потенціальний рух рідини. Акустичні задачі моделюються на основі рівняння Гельмгольца. У даній роботі розглянуто особливості використання чисельно-аналітичного методу для рівнянь Лапласа та Гельмгольца.. Звуковий потенціал є швидко осцилюючою функцією, заданою на границі розрахункової області. До того ж, представлено особливості чисельно-аналітичного методу для рівняння Лапласа з використанням розвинення граничної умови в ряд Тейлора за вланими функціями задачі Штурма-Ліувілля. Не зважаючи на те, що дані, присутні у даній роботі, отримані для канонічних областей, схема методумає на увазі його використання для довільної криволінійної границі області. Чисельно-аналітичний метод, запропонований в даній роботі, дозволяє малими розрахунковими затратами чисельно розв'язувати задачі для рівняння Лапласа і акустичні рівняння. Результати даних досліджень можуть бути використані у якості нових інформаційних технологій для захисту оточуючого середовища.

Мета статті. *Метою статті є вивчення та розвиток застосування чисельно-аналітичного методу для граничних задач зі швидко-осцилюючими функціями, які задані на границі області.*

Висновки. *У даній роботі запропоновано алгоритм застосування чисельно-аналітичного методу для рівнянь Лапласа та Гельмгольца у випдку швидко осцилюючих функцій на границі. Виконано порівняння збіжності чисельного розв'язку задачи з аналітичним. Встановлено оптимальну кількість розбиття сітки розрахункової області для досягнення оптимальної збіжності чисельного розв'язку до аналітичного. Розв'язано задачу виникнення звукового поля для критичного діапазону обтікання лопаті, де виникають ударні хвилі, що можуть спричинити руйнування лопаті. Це дослідження може стати у нагоді екологічної безпеки польотів на гелікоптерах. Як показали дані розрахунку, чисельно-аналітичний метод здатний з порівняно малими затратами розв'язати граничні задачі для рівняння Лапласа та Гельмгольца. Результати даних досліджень спрямовані на розв'язання задач екологічної безпеки водних та повітряних ресурсів Землі.*

Ключові слова: *комп'ютерне моделювання, чисельний метод, екологічний моніторінг оточуючого середовища.*

Одержано редакцією 17.09.2021 р.
Прийнято до публікації 24.11.2021 р.

УДК 378:517

DOI 10.31651/2076-5886-2021-1-22-32

PACS 02.60.-x

СЕРДЮК Зоя Олексіївна,
кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри математики та методики навчання математики, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
e-mail: serdyuk_z@ukr.net
ORCID: 0000-0002-9376-4346

ДЗЬОБА Микола Тарасович,
Національний університет «Львівська політехніка»
e-mail: mykola.lwiv@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ ІНСТРУМЕНТАРІЮ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИЧНОГО ТА МЕХАНІЧНОГО ЗМІСТУ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

У статті розглянуто семіотичні особливості вивчення математичних формул з курсу математичного аналізу, зокрема інтегрального числення; запропоновано закріплювати вивчені формули за трьома етапами (початковий, середній, заключний); показано застосування кожного *етапу на прикладі ряду завдань; враховано специфіку навчання математичному аналізу студентів спеціальностей 104 «Фізика та астрономія», 105 «Прикладна фізика та наноматеріали», 113 «Прикладна математика», 126 «Інформаційні системи та технології».*

Ключові слова: *математичний аналіз, семіотичний підхід, математичні формули, застосування інтегралів у задача з геометрії та механіки, студенти-фізики, студенти-програмісти.*

Постановка проблеми

Курс математичного аналізу є одним із основних курсів математичного циклу дисциплін, які вивчають як студенти математичних, так і фізичних, технічних, ІТ спеціальностей ЗВО. Він насичений великою кількістю досить складних математичних фактів (теорем, формул тощо). За нашими спостереженнями засвоєння та, найголовніше, застосування тих чи тих фактів у процесі розв'язування задач часто зумовлюють появу труднощів у студентів. Тому методика їх вивчення має будуватися як специфічна для такої категорії студентів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Питанням підвищення ефективності викладання курсу математичного аналізу та вдосконаленням методики його навчання студентів ЗВО присвячені роботи М. Бородіна, Л. Васяк, К. Власенко, М. Жалдак [1], Т. Крилової [2], О. Кондратьєвої [3], В. Клочка [4], І. Лов'янової, Т. Максимової, І. Михайлової, І. Михайленко, О. Потапової [5], С. Федорової, С. Федосєєва, Є. Ягової та ін.

Мета статті – розглянути особливості семіотичного компоненту навчання математичного аналізу, зокрема інтегрального числення та врахувати їх під час навчання студентів спеціальностей, як 104 «Фізика та астрономія», 105 «Прикладна фізика та наноматеріали», 113 «Прикладна математика», 126 «Інформаційні системи та технології», сформулювати відповідні рекомендації.

