

Purpose. *Approbation of the developed model. Demonstration of the possibilities of the approach to the construction of models of turbulence.*

Results. *By using the estimations of the model terms in the near-wall region and rejection of small ones, a simplified version of the turbulence model developed by the author was proposed. The simplified version makes it possible to simulate turbulence in the immediate the near-wall region, without taking into account the effect of the external flow. Furthermore. In the immediate vicinity of the wall, a simplified version allows an analytical solution that well corresponds to the experimental and simulation data of different authors. The numerical solution of the equations of the simplified model in a more extended region also corresponds well to a variety of data. Analysis of the results of calculations makes it possible to propose a new explanation of the behavior of turbulence in the near-wall region.*

*Одержано редакцією 07.09.2017 р.
Прийнято до публікації 25.09.2017 р.*

УДК 519.6:004.8, 536.24

PACS 02.60.-x, 02.60.Pn, 02.70.Wz,
51.20.+d, 82.40.Ck

ГОЛОВНЯ Борис Петрович

Черкаській національній університет
імені Богдана Хмельницького, д.т. н.,
доцент, завідувач кафедри прикладної
математики та інформатики
e-mail: bpgolovnya@gmail.com

ХАЙДУРОВ Владислав Володимирович

Київській міжнародній університет,
викладач кафедри комп'ютерних наук
e-mail: allif0111@gmail.com

ДЕЯКІ ШВИДКІСНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Анотація. *У статті проведений чисельний аналіз серії методів безумовної оптимізації на нелінійних задачах, які дають можливість зменшити час пошуку чисельного розв'язку великого класу нелінійних ОЗТ. Також у роботі запропоновані суттєві модифікації класичного методу Ньютона, які дають можливість отримати шуканий чисельний розв'язок нелінійних задач значно швидше у порівнянні з класичним методом Ньютона. Модифікації методу Ньютона зі змінним кроком дають значно швидшу збіжність та дають можливість отримати досить швидко розв'язки нелінійних ОЗТ.*

Ключові слова: *обернена задача теплопровідності (ОЗТ), пряма задача теплопровідності (ПЗТ), методи безумовної оптимізації, квадратичний функціонал.*

Вступ

Експериментальні методи дослідження теплофізичних процесів та їх систем є найбільш достовірним джерелом інформації про тепловий стан об'єкту [7]. Особливого значення теорія і практика розв'язання обернених задач набувають у наш час, коли в силу обставин що склалися, об'єкти енергетики, промисловості, транспорту, господарства, комунікацій, будівель та споруд відпрацювали свій плановий ресурс і потребують уникнення техногенних катастроф, а саме потребують термінового оновлення, модернізації і реконструкції. Першим кроком в реалізації програми реконструкції перерахованих вище об'єктів є діагностика їх технічного стану і визначення залишкового ресурсу, тобто часу, протягом якого даний об'єкт може надійно і ефективно працювати, не ставлячи під загрозу життя людей і навколишнє

середовище. При проведенні діагностики безпосереднє визначення параметрів, що обмежують надійну роботу об'єкта ускладнене, а часто просто неможливе. Тому, як правило, про ці параметри судять за результатами непрямих вимірювань, що є прерогативою обернених задач. Таким чином, в основі діагностики технічного стану лежать теорія і практика розв'язання обернених задач, а це вимагає подальших досліджень з розробки методів вирішення цих завдань, ефективних алгоритмів і програмних продуктів.

До основних проблем під час вирішення прикладних обернених задач теплопровідності (ОЗТ) відносять коректність постановки задачі, час розв'язку систем алгебраїчних рівнянь для дискретного аналогу рівняння теплопровідності, об'єм обчислень під час оптимізації квадратичного функціоналу у обернених задачах (кількість обчислень на 1 ітерацію), стійкість та збіжність методів безумовної оптимізації.

Відомо, що чисельний розв'язок лінійних задач прямих та обернених теплопровідності отримується значно швидше, ніж нелінійних задач, оскільки дискретний аналог лінійних задач вимагає розв'язання лінійної системи рівнянь, а для нелінійних – нелінійної [1;5;7]. Під час знаходження чисельного розв'язку нелінійних задач виникає ряд проблем пошуку розв'язку поставлених задач.

Більшість сучасних методів та алгоритмів розв'язку прикладних задач, які зводяться до розв'язання обернених задач теплопровідності, використовують багаторазовий виклик процедури розв'язку прямої задачі теплопровідності (ПЗТ). Тому, очевидно, що одним із найефективніших шляхів суттєвого зменшення часу пошуку чисельного розв'язку ОЗТ є зменшення часу розв'язку ПЗТ для відповідної ОЗТ [4;5]. У класичній постановці некоректних задач, у тому числі ОЗТ, присутній квадратичний функціонал, який потрібно мінімізувати. Тому не менш ефективним шляхом прискорення отримання розв'язку ОЗТ, зокрема нелінійних, є модифікація існуючих методів безумовної оптимізації відповідного квадратичного функціоналу.

Для лінійних та нелінійних ОЗТ кількість викликів процедури розв'язку ПЗТ на одну ітерацію під час застосування градієнтних методів пропорційна кількості шуканих параметрів розв'язуваної ОЗТ. З ростом розмірності задачі росте кількість викликів процедури ПЗТ. Якщо, наприклад, двовимірна ОЗТ на відновлення початкового розподілу температури розглядуваної області [4] розв'язується на сітці 34x34 (з граничними вузлами), то кількість викликів процедури розв'язку ПЗТ 32². Якщо ж цю саму двовимірну задачу розв'язується на сітці 66x66 (з граничними вузлами), то кількість викликів процедури розв'язку ПЗТ 64² і т. д.

Мета роботи

Розробка чисельних методів, які зменшують кількість обчислень для отримання розв'язку нелінійних обернених задач теплопровідності та апробація цих методів на конкретних задачах.

Математична постановка задачі

У області $D \times [0, \tau]$ розглядається рівняння теплопровідності [5]:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \nabla T) \quad (1)$$

Повний розв'язок задачі теплопровідності у заданій області містить такі відомості:

–значення температури у всіх внутрішніх точках розрахункової області задачі, тобто $\forall x \in D, \forall t \in [0, \tau]$ відомий розподіл $T(x, t)$. Це означає, що відомі розподіли у початковий момент часу

$$T_{init}(x) = T(x, 0) \quad (2)$$

та кінцевий момент часу

$$T_{fin}(x) = T(x, \tau); \quad (3)$$

–граничні умови:

$$\partial D = \partial D_D + \partial D_N, \quad x \in \partial D_D : T = T(x, \tau); \quad x \in \partial D_N : \partial T / \partial n = p(x, \tau), \quad (4)$$

де ∂D – границя розрахункової області, ∂D_D – це частина границі (можливо, порожня), на якій задана умова Діріхле та ∂D_N – частина границі, на якій задана умова Неймана, а n – це нормаль до границі розрахункової області задачі;

–залежність параметрів задачі від координат та температури:

$$\rho = \rho(x, T), \quad C = C(x, T), \quad k = k(x, T), \quad (5)$$

де

ρ – густина тіла,

C – питома теплоємність тіла,

k – коефіцієнт теплопровідності.

Враховуючи вищевказані відомості про повний розв’язок задачі теплопровідності, можна сформулювати пряму задачу для рівняння теплопровідності в області $D \times [0, \tau]$.

Дано рівняння (1), початковий розподіл температури (2), граничні умови (4), залежності параметрів від координат і температури (5). Потрібно знайти кінцевий розподіл температури (3) і, як проміжний результат, значення температури у всіх внутрішніх точках розрахункової області у рівнянні (1) для $\forall t \in [0, \tau]$.

