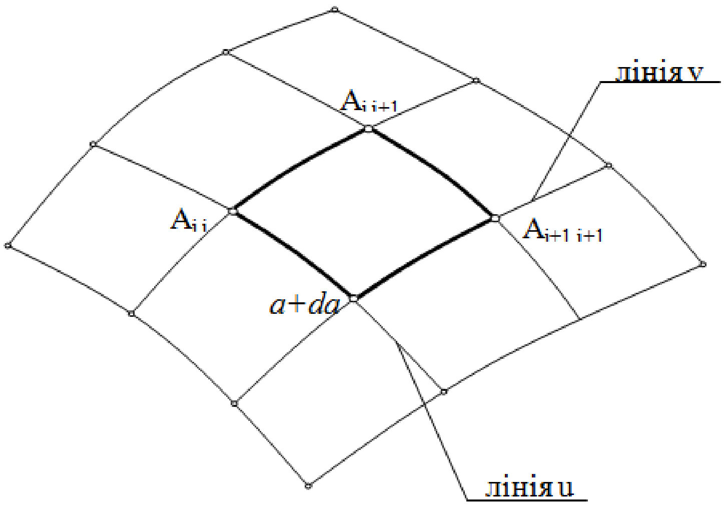

Рис. 1 Визначення чарунки координатної сітки u і v на поверхні

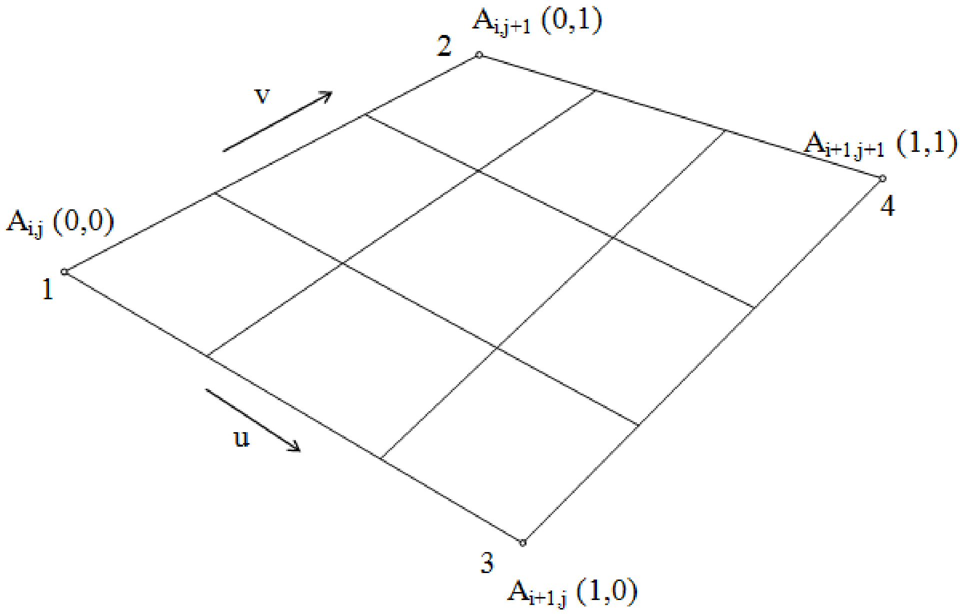

Рис. 2 Моделювання чарунки координатної сітки u і v поверхнею

Лінійна інтерполяція в напрямі v матиме вигляд:

$$\vec{r}(u,v)=(1-v)\cdot\vec{r}(u,0)+v\cdot\vec{r}(u,1)=$$
$$=(1-u)\cdot(1-v)\cdot\vec{r}(0,0)+(1-v)\cdot u\cdot\vec{r}(1,0)+v\cdot(1-u)\cdot\vec{r}(0,1)+u\cdot v\cdot\vec{r}(1,1)$$

Остаточно рівняння відсіку поверхні Кунса з граничними прямолінійними відрізками матиме вигляд:

$$\vec{r}(u,v)=\vec{r}(0,0)+(\vec{r}(1,0)-\vec{r}(0,0))\cdot u+(\vec{r}(0,1)-\vec{r}(0,0))\cdot v+ \tag{1}$$
$$+(\vec{r}(0,0)+\vec{r}(1,1)-\vec{r}(0,1)-\vec{r}(1,0))\cdot u\cdot v$$

або в координатній формі:

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 + (x_3 - x_1)\cdot u + (x_2 - x_1)\cdot v + [(x_4 - x_3) + (x_2 - x_1)]\cdot u \cdot v \\
y &= y_1 + (y_3 - y_1)\cdot u + (y_2 - y_1)\cdot v + [(y_4 - y_3) + (y_2 - y_1)]\cdot u \cdot v \\
z &= z_1 + (z_3 - z_1)\cdot u + (z_2 - z_1)\cdot v + [(z_4 - z_3) + (z_2 - z_1)]\cdot u \cdot v
\end{aligned}
\tag{2}
$$

де x_i, y_i, z_i (i=1,2,3,4)- координати вершин криволінійного чотирикутника $A_{i,j}, A_{i+1,j}, A_{i,j+1}, A_{i+1,j+1}$ відповідно.

Для скорочення запису рівнянь (2) і зручності їх практичного використання покладемо:

$$
\begin{array}{lll}
a_1 = x_2 - x_1 & a_2 = y_2 - y_1 & a_3 = z_2 - z_1 \\
b_1 = x_3 - x_1 & b_2 = y_3 - y_1 & b_3 = z_3 - z_1 \\
c_1 = (x_4 - x_3) - (x_2 - x_1) & c_2 = (y_4 - y_3) - (y_2 - y_1) & c_3 = (z_4 - z_3) - (z_2 - z_1)
\end{array}
$$

Тоді рівняння (2) перепишуться у вигляді:

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 + b_1\cdot u + a_1\cdot v + c_1\cdot u\cdot v, \\
y &= y_1 + b_2\cdot u + a_2\cdot v + c_2\cdot u\cdot v, \\
z &= z_1 + b_3\cdot u + a_3\cdot v + c_3\cdot u\cdot v.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Розглянемо побудову геодезичної лінії на поверхні (3), використавши наступну її властивість: дотична до геодезичної лінії при її паралельному перенесенні уздовж неї залишається дотичною.

Напрям геодезичної лінії будемо визначати відношенням диференціалів криволінійних координат $du : dv$, або $dv : du$ в заданій точці $M_0(u_0, v_0) = M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Тоді напрямний вектор геодезичної матиме вигляд $d\vec{r} = r_t du + r_s dv$. Його координати:

$$l_t = x_u du + x_v dv \ ,$$

$$m_t = y_u du + y_v dv \ ,$$

$$n_t = z_u du + z_v dv \ ,$$

де $x_u = b_1 + c_1 v$, $x_v = a_1 + c_1 u$, $y_u = b_2 + c_2 v$, $y_v = a_2 + c_2 u$, $z_u = b_3 + c_3 v$, $z_v = a_3 + c_3 u$.

Нормаль $\vec{N}(l_n, m_n, n_n)$ до поверхні в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має координати

$$l_n = y_u z_v - y_v z_u \ ,$$

$$m_n = x_v z_u - x_u z_v \ ,$$

$$n_n = x_u y_v - x_v y_u \ .$$

Нормальна площина в напрямі $d\vec{r}$ матиме рівняння

$$a_n x + b_n y + c_n z + d_n = 0, \tag{4}$$

де $a_n = m_n n_t - m_t n_n$, $b_n = l_t n_n - l_n n_t$, $c_n = l_n m_t - l_t m_n$, $d_n = -(x_0 a_n + y_0 b_n + z_0 c_n)$.

Для обчислення точки геодезичної лінії на заданій відстані l від початкової точки M_0 знаходимо точку перетину площини (4) з координатною лінією $u_1 = u_0 + du$ і

$$v_1 = -\frac{a_n(x_1 + b_1 u_1) + b_n(y_1 + b_2 u_1) + c_n(z_1 + b_3 u_1) + d_n}{a_n(a_1 + c_1 u_1) + b_n(a_2 + c_2 u_1) + c_n(a_3 + c_3 u_1)} \tag{5}$$

Обчислимо відстань dl між точками $M_0(u_0, v_0)$ і $M_1(u_1, v_1)$.

$$dl_1 = \sqrt{(x_0 - x_{M_1})^2 + (y_0 - y_{M_1})^2 + (z_0 - z_{M_1})^2} \tag{6}$$

Якщо $dl > l$, то знаходимо точку M_p на хорді $M_0 M_1$, за формулою

$$u_p = \frac{l}{dl}(u_1 - u_2) + u_0 \tag{7}$$

Обчислюємо точку M_p перетину площини (4) з координатною лінією u_p і знаходимо відстань dl_2 між точками M_0 і M_k. Якщо $dl_2 > l$, то повторюючи обчислення (5), (6) і (7), з находимо dl_3 і так далі, аж доки $dl_n < l$. Останнє значення u_p вибираємо як u_1 шуканої точки M_1. Переносимо напрям $\vec{l} = (l_t, m_t, n_t)$ паралельно на поверхні із точки M_0 в точку M_1.