Виклад основного матеріалу

У Черкаському національному університеті імені Богдана Хмельницького навчальна дисципліна «Математичний аналіз» входить до циклу професійної підготовки зокрема студентів таких спеціальностей, як 104 «Фізика та астрономія», 105 «Прикладна фізика та наноматеріали», 113 «Прикладна математика», 126 «Інформаційні системи та технології». Ці дисципліни вивчаються у досить великому обсязі, як видно на рисунках 1-3. Крім того, цей предмет є важливим підґрунтям для подальшого вивчення дисциплін професійного спрямування за вказаними спеціальностями. Тому ґрунтовне вивчення саме даної дисципліни є важливим елементом подальшої професійної підготовки майбутніх фахівців з фізичних та ІТ-спеціальностей.

Оскільки вивчення математичного аналізу у зазначених спеціальностях розраховано на два семестри, то на другий семестр якраз припадає найбільший важіль – вивчення диференціального та інтегрального числення функцій кількох змінних (подвійні, потрійні інтеграли та їх застосування), криволінійні інтеграли 1-го та 2-го роду та їх застосування, поверхневі інтеграли 1-го та 2-го роду та їх застосування. Деякі особливості вивчення математичного аналізу студентами-фізиками та студентами-програмістами були нами описані у роботах [6-9] та ін. Проте комплексно методика вивчення математичного аналізу майбутніми фахівцями вищезазначених спеціальностей розглянута не була. Інструментарій математичного аналізу, зокрема інтегрального числення дуже потужний, тому й використання його під час розв'язання різних фізичних, математичних задач, завдань математичного моделювання, програмування може бути надзвичайно важливим. Тому студенти мають вільно володіти даним матеріалом, зокрема обирати серед багатьох й застосовувати саме ті математичні формули, за допомогою яких задача буде розв'язана якнайпростіше.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. ОБОВ'ЯЗКОВІ КОМПОНЕНТИ ОСВІТНЬО-ПРОФЕСІЙНОЇ ПРОГРАМИ											
1.1. Цикл професійної підготовки											
ОК 01	Інформатика	1			6	180	60	30	30		120
ОК 02	Програмування	1;2			12	360	120	60	60		240
ОК 03	Дискретна математика		2		5	150	50	24		26	100
ОК 04	Алгебра та геометрія	1;2			11	330	110	54		56	220
ОК 05	Програмне забезпечення та інформаційно-комунікаційні технології		2		5	150	50	20	30		100
ОК 06	Алгоритми та структури даних	3;4			12	360	120	60	60		240
ОК 07	Мови програмування	3;4			10	300	100	40	60		200
ОК 08	Математичний аналіз	4	3		10	300	100	48		52	200
ОК 09	Теорія ймовірностей та математична статистика		3		4	120	40	20		20	80
ОК 10	Архітектура обчислювальних систем	3			4	120	40	14	26		80
ОК 11	Веб-програмування	4			5	150	50	20	30		100
ОК 12	Об'єктно-орієнтоване програмування	5			6	180	60	20	40		120
ОК 13	Бази даних та інформаційні системи	5			6	180	60	20	40		120

Рис. 1. Фрагмент навчального плану спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології»

1. ОБОВ'ЯЗКОВІ КОМПОНЕНТИ ОСВІТНЬО-ПРОФЕСІЙНОЇ ПРОГРАМИ											
1.1. Цикл професійної підготовки											
ОК 01	Інформатика	1			6	180	60	30	30		120
ОК 02	Програмування	1;2			12	360	120	60	60		240
ОК 03	Дискретна математика		2		5	150	50	24		26	100
ОК 04	Алгебра та геометрія	1;2			11	330	110	54		56	220
ОК 05	Програмне забезпечення та інформаційно-комунікаційні технології		2		5	150	50	20	30		100
ОК 06	Алгоритми та структури даних	3;4			12	360	120	60	60		240
ОК 07	Мови програмування	3;4			10	300	100	40	60		200
ОК 08	Математичний аналіз	4	3		10	300	100	48		52	200
ОК 09	Теорія ймовірностей та математична статистика		3		4	120	40	20		20	80
ОК 10	Архітектура обчислювальних систем	3			4	120	40	14	26		80
ОК 11	Веб-програмування	4			5	150	50	20	30		100
ОК 12	Об'єктно-орієнтоване програмування	5			6	180	60	20	40		120
ОК 13	Бази даних та інформаційні системи	5			6	180	60	20	40		120
ОК 14	Методи обчислень	5			6	180	60	30	30		120

Рис. 2. Фрагмент навчального плану спеціальності 113 «Прикладна математика»