Першою ОЗТ у роботі розглядається наступна ОЗТ. Дано рівняння (1), кінцевий розподіл температури (3), граничні умови (4), залежності параметрів від координат та температури (5). Треба знайти початковий розподіл температури (2) і, як проміжний результат, значення температури у всіх внутрішніх точках області для $\forall t \in [0, \tau]$. ОЗТ вважається розв’язаною, якщо знайдено такий початковий розподіл температури $\overline{T_{init}}(x) = \overline{T}(x, 0)$, що розв’язок прямої задачі з використанням у якості початкової умови цього розподілу $T(\overline{T_{init}})$ співпадає з потрібним кінцевим розподілом T_{fin} .

Інакше, потрібно знайти початковий розподіл температури $\overline{T_{init}}$ такий, що

$$J(\overline{T_{init}}) = \|T(\overline{T_{init}}) - T_{fin}\| \rightarrow \min. \quad (6)$$

У якості норми у (6) використовується норма L_2 , тобто $\|x\| = \sqrt{\int_D x^2 dD}$ або, у дискретному випадку, $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$. Ясно, що для заданого початкового розподілу T_{init} значення $T(T_{init})$ отримується в результаті розв'язку диференціального рівняння (1). Для скорочення записів введемо для рівняння (1) позначення (7). Тут підкреслюється, що розв'язок отримано з використанням шуканого параметру $L(T, \theta) = 0$, у даному випадку, з початковою умовою $\theta = T(x, 0) = T_{init}(x)$:

$$L(T, \theta) = 0. \quad (7)$$

Можна сказати, що диференціальне рівняння (7) виступає для задачі (6) в ролі обмеження. Тобто, спираючись на сучасну класифікацію, маємо справу із задачею пошуку глобального мінімуму функціоналу (6) з обмеженням у вигляді диференціального рівняння (7). Задачі пошуку екстремуму з обмеженнями записуються з використанням множників Лагранжа, тобто задача ставиться у вигляді задачі на безумовний екстремум:

$$\int_D (T(\theta) - T_{fin})^2 dD + \lambda L(T, \theta) \rightarrow \min.$$

Тому потрібно знайти початковий розподіл температури $\theta = \overline{T_{init}}$ таке, що розподіл $T(\theta)$ дає мінімум функціоналу

$$J(\theta) = \int_D (T(\theta) - T_{fin})^2 dD \rightarrow \min, \quad (8)$$

причому для довільних початкових умов $\theta = \overline{T_{init}}$ значення $T(\theta)$ знаходиться в результаті розв'язку диференціального рівняння (7).

Другою задачею у даній роботі є задача на пошук граничної умови [3]. Дано рівняння (1), початковий розподіл температури (2), кінцевий розподіл температури (3), граничні умови на частині границі у вигляді (4), залежності параметрів від координат та температури (5). Треба знайти граничні умови (4) на тій частині границі розрахункової області, на якій вони не задані (невідомі) і, як проміжний результат, значення температури у всіх внутрішніх точках області. ОЗТ вважається розв'язаною, якщо знайдено такий розподіл температури або температурний потік на границі області (де вона не задана була до цього), що розв'язок прямої задачі з використанням у якості знайдених граничних умов умови цього розподілу $T(\theta_{bound})$ співпадає з потрібним кінцевим розподілом T_{fin} .

Аналогічно третя задача у даній роботі на пошук коефіцієнта теплопровідності [6]. Дано рівняння (1), початковий розподіл температури (2), кінцевий розподіл температури (3), граничні умови на частині границі у вигляді (4), розподіл густини та питомої теплоємності тіла, які залежать від координат та температури (5). Треба знайти розподіл значень теплопровідності у (5) і, як проміжний результат, значення температури у всіх внутрішніх точках області. ОЗТ вважається розв'язаною, якщо

знайдено такий розподіл значень температуропровідності, що розв'язок прямої задачі з використанням у якості знайдених граничних умов умови цього розподілу $T(\theta_{cond})$ співпадає з потрібним кінцевим розподілом T_{fin} .

Методика розв'язку

Чисельний розв'язок розглянутих у роботі задач отримано методом скінченних елементів.

Будемо мінімізувати функціонал (8), розв'язуючи систему рівнянь [1; 2; 5]

$$\left\{ \frac{\partial J}{\partial(\theta_i)} = 0 \right\}, i = \overline{1, N}, \quad (9)$$

де

θ_i – шукане значення температури в i -му вузлу розрахункової сітки;

N – загальна кількість вузлів, у яких потрібно знайти значення температури.

Система (9) буде розв'язуватись методом Ньютона та його модифікаціями.

Тоді завдання оптимізації можна поставити в такий спосіб. Серед існуючих чисельних методів оптимізації типу Ньютона вибрати найбільш ефективні для розв'язку ОЗТ і скоротити в них кількість викликів процедури розв'язку ПЗТ.

Методи мінімізації квадратичного функціоналу

Методи типу методу Ньютона замінюють розв'язок системи рівнянь виду $F_i(\bar{x}) = F_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ розв'язком послідовності систем виду [4-6]:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\bar{x}^{-k}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\bar{x}^{-k}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\bar{x}^{-k}) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\bar{x}^{-k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} - x_1^k \\ \dots \\ x_n^{k+1} - x_n^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1(\bar{x}^{-k}) \\ \dots \\ F_n(\bar{x}^{-k}) \end{pmatrix} \quad (10)$$

У якості матриці системи в (10) використовується Гессіан, тобто матриця, що складається з других похідних рівнянь системи:

$$H(\theta^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J_1}{\partial \theta_i^2}(\theta^{(k)}) & \dots & \frac{\partial^2 J_1}{\partial \theta_1 \partial \theta_n}(\theta^{(k)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 J_n}{\partial \theta_n \partial \theta_1}(\theta^{(k)}) & \dots & \frac{\partial^2 J_n}{\partial \theta_n^2}(\theta^{(k)}) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

де k – номер ітерації методу.

Розв'язки подібних задач можуть бути отримані тільки чисельно, тобто у вигляді таблиць значень. Перед тим, як записати формули для розглянутих методів у [5], запишемо класичний метод Ньютона для поставленої ОЗТ.

$$\begin{aligned} G^k \Delta \theta^k &= -R^k \\ \theta^{k+1} &= \theta^k + \Delta \theta^k \end{aligned} \quad (12)$$

де $G = (G_{ij}) = (\partial^2 J / \partial \theta_i \partial \theta_j)$ – матриця Гессе, $\Delta \theta = (\Delta \theta_1, \dots, \Delta \theta_n)^T$ – вектор-стовпчик приростів параметрів, $R = (R_1, \dots, R_n)^T = (\partial J / \partial \theta_1, \dots, \partial J / \partial \theta_n)^T$ – вектор-стовпчик похідних цільового квадратичного функціоналу.

Використання методів, описаних у [5], для (12), веде до модифікацій класичного методу Ньютона зі змінним кроком.

Перша модифікація методу зі змінним кроком на основі [5] матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta_k J'(\bar{\theta}^{(k)})) &= \min J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot J'(\bar{\theta}^{(k)})), \beta > 0, \\ \bar{z} &= \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}(\bar{\theta}^{(k)}) J'(\bar{\theta}^{(k)}), \\ J(\bar{z} - h_k J'(\bar{z})) &= \min J(\bar{z} - h \cdot J'(\bar{z})), h > 0, \\ \bar{\theta}^{(k+1)} &= \bar{\theta}^{(k)} - 2h_k \cdot (H(\bar{\theta}^{(k)}) + H(\bar{z}))^{-1} J'(\bar{\theta}^{(k)}), \end{aligned} \quad (13)$$

де

$\bar{\theta}^{(k)}$.. – вектор невідомих задачі на ітерації k ;

H – матриця Гессе;

h_k – крок методу на ітерації k .