Розглянемо паралельне перенесення вектора на поверхні, яке є природнім узагальненням паралельного перенесення вектора на площині.

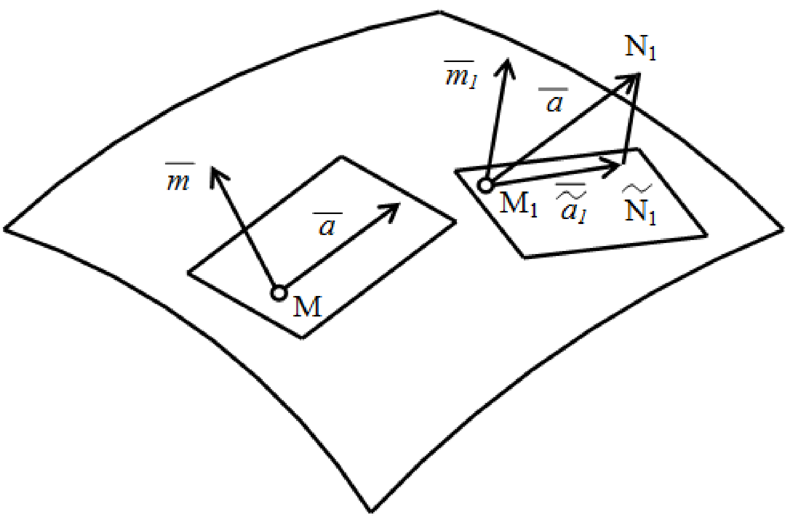

Рис. 3 Паралельне перенесення вектора на поверхні.

Нехай в точці $M(u^1, u^2)$ поверхні $d\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$ заданий вектор $\vec{a}$, який належить поверхні, тобто розміщений у дотичній площині Σ до поверхні в точці M. Перенесемо вектор $\vec{a}$ паралельно у звичайному сенсі у нескінченно близьку точку $M_1\left(u^1+du^1,u^2+du^2\right)$. Він займе деяке положення $\overrightarrow{MN}$ і уже не буде належати поверхні, „зійде" з поверхні. Щоб опустити вектор $\overrightarrow{M_1N_1}$ на поверхню, спроекціюємо його ортогонально на дотичну площину, проведену в точці M_1. Саме цей вектор $\overrightarrow{M_1\widetilde{N}_1}=\vec{\widetilde{a}}$ вважають вектором, одержаним паралельним перенесенням вектора $\vec{a}$ на поверхні із точки M у нескінченно близьку точку M_1 (Рис. 3).

Якщо $\overrightarrow{m_1}$ одиничний вектор нормалі до поверхні в точці M_1, то $\vec{\widetilde{a}}=\vec{a}-\overrightarrow{m_1}\left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{m_1}\right)$. Так як $\overrightarrow{m_1}=\vec{m}+d\vec{m}$, де $\vec{m}$ - одиничний вектор нормалі до поверхні в точці M, а $d\vec{m}$ - приріст, який отримав вектор $\overrightarrow{m}$ при переміщенні із точки M в нескінченно близьку точку поверхні M_1, то

$$\left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{m_1}\right)=\left(\vec{a}\left(\vec{m}+d\vec{m}\right)\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{m}\right)+\left(\vec{a}\cdot d\vec{m}\right)=\left(\vec{a}\cdot d\vec{m}\right),\ \text{бо}\ \left(\vec{a}\cdot\vec{m}\right)=0\,.$$

Далі:

$$\overrightarrow{m_1}\cdot\left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{m_1}\right)=\left(\vec{m}+d\vec{m}\right)\cdot\left(\vec{a}\cdot d\vec{m}\right)=\vec{m}\cdot\left(\vec{a}\cdot d\vec{m}\right)+d\vec{m}\cdot\left(\vec{a}\cdot d\vec{m}\right)$$