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. ОБОВ'ЯЗКОВІ КОМПОНЕНТИ ОСВІТНЬО-ПРОФЕСІЙНОЇ ПРОГРАМИ											
1.1. Цикл професійної підготовки											
ОК01	Вступ до фаху		1		6	180	60	20	20	20	120
ОК02	Вища математика	1;2;3			15	450	180	60		120	270
ОК03	Математичний аналіз	1;2			9	270	120	40		80	150
ОК04	Механіка	2			9	270	90	30	30	30	180
ОК05	Молекулярна фізика	3			9	270	90	30	30	30	180
ОК06	Електрика і магнетизм	4			9	270	90	30	30	30	180
ОК07	Оптика	5			6	180	90	30	30	30	90
ОК08	Фізика атома	6			6	180	90	30	30	30	90
ОК09	Фізика ядра і елементарних частинок	7			6	180	60	30		30	120
ОК10	Курсова робота з фаху			8	3	90					90
ОК11	Класична механіка	4			6	180	60	30		30	120

Рис. 3. Фрагмент навчального плану спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»

Виклад навчального матеріалу не варто будувати, спираючись лише на логіку розгортання змісту. Потрібно також враховувати й семіотичну його специфіку.

Особливої турботи викладача вимагає прогнозування утруднень та помилок, які виникають у студентів під час засвоєння теоретичного матеріалу та розв'язування задач. Опановуючи нові факти студенти-фізики дуже часто запам'ятовують лише їх оболонку. При цьому особливості змісту залишаються поза їх увагою. Згодом, на етапі засвоєння того чи того факту або його використання в конкретному завданні, у студентів виникають певні труднощі. Тому для ефективного засвоєння студентами математичних фактів необхідно приділяти спеціальну увагу процедурам упізнавання і розпізнавання. Першу з них ми пов'язуємо з візуальним аналізом, а другу – зі змістовим. Н. А. Тарасенкова [10] трактує візуальний аналіз як процес зорового упізнавання об'єкта засвоєння, а смисловий аналіз – як процес розпізнавання змісту. Своєю чергою, змістовий аналіз – це поєднання двох процесів: візуального й смислового аналізу. Як правило, візуальний аналіз опереджає в часі смисловий, однак іноді вони проходять одночасно. Проте діалектична єдність візуального і логічного не виключає появи протиріч між ними. Найчастіше такі протиріччя виникають у студентів на етапі первісного ознайомлення з об'єктом засвоєння. Виникнення конфліктів між візуальним і логічним у процесі вивчення математики студентами-фізиками доволі часто є неминучими. Однак, для того щоб уникати таких конфліктів, потрібно, щоб вони вміли вільно оперувати знаково-символічними оболонками тих чи тих об'єктів засвоєння та пов'язувати їх зі змістовими особливостями цих об'єктів.

Таким чином, пропонуємо поділити вивчення та засвоєння математичних формул на три умовних етапи: 1) 1 етап (*початковий*) – це звичайне упізнавання математичної формули серед схожих, тобто для цього використовуємо тестові завдання з вибором однієї правильної відповіді; 2) 2 етап (*середній*) – це вибір формули до певної математичної задачі серед інших, тобто є підказка; можна використовувати також тестові завдання з вибором однієї правильної відповіді або ж тестові завдання на відповідність; 3) 3 етап (*заключний*) – це розв'язування математичної задачі, вже без підказки, це завдання відкритої форми. Розглянемо завдання кожного етапу засвоєння математичних формул на прикладі різних тем інтегрального числення. Завдання можна формулювати у вигляді пошукових задач, квестів тощо для підвищення зацікавленості студентів.

Студенти саме зазначених спеціальностей (104 «Фізика та астрономія», 105 «Прикладна фізика та наноматеріали», 113 «Прикладна математика», 126 «Інформаційні системи та технології») вирізняються логічним складом мислення, структурованим та алгоритмічним підходом до виконання тих чи тих завдань, розвиненим візуальним сприйняттям. Крім того, вектор завдань, які ми пропонуємо як приклади для розв'язання, а саме застосування різних інтегралів до розв'язування задач з геометрії та механіки, можуть бути корисні для вищезазначених категорій студентів у їх подальшій професійній діяльності.

Завдання 1 етапу засвоєння

На цьому етапі доцільно засвоювати математичні формули спочатку всередині кожної теми (наприклад – подвійний інтеграл (*завдання 1*), криволінійний інтеграл 1–го роду (завдання 2)), потрійний інтеграл (*завдання 3*) тобто серед запропонованого набору схожих візуально формул, але в межах одного типу інтеграла студенти мають розпізнати потрібний їм. Тобто, вони не акцентують тут увагу на тип інтеграла, а лише на його змістове наповнення, на підінтегральний вираз.

Завдання 1. Для того, щоб отримати доступ до онлайн-аудиторії, необхідно розгадати п'ятизначний шифр кодового замка. Послідовно (не змінюючи порядку), треба набрати букви, які є правильними відповідями до наступних завдань.

1. Серед наведених нижче формул оберіть правильну (V – об'єм тіла).