Метод (13) має другий порядок точності.

Аналогічно, друга модифікація методу Ньютона зі змінним кроком на основі [5] матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta_k J'(\bar{\theta}^{(k)})) &= \min J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot J'(\bar{\theta}^{(k)})), \beta > 0, \\ \bar{z} &= \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}(\bar{\theta}^{(k)}) J'(\bar{\theta}^{(k)}). \\ J(\bar{z} - h_k J'(\bar{z})) &= \min J(\bar{z} - h \cdot J'(\bar{z})), h > 0, \\ \bar{\theta}^{(k+1)} &= \bar{\theta}^{(k)} - \frac{h_k}{2} \cdot (H(\bar{\theta}^{(k)}) \cdot H(\bar{z}))^{-1} (H(\bar{\theta}^{(k)}) + H(\bar{z})) J'(\bar{\theta}^{(k)}). \end{aligned} \quad (14)$$

Метод (14) має другий порядок точності.

Третя модифікація методу Ньютона зі змінним кроком на основі [5] матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta_k J'(\bar{\theta}^{(k)})) &= \min J(\bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot J'(\bar{\theta}^{(k)})), \beta > 0, \\ \bar{z} &= \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}(\bar{\theta}^{(k)}) J'(\bar{\theta}^{(k)}), \\ J(\bar{z} - h_k J'(\bar{z})) &= \min J(\bar{z} - h \cdot J'(\bar{z})), h > 0, \\ \bar{\theta}^{(k+1)} &= \bar{\theta}^{(k)} - h_k H^{-1} \left(\frac{\bar{\theta}^{(k)} + \bar{z}}{2} \right) J'(\bar{\theta}^{(k)}). \end{aligned} \quad (15)$$

Слід зауважити, що метод (15) має третій порядок точності.

Можна прискорити методи (13), (14), (15), використовуючи для знаходження вектора $\bar{\theta}^{(k+1)}$ метод найшвидшого спуску.

Тестування розроблених методів проводилося на ряді задач. Деякі з них наведені нижче.

Задача 1. Знайти глобальний мінімум функціоналу:

$$J(\theta(\bar{x})) = \int_{\Omega} (T(\theta, \bar{x}, t_f) - \Theta(\bar{x}))^2 d\bar{x} \rightarrow \min, \bar{x} = (x_1, x_2), \quad (16)$$

де

Ω – розрахункова область;

$\theta(\bar{x})$ – невідома (шукана) функція;

$T(\theta, \bar{x}, t_f)$ – шуканий розв'язок задачі, який залежить від $\theta(\bar{x})$;

$\Theta(\bar{x})$ – заданий розподіл температури у момент часу t_f .

Розрахункова область Ω разом із сіткою зображена на рисунку 1:

Розрахункова область, зображена на рисунку 1, представляє собою квадрат зі стороною 2 з центром у початку координат. З квадрату вирізано коло з центром у початку координат радіуса 0,5 та чотири квадрати зі сторонами 0.2 з центрами у точках $(-0.5; -0.5)$, $(-0.5; 0.5)$, $(0.5; -0.5)$, $(0.5; 0.5)$ відповідно.

Додаткове обмеження квадратичного функціоналу (16) записується у вигляді диференціального рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla(k\nabla T) + f, \\ t &\in [0, t_f], t_f = 0.3, \end{aligned} \quad (17)$$

$$k(T) = T^2 - T + \sin T + 1, \quad f(x_1, x_2, T) = \cos(T - x_1 + x_2) + x_1^2 + x_2^2.$$

Граничні умови (17) мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} T(-1, x_2, t) &= \sin \pi x_2, \\ \frac{\partial T(\bar{x}, t)}{\partial x_1} \Big|_{(1, x_2, t)} &= \frac{\partial T(\bar{x}, t)}{\partial x_2} \Big|_{(x_1, -1, t)} = \frac{\partial T(\bar{x}, t)}{\partial x_2} \Big|_{(x_1, 1, t)} = \frac{\partial T(\bar{x}, t)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{inside}} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

де $\overset{1}{n}$ – нормаль до границі області (у даному випадку до внутрішньої Γ_{inside}).

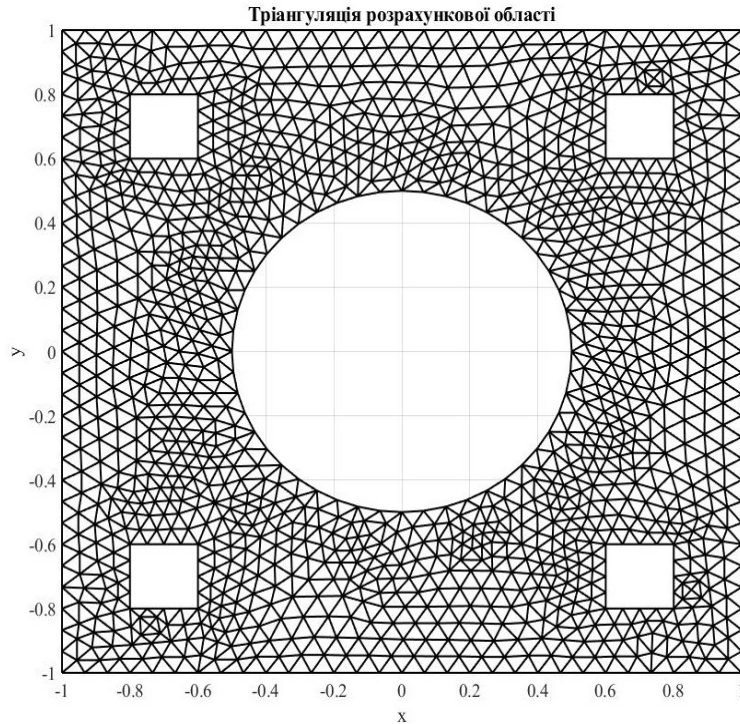


Рис. 1. Розрахункова область задачі з накладеною на нею сіткою.
Тріангуляція: 1348 вузлів сітки; 2472 елементи; 232 граничних елементи