Відкинувши нескінченно малу 2-го порядку, одержимо:

$$\overrightarrow{m_1}\cdot\left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{m_1}\right)=\vec{m}\cdot\left(\vec{a}\cdot d\vec{m}\right)\ \text{і}\ \vec{\widetilde{a}}=\vec{a}-\vec{m}\cdot\left(\vec{a}\cdot d\vec{m}\right).$$

Таким чином, для паралельного перенесення вектора $\vec{a}$ на поверхні із точки M поверхні у нескінченно близьку точку M_1, необхідно після звичайного паралельного перенесення вектора $\vec{a}$ впросторі відняти складову по нормалі $\vec{a}$ в точці M.

Проведемо на поверхні через точку М довільну криву γ : $u^1=u^1(t),u^2=u^2(t)$. При переміщенні вектора $\vec{a}$ по кривій γ із точки М у нескінченно близьку точку М1 він отримає приріст $\vec{a}+d\vec{a}$. Відкладемо вектор $\vec{a}+d\vec{a}$ в точці М і розкладемо його на складові: одну в дотичній площині Σ –тангенціальну складову $\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)^{\tau}$, а другу - направлену паралельно нормалі $\vec{m}$ в точці М — нормальну складову (Рис. 4).

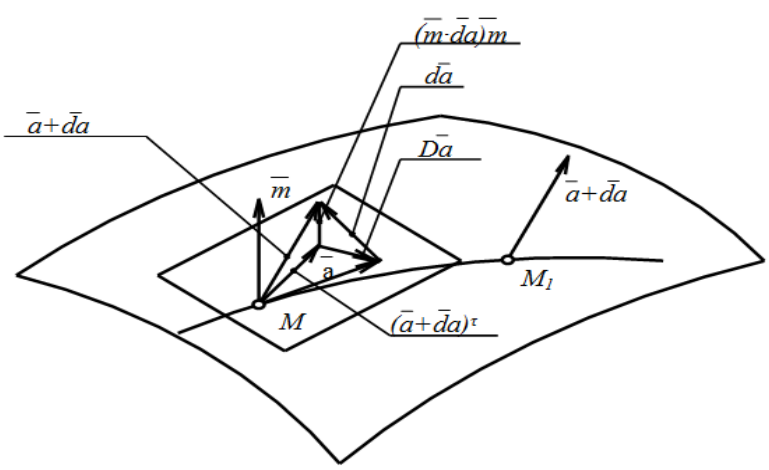

Рис.4 Геометрична інтерпретація абсолютного диференціала $D\bar{a}$

Нормальна складова має вигляд:

$$\left(\vec{m}\cdot\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)\right)\cdot\vec{m}=\left(\left(\vec{m}\cdot\vec{a}\right)+\left(\vec{m}d\vec{a}\right)\right)\cdot\vec{m}=\left(\vec{m}\cdot d\vec{a}\right)\cdot\vec{m},.$$

Віднявши від вектора $\vec{a}+d\vec{a}$ нормальну складову , одержимо його тангенціальну складову $\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)^{\tau}=\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)-\left(\vec{m}\cdot d\vec{a}\right)\vec{m}$, тобто вектор одержаний проекціюванням вектора $\vec{a}+d\vec{a}$ на дотичну площину до поверхні в точці *M*. Позначимо різницю між вектором $\vec{a}$ і $\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)^{\tau}$ через $D\vec{a}$. Цю різницю називають абсолютним (коваріантним) диференціалом вектора $\vec{a}$, який відповідає переміщенню вектора $\vec{a}$ із точки *M* у нескінченно близьку точку M_1 по кривій γ. Абсолютний диференціал розміщений у дотичній площині до поверхні в точці *M*. Як видно із рис. 4 він є ортогональною проекцією повного диференціала $d\vec{a}$ на дотичну площину в точці *M*.

Якщо $D\vec{a}=0$, то тангенціальна складова $\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)^{\tau}$ збігається з вихідним вектором $\vec{a}=\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)^{\tau}$. Очевидно, рівність $D\vec{a}=0$ можлива лише у випадку, якщо повний диференціал $d\vec{a}$ направлений по нормалі $\vec{m}$ до поверхні в точці *M*. Тоді при проекціюванні вектора $\left(\vec{a}+d\vec{a}\right)$ на дотичну площину в точці *M* ми одержимо вектор $\vec{a}$. А це означає, що вектор $\vec{a}+d\vec{a}$ є вектор $\vec{a}$ паралельно перенесений по кривій γ на поверхні із точки *M* у нескінченно близьку точку M_1. Таким чином, щоб паралельно перенести вектор $\vec{a}$ із точки *M* в нескінченно близьку точку M_1, необхідно у дотичній площині до поверхні в точці M_1 провести вектор $\vec{\tilde{a}}$, який ортогонально проекціюється на дотичну площину в точці *M* у вектор $\vec{a}$.