A	B	C	D
$V=\iint\limits_D f(x;y)dxdy$	$V=\iint\limits_D dxdy$	$V=\iint\limits_D xdxdy$	$V=\iint\limits_D ydxdy$

2. Серед наведених нижче формул оберіть правильну (S – площа фігури).

A	B	C	D
$S=\iint\limits_D xdxdy$	$S=\iint\limits_D ydxdy$	$S=\iint\limits_D f(x;y)dxdy$	$S=\iint\limits_D dxdy$

3. Серед наведених нижче формул оберіть правильну (m – маса пластини, γ – густина пластини).

A	B	C	D
$m=\iint\limits_D \gamma dxdy$	$m=\iint\limits_D \gamma xdxdy$	$m=\iint\limits_D \gamma ydxdy$	$m=\iint\limits_D \gamma f(x;y)dxdy$

4. Серед наведених нижче формул оберіть правильну (S_x – статичний момент плоскої пластини щодо осі OX, γ – густина пластини).

A	B	C	D
$S_x=\iint\limits_D y\cdot\gamma(x;y)dxdy$	$S_x=\iint\limits_D x\cdot\gamma(x;y)dxdy$	$S_x=\iint\limits_D \gamma(x;y)dxdy$	$S_x=\iint\limits_D xydxdy$

5. Серед наведених нижче формул оберіть правильну (M_y – момент інерції плоскої пластини щодо осі OY, γ – густина пластини).

A	B	C	D
$M_y=\iint\limits_D x^2\gamma(x;y)dxdy$	$M_y=\iint\limits_D y^2\gamma(x;y)dxdy$	$M_y=\iint\limits_D \gamma(x;y)dxdy$	$M_y=\iint\limits_D x^2dxdy$

Завдання 2. Для того, щоб отримати розблокувати мобільний телефон необхідно розгадати чотиризначний шифр. Послідовно (не змінюючи порядку), треба набрати букви, які є правильними відповідями до наступних завдань.

1. Серед наведених нижче формул оберіть правильну (m – маса кривої, γ – густина кривої).

A	B	C	D
$m=\int\limits_{AB}\gamma(x;y)dl$	$m=\int\limits_{AB}x\gamma(x;y)dl$	$m=\int\limits_{AB}y\gamma(x;y)dl$	$m=\int\limits_{AB}xydl$

2. Серед наведених нижче формул оберіть правильну (l – довжина кривої).

A	B	C	D
$l=\int\limits_{AB}ydl$	$l=\int\limits_{AB}xdl$	$l=\int\limits_{AB}dl$	$l=\int\limits_{AB}xydl$

3. Серед наведених нижче формул оберіть правильну (S_y – статичний момент кривої щодо осі OY, γ – густина кривої).

A	B	C	D
$S_y = \int\limits_{AB} \gamma(x;y)dl$	$S_y = \int\limits_{AB} y\gamma(x;y)dl$	$S_y = \int\limits_{AB} x\gamma(x;y)dl$	$S_y = \int\limits_{AB} xy\gamma(x;y)dl$

4. Серед наведених нижче формул оберіть правильну (M_x – момент інерції кривої щодо осі OX, γ – густина кривої).

A	B	C	D
$M_x = \int\limits_{AB} x^2\gamma(x;y)dl$	$M_x = \int\limits_{AB} \gamma(x;y)dl$	$M_x = \int\limits_{AB} (x^2+y^2)\gamma(x;y)dl$	$M_x = \int\limits_{AB} y^2\gamma(x;y)dl$

Завдання 3. Домофон в будинку має тризначний код. Щоб його отримати, необхідно розв'язати наступні завдання. Послідовно (не змінюючи порядку), треба набрати букви, які й є правильними відповідями до запропонованих завдань.

1. Серед наведених нижче формул оберіть правильну (V – об'єм тіла).

A	B	C	D
$V = \iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz$	$V = \iiint\limits_V dxdydz$	$V = \iiint\limits_V xyzdxdydz$	$V = \iint\limits_S xydxdy$

2. Серед наведених нижче формул оберіть правильну (m – маса тіла, $\gamma(x;y;z)$ – об'ємна густина розподілу маси в точці $M(x;y;z)$).

A	B	C	D
$m = \iiint\limits_V x\gamma(x;y;z)dxdydz$	$m = \iiint\limits_V y\gamma(x;y;z)dxdydz$	$m = \iiint\limits_V \gamma(x;y;z)dxdydz$	$m = \iiint\limits_V dxdydz$

3. Серед наведених нижче формул оберіть правильну (I_{xy} – момент інерції тіла відносно площини XOY, $\gamma(x;y;z)$ – об'ємна густина розподілу маси в точці $M(x;y;z)$).