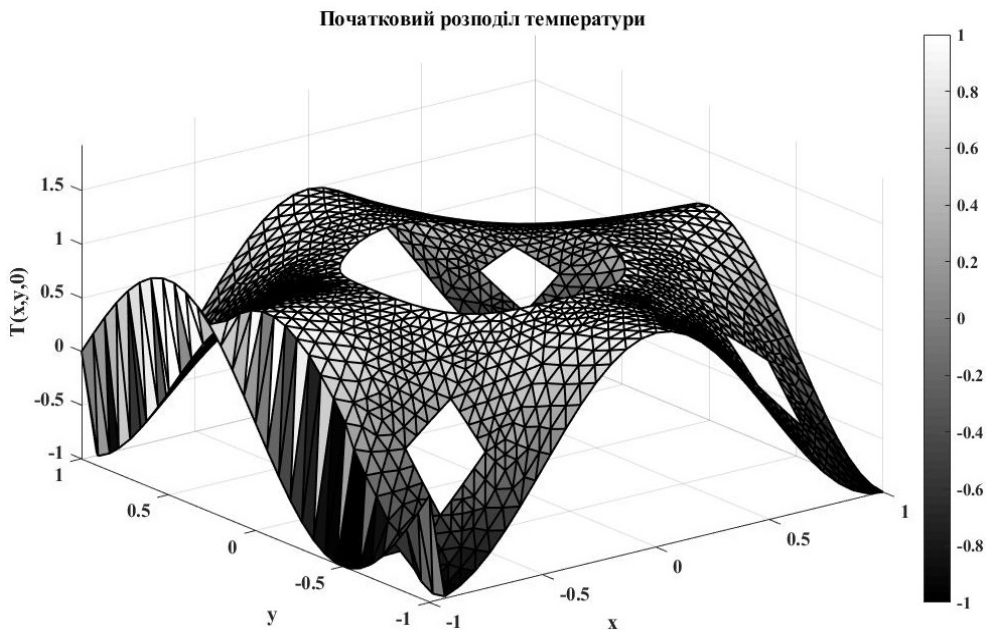
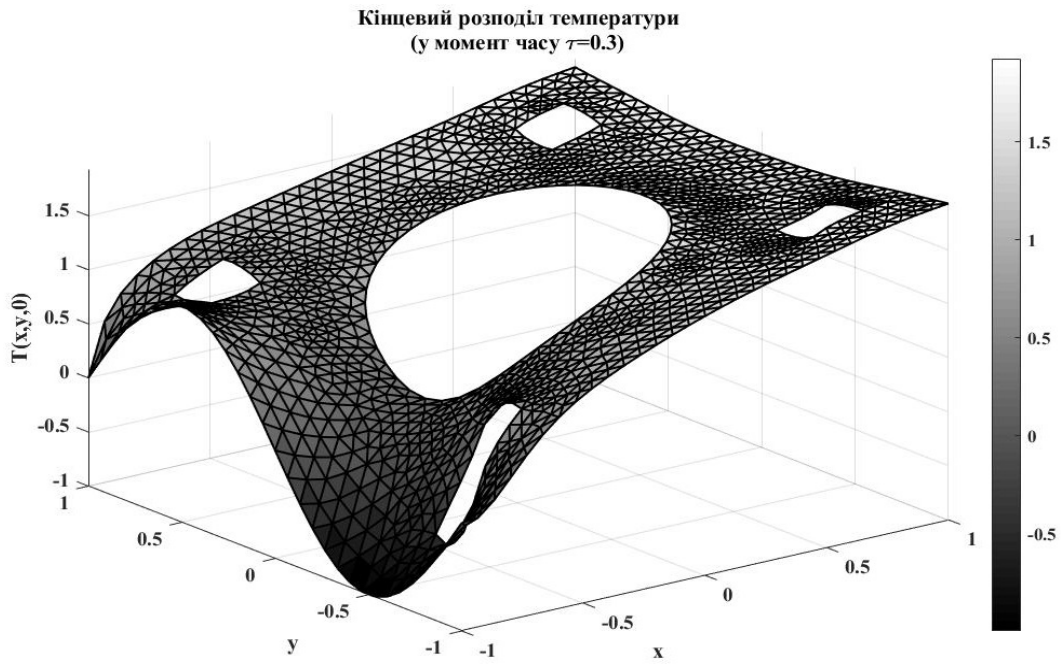
Розподіл температури для (17) з граничними умовами (18) для рівняння (16) представлено так:

$$T_{fin}(\bar{x}) = T(\bar{x}, t_f), \quad (19)$$

причому, розподіл $T_{fin}(\bar{x})$ представлено на рис. 2:

Результати чисельних експериментів наведено на рис. 3-6.

На основі отриманих результатів можна стверджувати, що модифікації методів Ньютона працюють на нелінійних задачах на пошук початкової умови значно ефективніше, ніж класичний метод Ньютона.



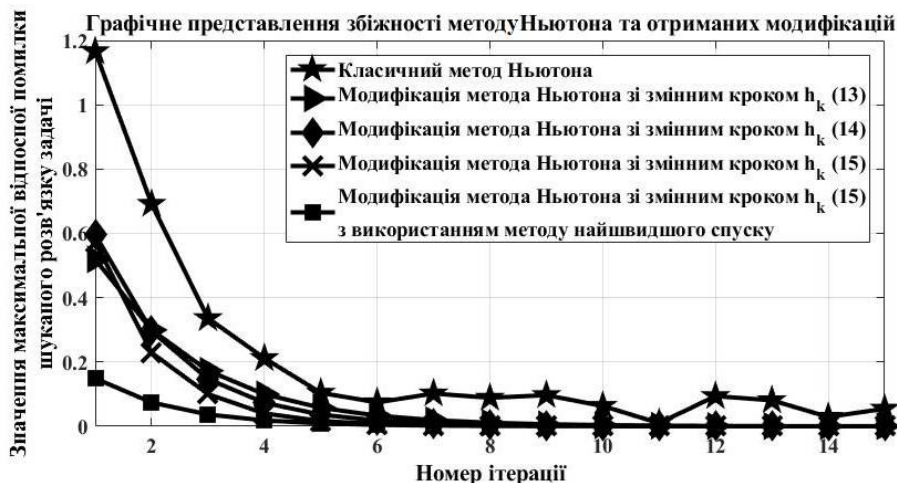


Рис. 4. Порівняльний аналіз роботи методів на поставленій нелінійній задачі за критерієм збіжності відповідних методів



Рис. 5. Порівняльний аналіз розглянутих методів на поставленій задачі за критерієм кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ з нульовим наближенням до початкової умови



Рис. 6. Порівняльний аналіз розглянутих методів на поставленій задачі за критерієм кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ з наближенням до початкової умови за допомогою ряду Фур'є [4] (4 члени розкладу в ряд)

Задача 2. Знайти глобальний мінімум функціоналу:

$$J(\theta(y)) = \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial T(\theta, x, y)}{\partial x} \Big|_{\Gamma_1} - \Theta(y) \right)^2 dy \rightarrow \min, \quad (20)$$

де

$\theta(y)$ – шукана зовнішня гранична умова другого роду правої частини розрахункової області;

$T(\theta, x, y)$ – шуканий розв'язок задачі;

Γ_1 – границя, на якій потрібно знайти розподіл температури – це права зовнішня границя розрахункової області для $y \in (0.2; 0.8)$;

$\Theta(y)$ – заданий температурний потік на правій частині розрахункової області Γ_1 .

Додаткове обмеження для (20) у вигляді диференціального рівняння має вигляд:

$$\begin{aligned} \nabla(k\nabla T) &= -f, \\ k &= k(T) = \frac{T^2 + \sin\left(\frac{T}{100}\right) + 2}{100}, \\ f &= f(x, y) = 10\left((x-1)^2 + (y-1)^2\right), \end{aligned} \quad (21)$$

причому розрахункова область Ω для рівняння (21) зображена на рисунку 7:

Розрахункова область задачі, яка зображена на рисунку 7, представляє собою прямокутник розміром 2×1 , ліва нижня вершина якого лежить у початку координат. З прямокутника вирізано малий прямокутник розміром 1×0.5 з центром у точці $(1; 0.5)$ та чотири чвертини кіл радіусом $0,2$ з центрами у вершинах великого прямокутника.