Використовуючи цей факт запропонуємо алгоритм побудови вектора, паралельно перенесеного із точки *M* в точку M_1.

Проекціюємо ортогонально точку M_1 на дотичну площину Σ до поверхні в точці M .

Із проекції M'_1 точки M_1 проводимо вектор $\vec{a}'_1$, паралельний вектору $\vec{a}_1$. Цей вектор є проекцією вектора, перенесеного паралельно із точки M в точку M_1.

У дотичній площині до поверхні в точці M_1 за проекцією $\vec{a}'_1$ і напрямом ортогонального проекціювання до площини Σ будуємо вектор $\vec{a}_1$, рівний за довжиною вектору $\vec{a}$.

Цей вектор вибираємо за новий напрям геодезичної лінії в точці M_1. Далі повторюємо попережні обчислення і знаходимо точку M_2 геодезичної і т. д.

Процес побудови закінчується при досягненні границі чарунки. В результаті, ми одержали геодезичну лінію, задану точками, розміщеними на однаковій відстані l одна від одної.

Очевидно, запропонований спосіб може бути використаний для побудови геодезичної лінії на довільній поверхні, рівняння якої має вигляд $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$.

Висновки

Запропоновано спосіб моделювання відсіку поверхні, заданої каркасом точок, поверхнею Кунса. Розглянуто питання визначення початкового напряму геодезичної лінії і алгоритм побудови точок геодезичні лінії із заданим кроком.

Література

1. Ванин В.В. Геометрическое моделирование и построение разверток тканных покрытий неразвертывающихся поверхностей: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук // Киев, 1971.
2. Залевський С.В. Геометричне моделювання тканинних наповнювачів текстолітових конструкцій технічних виробів: дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук // Київ, 2011.
3. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей. ч.1,2. / Каган В.Ф. // М-Л.,ГИТТЛ, 1947-1948г.
4. Залевський С.В. Геометричне моделювання формоутворення оболонок нерозгортних поверхонь, виготовлених із композиційних матеріалів на тканинній основі / Залевський С.В. // Праці ТДАУ – вип.. 4, т57.- Мелітополь, 2013 .-с. 100-103.

Стаття надійшла _08_._09_._2014___
Прийнято до друку _14_._11_._2014___

Аннотация

Залевский С.В.
Моделирование ячейки координатной сетки U и V поверхностью Кунса и построение геодезических линий

Предложен способ моделирования участка поверхности, заданной упорядоченным каркасом точек, поверхностью Кунса с граничными прямолинейными отрезками. Рассматривается вопрос определения начального направления геодезической линии. Построение геодезической линии базируется на ее свойстве: касательная к геодезической при ее параллельном перенесении остается касательной. Предложен алгоритм построения вектора, параллельно перенесенного из точки M в точку M_1. Рассмотрен вопрос геометрической интерпретации абсолютного диференциала вектора. Приводится алгоритм построения точек геодезической линии с заданным шагом до пересечения с границей ячейки Кунса.

Ключевые слова: *Каркас точек, поверхность Кунса, сетка, ячейка, линейная интерполяция, геодезическая линия, параллельное перенесение вектора.*

Summary

S. V. Zalevsky
Accuracy estimation of approximation of surface specified by systematized point frame

Suggested a method of modeling of the surface area, given an ordered by framework points of Coons surface with of boundary line segments. The question of determining the initial direction of the geodesic line. The construction of a geodesic is based on its properties: the tangent to the geodesic at its parallel displacement remains tangent. An algorithm for constructing a vector parallel to the suffering of the point M to the point M_1. The question of the geometric interpretation of the absolute differential locks vector. An algorithm for constructing geodesic points at a predetermined pitch to the intersection with the boundary of the cell Koons.

Key words: *point frame, of surface Koons, grid, cell, linear interpolation, the geodesic line, arallel displacement vector.*