A	B	C	D
$I_{xy} = \iiint\limits_V \gamma(x;y;z)dv$	$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\gamma(x;y;z)dv$	$I_{xy} = \iiint\limits_V x^2\gamma(x;y;z)dv$	$I_{xy} = \iiint\limits_V y^2\gamma(x;y;z)dv$

Завдання 2 етапу засвоєння

На цьому етапі доцільно вже ускладнити завдання, тобто підвищити рівень знання та відтворення математичних формул. Доцільно запропонувати студентам дібрати до задачі математичну формулу, за допомогою якої її можна буде розв'язати, але серед запропонованих відповідей пропонувати вже різні типи інтегралів, а підінтегральну функцію, наприклад, зафіксувати, або ж ще ускладнити: змінювати і тип інтеграла і підінтегральну функцію, за бажанням викладача. Таким чином студенти візуально мають знайти потрібний їм інтеграл серед запропонованих (*завдання 4*).

Завдання 4. Дано астроїду $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. Розв'яжіть наступні завдання:

1. Серед наведених нижче формул оберіть ту, за допомогою якої можна обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою (S – площа фігури).

A	**B**	**C**	**D**
$S=\iint\limits_{D} dxdy$	$S=\iiint\limits_{D} dxdydz$	$S=\int\limits_{l} dl$	$S=\int\limits_{l} xdy$

2. Серед наведених нижче формул оберіть ту, за допомогою якої можна обчислити довжину астроїди (l – довжина кривої).

A	**B**	**C**	**D**
$l=\iint\limits_{D} dxdy$	$l=\iiint\limits_{V} dxdydz$	$l=\int\limits_{l} dl$	$l=\int\limits_{l} xdy$

3. Серед наведених нижче формул оберіть ту, за допомогою якої можна обчислити масу астроїди (m – маса кривої, γ – густина кривої).

A	**B**	**C**	**D**
$m=\int\limits_{l} y\gamma(x;y)dl$	$m=\int\limits_{l} x\gamma(x;y)dl$	$m=\int\limits_{l} dl$	$m=\int\limits_{l} \gamma(x;y)dl$

Завдання 3 етапу засвоєння

На цьому етапі вже доцільно пропонувати студентам розв'язувати комплексне завдання на знаходження площі, об'єму, маси, статичних моментів, моментів інерції, центрів ваги тощо. Під час виконання таких завдань студент повинен сам свідомо обрати тип інтеграла, який підходить до умови задачі та відповідну математичну формулу (*завдання 5 та завдання 6*). Проте перед виконанням такого завдання як узагальнення можна запропонувати повторити матеріал за відповідною схемою (рис. 4).

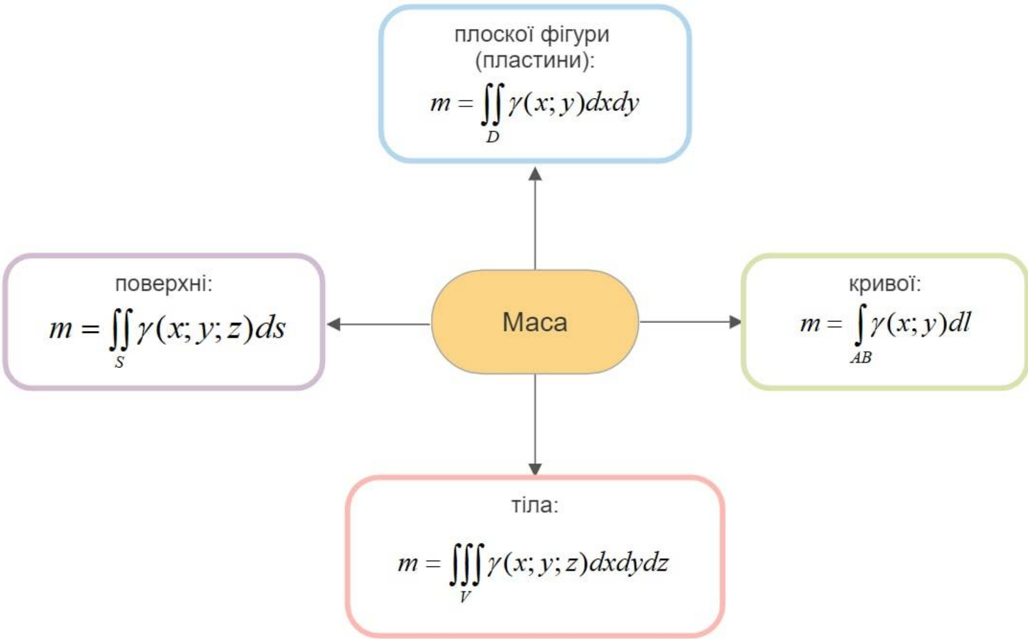

Рис. 4. Математичні формули для обчислення мас
(де γ – відповідно густина пластини, кривої тіла чи поверхні)

Завдання 5. Знайдіть центр ваги однорідного півкола, що лежить у верхній півплощині, якщо його густина $\gamma=1$ в кожній точці кривої.