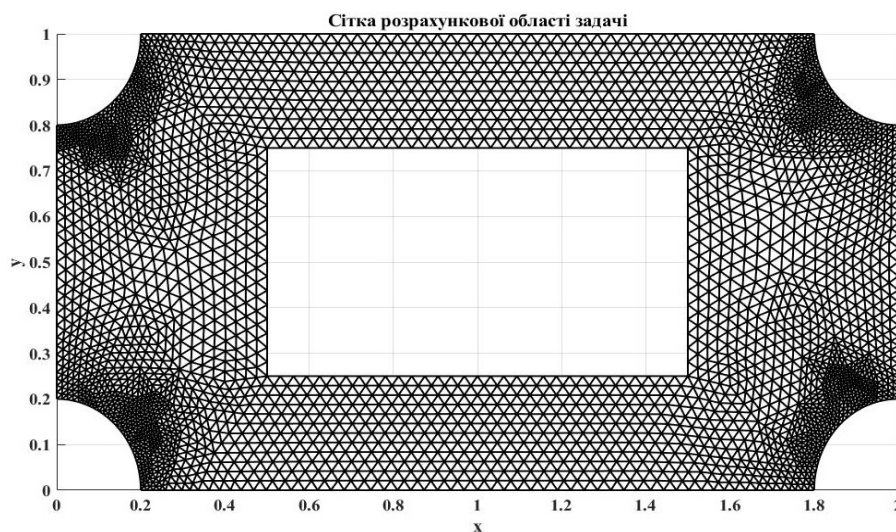


Рис. 7. Розрахункова область задачі із триангуляцією на ній:
932 вузли; 1680 елементів; 184 граничних елементів

Граничні умови (21) мають наступний вигляд:

$$T|_{\Gamma_{inside}} = 50, \quad \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_{outside} \setminus \Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \Theta(y), \quad (22)$$

де Γ_{inside} – вся внутрішня границя розрахункової області, $\Gamma_{outside}$ – вся зовнішня границя розрахункової області, \bar{n} – нормаль до зовнішньої границі області, Γ_2 – внутрішня права границя вирізаного прямокутника у розрахунковій області Ω .

Результати чисельних експериментів наведено на рис. 8-13.

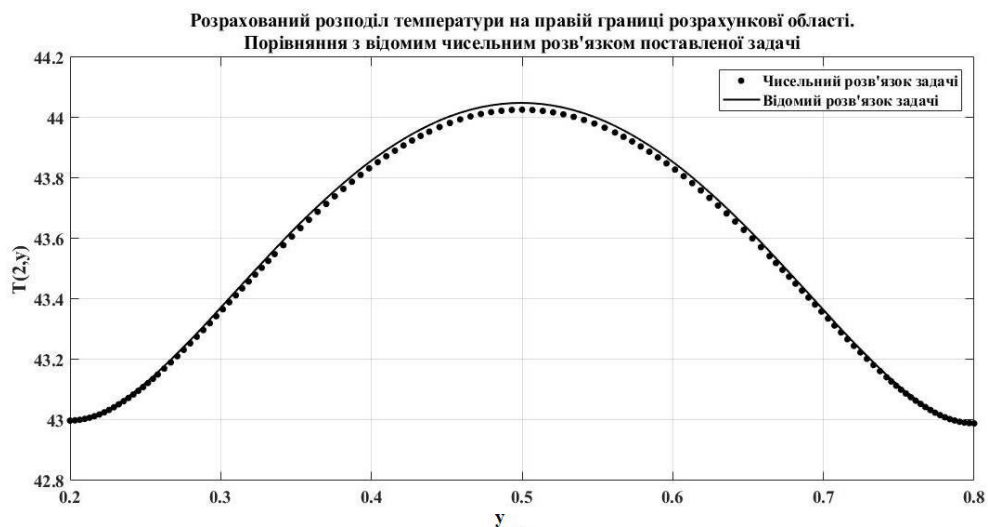


Рис. 8. Результат знаходження зовнішньої граничної умови на правій частині розрахункової області