Розв'язання. Найважливішим моментом розв'язування даної задачі є вдале розміщення даної кривої у системі координат. У даному випадку вказано, що півколо знаходиться у верхній півплощині. Крім цього, найкраще розмістити його так, щоб центр півкола співпадав з початком координат, а вісь ординат була віссю його симетрії (рис. 5).

Звідси з міркувань симетрії зрозуміло, що центр ваги даного півкола знаходиться на осі OY (див. рис. 5). Тому $x_c = 0$.

Ординату центру ваги знаходимо за формулою $y_c = \dfrac{\int\limits_{AB} y dl}{\int\limits_{AB} dl}$. Варто звернути увагу студентів на те, що оскільки ми працюємо з кривою, то інтеграли у даній формулі – криволінійні, 1-го роду. Знаменник даного дробу – це довжина півкола, її ми можемо знайти, використовуючи формулу довжини кола з планіметрії: $l = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R = \pi K$. А для обчислення чисельника скористаємося параметричними рівняннями кола, оскільки так знаходити інтеграл найзручніше: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \le t \le \pi$.

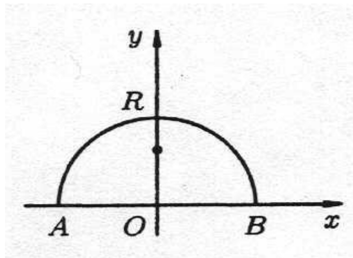

Рис. 5.

Маємо: $\int\limits_{AB} y \cdot dl = \int\limits_0^{\pi} R\sin \cdot \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} \cdot dt = R^2 \int\limits_0^{\pi} \sin t \cdot dt = 2R^2$.

Звідси : $y_c = \dfrac{2R^2}{\pi R} = \dfrac{2R}{\pi}$.

Тому остаточно координати центра ваги півкола: $x_c = 0,\ y_c = \dfrac{2R}{\pi}$.

Відповідь: $C\left(0; \dfrac{2R}{\pi}\right)$.

Завдання 6. Знайдіть центр ваги однорідного півкруга, що лежить у верхній півплощині, якщо його густина $\gamma = 1$ в кожній точці даної фігури.

Розв'язання. Аналогічно як і для попередньої задачі, головне – це вдале розміщення даної плоскої фігури у системі координат. Оскільки півкруг знаходиться у верхній півплощині, то найкраще розмістити його так, щоб центр співпадав з початком координат, а вісь ординат була віссю його симетрії (рис. 6).

Звідси з міркувань симетрії зрозуміло, що центр ваги даного півкруга знаходиться на осі OY (див. рис. 6). Тому $x_c = 0$.

Ординату центру ваги знаходимо за формулою $y_c = \dfrac{\iint\limits_D y dxdy}{\iint\limits_D dxdy}$. Варто звернути увагу студентів на те, що оскільки в цій задачі ми вже працюємо з плоскою фігурою, то інтеграли у даній формулі – подвійні.

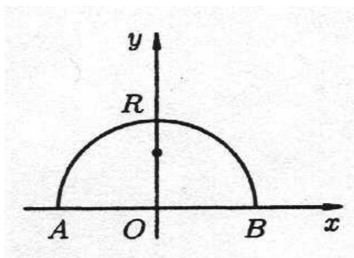

Рис. 6.

Знаменник даного дробу – це площа даної фігури, а саме площа півкруга, її ми можемо знайти, використовуючи формулу площі круга з планіметрії: $S = \frac{1}{2} \cdot \pi R^2 = \frac{\pi K^2}{2}$. А для обчислення чисельника скористаємося полярними координатами, оскільки так знаходити інтеграл найзручніше: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $0 \le r \le R$, $0 \le t \le \pi$.

Маємо: $\iint\limits_D y dx dy = R\int\limits_0^{\pi} \sin t dt \int\limits_0^{R} r dr = R\int\limits_0^{\pi} \sin t \cdot \frac{R^3}{3} dt = \frac{R^4}{3} \cdot \left(-\cos\pi + \cos 0\right) = \frac{2R^3}{3}$.

Звідси : $y_c = \frac{2 \cdot 2R^3}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$.

Тому остаточно координати центра ваги півкола: $x_c = 0,\ y_c = \frac{4R}{3\pi}$.

Відповідь: $C\left(0; \frac{4R}{3\pi}\right)$.

Висновки

Подальші дослідження ми бачимо у розробці такої ж системи завдань до кожної теми математичного аналізу з урахуванням специфіки підготовки майбутніх фахівців вищезазначених спеціальностей.

Список використаної літератури:

1. Жалдак М. І. Математичний аналіз з елементами інформаційних технологій: навчальний посібник / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, С. Я. Деканов. – К. : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2012. – 128 с.
2. Клочко В. І. Формування знань майбутніх інженерів з інформаційних технологій розв'язування диференціальних рівнянь : монографія / В. І. Клочко, З. В. Бондаренко. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 216 с.
3. Кондратьєва О. М. Методична система контролю і коригування знань та умінь студентів технічних спеціальностей у процесі навчання вищої математики : автореф. дис... канд. пед. наук : 13.00.02 – теорія та методика навчання математики / Оксана Марківна Кондратьєва ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 2007. – 20 с
4. Крилова Т. В. Наукові основи навчання математики студентів нематематичних спеціальностей (на базі металургійних, енергетичних і електромеханічних спеціальностей вищого закладу технічної освіти) : автореф. дис... д-ра пед. наук: 13.00.02; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 1999. – 36 с.
5. Потапова О. М. Аналіз дослідження труднощів студентів технічних спеціальностей при вивченні математичного аналізу / О. М. Потапова // Вісник Черкаського університету. Серія Педагогічні науки. – № 12 (265). – Черкаси, 2013. – С. 83–90.
6. Сердюк З. О., Христенко Т. М. Математичний тезаурус як інтелектуальний засіб навчання студентів фізичних спеціальностей ВНЗ. Засоби і технології сучасного навчального середовища // Матеріали всеукраїнської науково-практичної конференції (20 – 21 травня 2011 року, м. Кіровоград). – С. 78–79.
7. Сердюк З. О. Особливості вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз» для студентів фізичних спеціальностей ВНЗ / З. О. Сердюк // Актуальні проблеми і перспективи дидактики фізики // Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (26 – 28 квітня 2012 року, м. Черкаси). – Черкаси, ЧНУ ім. Б. Хмельницького. – С. 51–52.
8. Сердюк З. О. Реалізація компетентнісного підходу під час вивчення курсу математичного аналізу в ВНЗ. – Вісник Черкаського університету, Випуск № 8 (341): серія «Педагогічні науки». – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмель¬ницького, 2015. – С. 101-106.
9. Тарасенкова Н. А., Сердюк З. О. Особливості викладання курсу математичного аналізу для фахівців з аналізу даних. Вісник Черкаського університету. Серія "Прикладна математика. Інформатика". 2020. № 1. Черкаси : Вид. від. ЧНУ ім. Б.Хмельницького. С. 57-73. **Published:** Mar 18, 2021. DOI 10.31651/2076-5886-2020-1-77-86
10. Тарасенкова Н. А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики : [монографія] / Н. А. Тарасенкова. – Черкаси : Відлуння-плюс, 2002. – 400 с.

References:

1. Zhaldak, M., Mikhalin, G., Dekanov, S. (2012). Mathematical analysis with elements of information technology: [textbook] [in Ukrainian].
2. Klochko, V., Bondarenko, Z. (2010). Formation of knowledge of future engineers on information technologies for solving differential equations: [monograph] [in Ukrainian].
3. Kondratieva, O. (2007). Methodical system of control and correction of knowledge and skills of students of technical specialties in the process of learning higher mathematics: author. dis ... cand. ped. sciences: 13.00.02 - theory and methods of teaching mathematics [in Ukrainian].
4. Krylova, T. (1999). Scientific bases of teaching mathematics to students of non-mathematical specialties (based on metallurgical, energy and electromechanical specialties of higher technical education): author's ref. dis ... Dr. ped. Sciences: 13.00.02 [in Ukrainian].
5. Potapova, O. (2013). Analysis of the study of difficulties of students of technical specialties in the study of mathematical analysis. Bulletin of Cherkasy University. Pedagogical Sciences Series, 12 (265), 83–90 [in Ukrainian].
6. Serdiuk, Z. (2011). Mathematical thesaurus as an intellectual means of teaching students of physical specialties of higher education. Means and technologies of modern educational environment. Proceedings of the All-Ukrainian scientific-practical conference, 78–79 [in Ukrainian].
7. Serdiuk, Z. (2012). Peculiarities of studying the discipline "Mathematical analysis" for students of physical specialties of higher education. Actual problems and prospects of didactics of physics. Proceedings of the All-Ukrainian scientific-practical conference, 51–52 [in Ukrainian].
8. Serdiuk, Z. (2015). Implementation of the competence approach during the study of the course of mathematical analysis in higher education. Bulletin of Cherkasy University, 8 (341): series "Pedagogical Sciences", 101-106 [in Ukrainian].
9. Tarasenkova, N., Serdiuk, Z. (2020). Features of teaching a course of mathematical analysis for data analysis specialists. Bulletin of Cherkasy University. Series “Applied Mathematics. Informatics", 1, 57-73. Published: Mar 18, 2021. DOI 10.31651/2076-5886-2020-1-77-86
10. Tarasenkova, N. (2002). The use of sign-symbolic means in teaching mathematics: [monograph] [in Ukrainian].