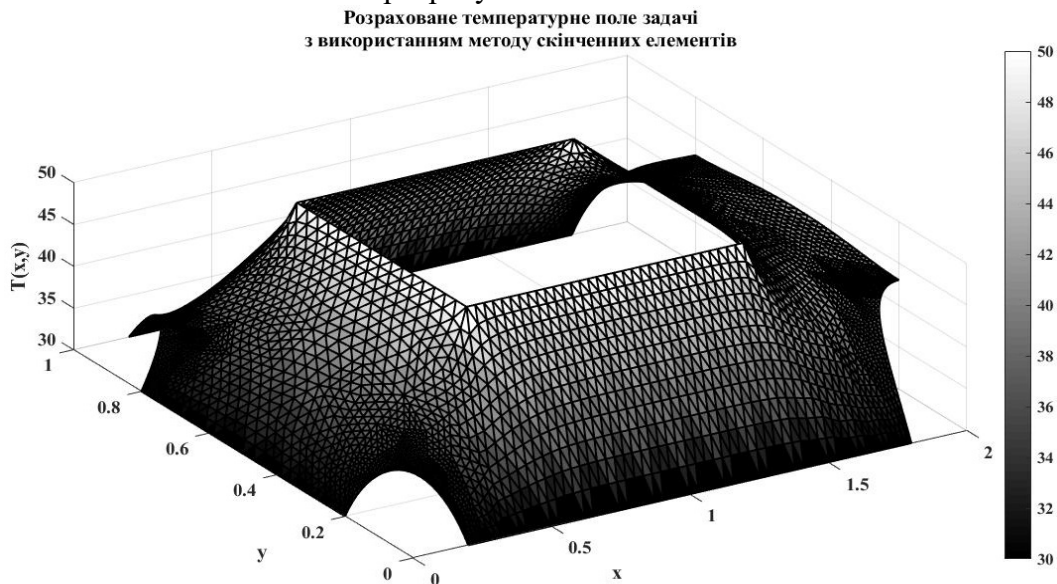


Рис. 9. Розраховане температурне поле при відновленій граничній умові

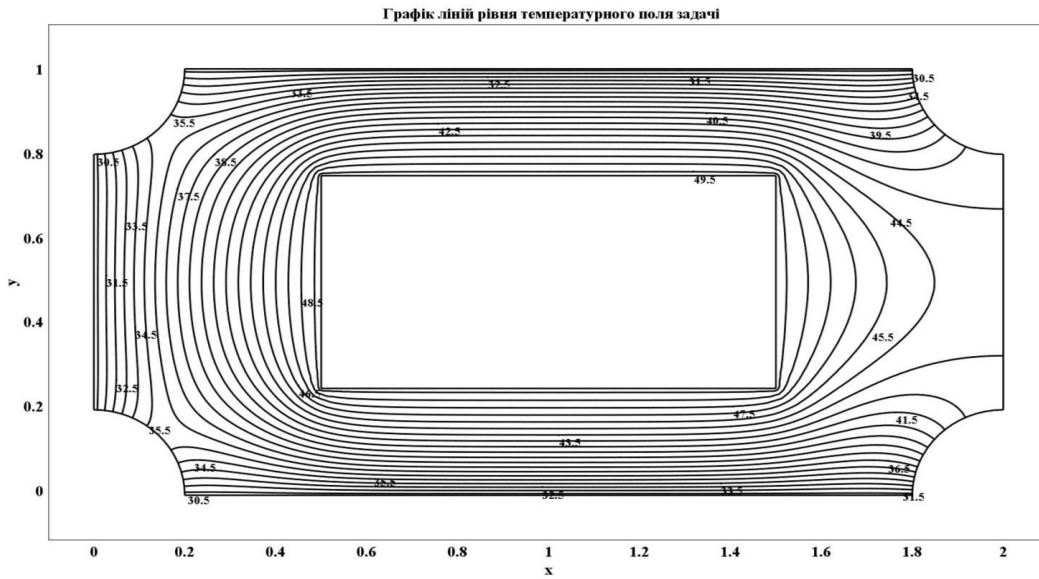


Рис. 10. Представлення температурного поля у вигляді ліній рівня

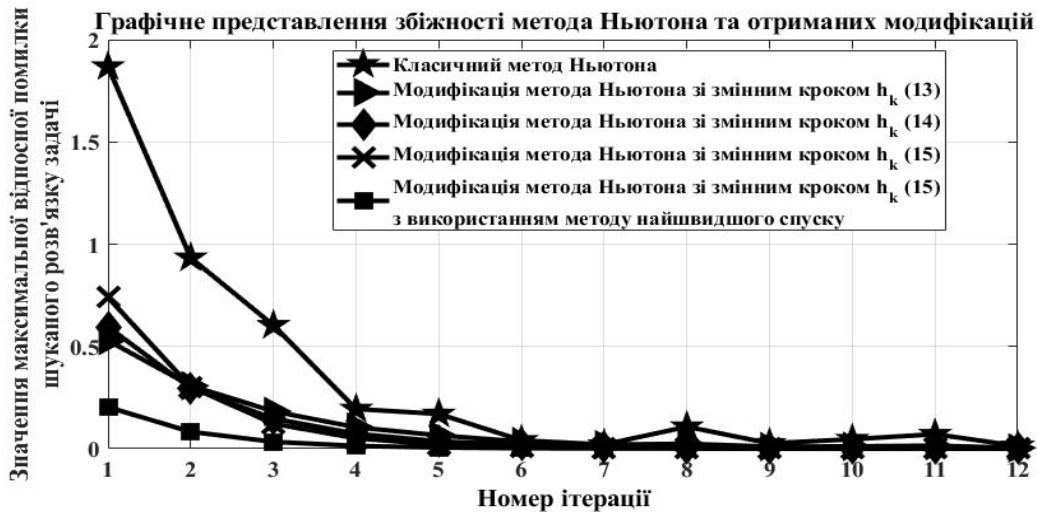


Рис. 11. Порівняльний аналіз роботи алгоритмів за критерієм збіжності



Рис. 12. Порівняльний аналіз роботи алгоритмів за критерієм кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ з нульовим наближенням до граничної умови



Рис. 13. Порівняльний аналіз роботи алгоритмів за критерієм кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ з відповідним розкладом граничної умови за повною системою тригонометричних функцій (4 члени розкладу в ряд)

На основі отриманих результатів можна стверджувати, що модифікації методів Ньютона (13)-(15) працюють на нелінійних задачах на пошук граничних умов значно ефективніше, ніж класичний метод Ньютона.

Тепер розглянемо наступну задачу у такій математичній постановці.

Задача 3. Знайти глобальний мінімум функціоналу:

$$J(\theta(x, y)) = \int_0^1 \int_0^1 (T(\theta, x, y, t_f) - T_{fn}(x, y))^2 dx dy \rightarrow \min, \quad (23)$$

де

$T(\theta, x, y, t_f)$ – розв'язок задачі;

$\theta(x, y)$ – шуканий розподіл коефіцієнта температуропровідності у всій розрахунковій області (одиничний квадрат з початком координат у лівій нижній його вершині);

$T(\theta, x, y, t_f)$ – розраховане температурне поле у момент часу t_f розв'язок задачі;

$T_{fn}(x, y)$ – розподіл температури на всій розрахунковій області задачі.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta(x, y, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta(x, y, T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + f,$$

$$f(x, y) = \frac{4\pi^2 t^2 \cos(2\pi tx)}{(\cos(2\pi tx) + \cos(3\pi ty))^2 + 1} - 3\pi y \sin(3\pi ty) - 2\pi x \sin(2\pi tx) +$$

$$+ \frac{2\pi^2 t^2 (\cos(2\pi tx) + \cos(3\pi ty)) (4\sin^2(2\pi tx) + 9\sin^2(3\pi ty))}{((\cos(2\pi tx) + \cos(3\pi ty))^2 + 1)^2}, \quad (24)$$

$$(x, y) \in [0; 1]^2, t \in [0, t_f], t_f = 0.5.$$

Початкова умова має вигляд:

$$T(x, y, 0) = 2. \quad (25)$$

Граничні умови задачі мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} T(x, 0, t) &= 1 + \cos(2\pi tx), & T(x, 1, t) &= \cos(2\pi tx) + \cos(3\pi t), \\ T(0, y, t) &= 1 + \cos(3\pi ty), & T(1, y, t) &= \cos(3\pi ty) + \cos(2\pi t). \end{aligned} \quad (26)$$

Додаткова умова у момент часу $t_f = 0.5$:

$$T(x, y, 0.5) = T_{fin}(x, y) = \cos(\pi x) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi y\right). \quad (27)$$

Результати чисельних експериментів наведено на рис.14-21.

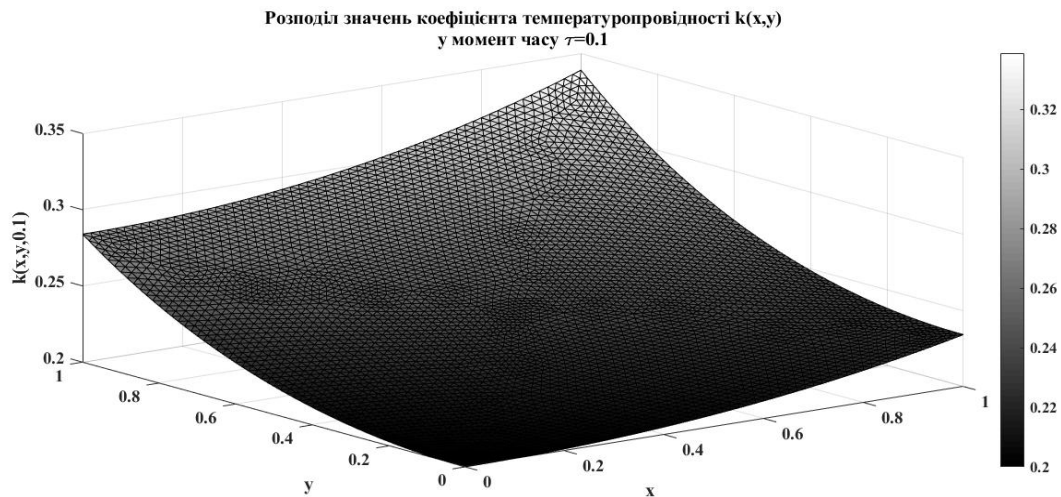


Рис. 14. Відновлений розподіл коефіцієнта теплопровідності у момент часу $t=0.1$

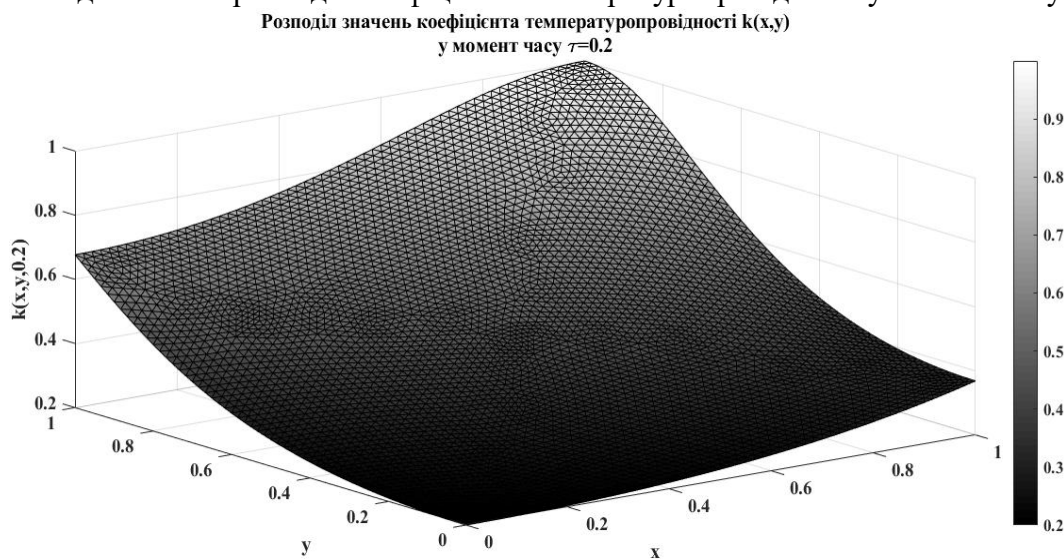


Рис. 15. Відновлений розподіл коефіцієнта теплопровідності у момент часу $t=0.2$

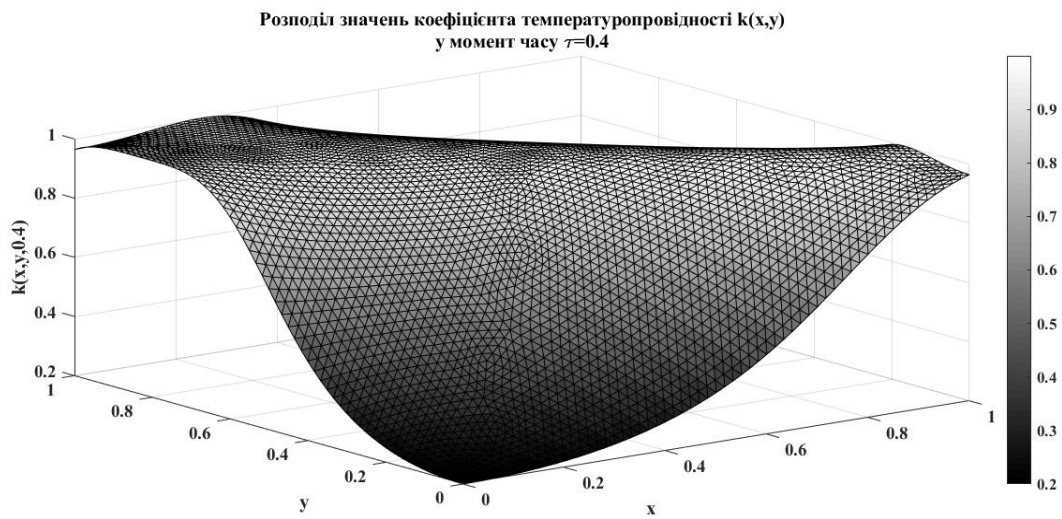


Рис. 16. Відновлений розподіл коефіцієнта теплопровідності у момент часу $t=0.4$

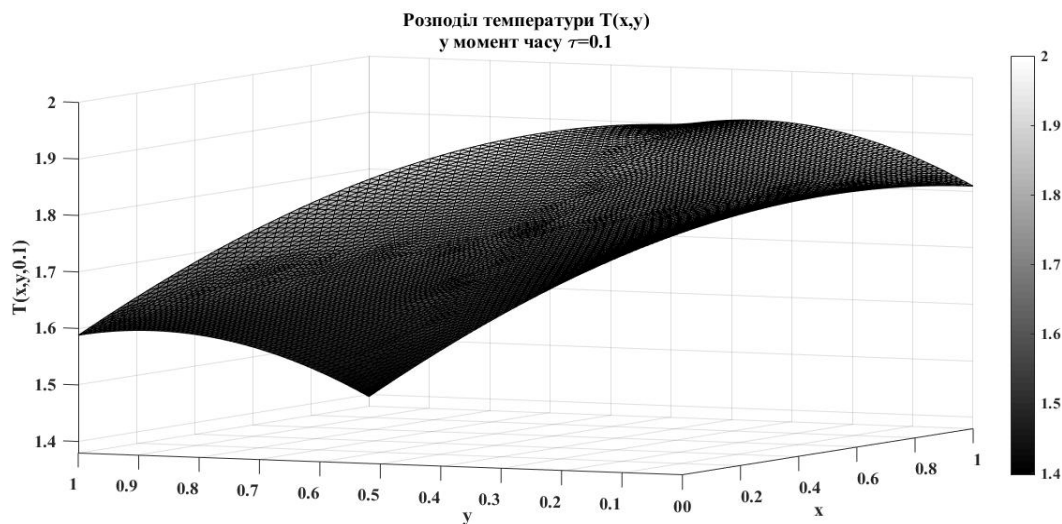


Рис. 17. Розраховане температурне поле у момент часу $t=0.1$ на основі відновленого коефіцієнта теплопровідності

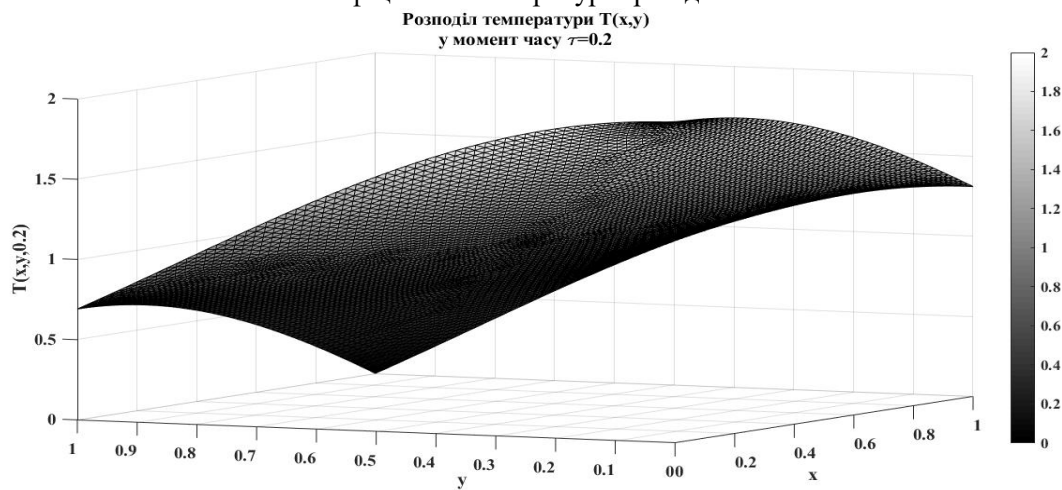


Рис. 18. Розраховане температурне поле у момент часу $t=0.2$ на основі відновленого коефіцієнта теплопровідності