SERDIUK Zoia,
PhD (Pedagogical Sciences), Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Learning of Mathematics, Cherkasy Bohdan Khmelnytsky National University
Dzoba Mykola,
Lviv Polytechnic National University

APPLICATION OF INTEGRAL NUMBERING TOOLS FOR SOLVING PROBLEMS OF GEOMETRIC AND MECHANICAL CONTENT FROM MATHEMATICAL ANALYSIS

Abstract. Introduction. *Mathematical analysis has powerful tools, especially in integral calculus, for solving a number of problems for application in geometry and mechanics. However, it is difficult for students to memorize a large number of complex mathematical formulas. In this article we propose to carry out a step-by-step mastering of mathematical formulas and give a number of tasks that can be used. The task is designed for visual perception and assimilation, as the semiotic component of learning qualitatively helps mechanical memorization and facilitates the application of the studied material to solve practical problems. This approach is aimed not only at memorizing the basic mathematical formulas for integral calculation of functions of one or more variables and using them to calculate the lengths of curves, areas, volumes, masses, moments of inertia and static moments, etc., but also the formation of students' ability to and consistently think, analyze, compare, summarize, etc., in general, the ability to draw the right conclusions and make realistic predictions, to apply the acquired knowledge, skills and abilities to solve various practical problems. However, the specifics of the organization of the study of mathematical analysis taking into account the peculiarities of the content of education specialties 104 "Physics and Astronomy", 105 "Applied Physics and Nanomaterials", 113 "Applied Mathematics", 126 "Information Systems and Technologies" is still not considered carefully enough and remains at the center of our research.*

Purpose *– consider the features of the semiotic component of teaching mathematical analysis, in particular integral calculus and take them into account when teaching students specialties such as 104 "Physics and Astronomy", 105 "Applied Physics and Nanomaterials", 113 "Applied Mathematics", 126 "Information Systems and Technologies", formulate appropriate recommendations.*

Originality. *In this article, taking into account the latest trends in educational policy and the specifics of training in specialties 104 "Physics and Astronomy", 105 "Applied Physics and Nanomaterials", 113 "Applied Mathematics", 126 "Information Systems and Technologies", namely - the trend towards algorithmization when solving certain practical problems, it is advisable to use visualization in the study of mathematical analysis by the above students – and during the assimilation of theoretical material, and when solving problems. We have identified three stages of mastering mathematical formulas and proposed a number of exercises.*

Conclusion. *We see further research in the development of the same system of tasks for each topic of mathematical analysis, taking into account the specifics of training future professionals in the above specialties.*

Keywords: *mathematical analysis, semiotic approach, mathematical formulas, application of integrals in the exercises of geometry and mechanics, physics students, programming students*

Одержано редакцією 26.08.2021 р.
Прийнято до публікації 27.10.2021 р.

УДК 519.688

DOI 10.31651/2076-5886-2021-1-32-49

PACS 02.70.-c

ПОРУБЛЬОВ Ілля Миколайович,
викладач, Черкаський національний
університет імені Богдана Хмельницького
e-mail: ilya@vu.cdu.edu.ua
ORCID: 0000-0001-7369-3862

ЩЕ ОДИН АЛГОРИТМ ПОШУКУ ЧИСЕЛ З МАКСИМАЛЬНОЮ КІЛЬКІСТЮ ДІЛЬНИКІВ (НА ОСНОВІ ІДЕЇ МНОЖИНИ НЕДОМІНОВАНИХ ПАР)

Ця стаття по суті є продовженням статті [6]. В ній розглянуто майже ту саму постановку задачі (пошук числа, що має максимальну кількість дільників серед всіх чисел проміжку, але цього разу лише від 1 до вказаного N, і треба шукати мінімальне з чисел, що мають цю максимальну кількість дільників). Попри схожість формулювань, запропоновано принципово інший спосіб розв'язання, що базується на введеному понятті недомінованих пар: пара (число, кількість його дільників) вважається недомінованою, якщо не існує менших чисел, що мали б більшу або рівну кількість дільників. Аналогічно [6], розглянуто узагальнення, коли максимальна кількість дільників шукається не серед усіх чисел проміжку, а лише серед не кратних деякому K (натуральному, більшому або рівному 2, не обов'язково простому).

Ключові слова: *кількість дільників, надскладені числа, недоміновані пари, впорядкована словникова структура даних, map, lower_bound, upper_bound.*

Вступ

Оскільки стаття є по суті продовженням [6], причини актуальності аналогічні — істотно різні кількості дільників у різних чисел, що впливає на тривалість роботи деяких алгоритмів. Використано спільну з [6] нумерацію: означення та твердження, що вже були там і виявилися важливими також і тут, повторені під ; самими номерами, а новим надані нові (не використані в [6]) номери.

Дотримано точки зору, що натуральними є цілі додатні числа (а 0 не є).

Означення 1. Будемо, згідно [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**], позначати кількість дільників числа n як $\tau(n)$.