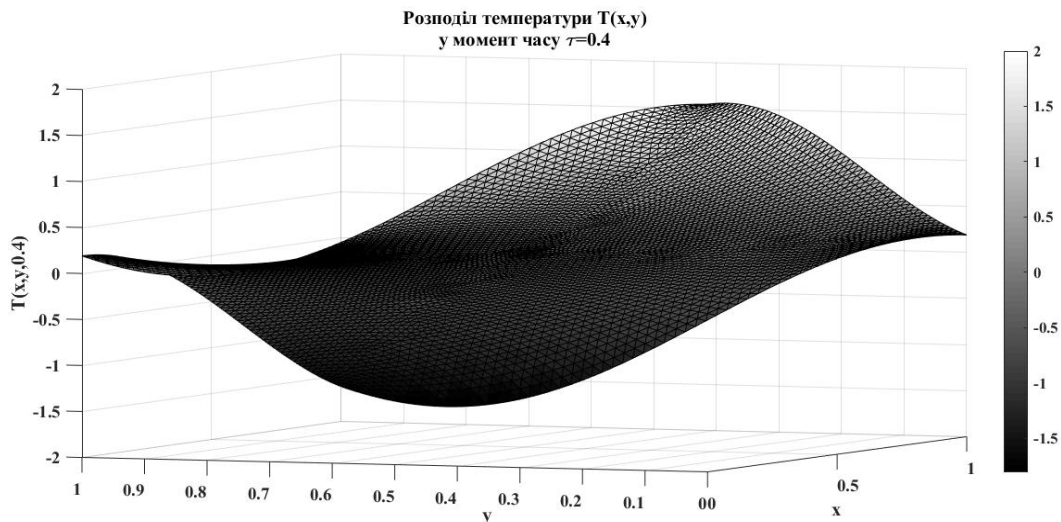


Рис. 19. Розраховане температурне поле у момент часу $t=0.4$ на основі відновленого коефіцієнта теплопровідності



Рис. 20. Порівняльний аналіз роботи кожного методу за критерієм кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ

Під час тестування методів слід зазначити, що знову ж модифікації методів Ньютона (13)-(15) працюють на нелінійних задачах пошуку коефіцієнта теплопровідності значно ефективніше, ніж класичний метод Ньютона. Тестування методів (13), (14) і (15) було проведено на різних нелінійних задачах, у тому числі на задачах (16)-(19), (20)-(22) і (23)-(27). Розглянуті у роботі завдання були вирішені на сітках різної розмірності. У кожному разі при вирішенні даних нелінійних задач найбільше викликів функції має метод Ньютона. Для кожного завдання число викликів функції при вирішенні даним методом балось за 100%.

Висновки

На основі отриманих результатів можна стверджувати, що змінний крок під час мінімізації квадратичного функціоналу подібних нелінійних ОЗТ є необхідною умовою зменшення загальної кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ. Тестування методів (13), (14) та (15) було виконано на різних двовимірних задачах. Показано помітне прискорення розрахунків у порівнянні з класичним методом Ньютона.

Список використаної літератури:

1. Klibanov M.V. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problem. / M.V. Klibanov, L. Beilina. – USA.: Springer, 2012. – 407p. ISBN 978-1-4419-7804-2.
2. Isakov V., Inverse Problems for Partial Differential Equations. / V. Isakov. – USA.: Springer, 2005 – 40p.
3. Truffart, B. A General Optimization Algorithm to Solve 2-D Boundary Inverse Heat Conduction Problems Using Finite Elements. / B. Truffart, Y. Jarny, D. Delaunay. First International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, Palm Coast, FL, pp. 53-60, 1993.
4. Головня Б.П. «Про один метод знаходження чисельного розв'язку двовимірної оберненої задачі теплопровідності» Б.П. Головня, В.В. Хайдуrow // Науковий журнал. Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: технічні науки. 2015. – Черкаси. – с. 49-55.
5. Головня Б.П. «Эффективные методы решения нелинейных обратных задач теплопроводности». Б. П. Головня, В. В. Хайдуrow // Науковий журнал. Вісник Черкаського університету. Серія: прикладна математика. 2014. – Черкаси. – с. 87-98.
6. Хайдуrow В.В. «Ефективні методи чисельного розв'язку точкових обернених задач теплопровідності». В. В. Хайдуrow // Науковий журнал «Молодий вчений». Серія: технічні науки. 2016. – №6 (33). Херсон. – с. 49-55.
7. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности: в 2 томах. Том 2: Приложения / Ю.М. Мацевитый. – К.: НАН Украины, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного, 2003.

References:

1. Klibanov M.V. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problem. / M.V. Klibanov, L. Beilina. – USA.: Springer, 2012. – 407p.
2. Isakov V., Inverse Problems for Partial Differential Equations. / V. Isakov. – USA.: Springer, 2005 – 40p.
3. Truffart, B. A General Optimization Algorithm to Solve 2-D Boundary Inverse Heat Conduction Problems Using Finite Elements. / B. Truffart, Y. Jarny, D. Delaunay. First International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, Palm Coast, FL, pp. 53-60, 1993.
4. Golovnya B.P. «Pro odyn metod znakhodzhennya chysel'noho rozv'yazku dvovymirnoyi obrnenoyi zadachi teploprovodnosti» B.P. Golovnya, V.V. Haydurow // Naukovyy zhurnal. Visnyk Cherkas'koho derzhavnoho tekhnolohichnoho universytetu. Seriya: tekhnichni nauky. 2015r. Cherkasy, Ukrayina. s. 49-55. (in Ukr)
5. Golovnya B.P. «Éffektyvnye metody reshenyya nelyneynykh obratnykh zadach teploprovodnostyy». B. P. Golovnya, V. V. Haydurow // Naukovyy zhurnal. Visnyk Cherkas'koho universytetu. Seriya: prykladna matematyka. 2014r. Cherkasy, Ukrayina. s. 87-98. (in Ukr)
6. Haydurow V.V. «Efektyvni metody chysel'noho rozv'yazku tochkovykh obrnenykh zadach teploprovodnosti». V. V. Haydurow // Naukovyy zhurnal «Molodyy vchenyy». Seriya: tekhnichni nauky. 2016r., №6 (33). Kherson, Ukrayina. s. 49-55. (in Ukr)
7. Matsevytyy Yu.M. Obratnye zadachy teploprovodnostyy: v 2 tomakh. Tom 2: Prylozhenyya / Yu. M. Matsevytyy. – K.: NAN Ukrainy, Ynstytut problem mashynostroenyaya ym. A.N. Podhornoho, 2003. (in Rus)

GOLOVNYA Boris,

The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Doctor of Science, Chair of Department of Applied Mathematics and Informatics

HAYDUROV Vladyslav,

Kyiv International University, lecturer of the Department of Computer Science

SOME HIGH-SPEED METHODS FOR SOLVING NONLINEAR INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS

Abstract. In the article a numerical analysis of a series of methods of unconditional optimization on nonlinear problems was carried out, which enable to reduce the time of searching for a numerical solution of a large class of nonlinear IHCP. Also in the work, we proposed significant modifications of the classical Newton method, which give an opportunity to obtain the desired numerical solution of nonlinear problems much faster than in the classical Newton method. Modifications of the Newton method with an alternating step give much faster convergence and give the opportunity to obtain fairly fast solutions of nonlinear IHCP.

Introduction. Experimental methods for the study of thermal processes and their systems are the most reliable source of information about the thermal state of the object [7]. Of particular importance there are the theory and practice of solving the inverse problems in our time, when, due to

the circumstances, the objects of energy, industry, transport, economy, communications, buildings and structures have worked out their planned resource and need to avoid man-made disasters, namely need urgent renovation, modernization and reconstruction. The first step in implementing the program of reconstruction of the above objects is the diagnosis of their technical condition and determination of the residual resource, that is, the time during which this object can operate reliably and effectively without endangering people's lives and the environment. When conducting a diagnosis, the direct determination of the parameters limiting the reliable operation of the object is complicated, and often simply impossible. Therefore, as a rule, these parameters are judged by the results of indirect measurements, that is the prerogative of inverse tasks. Thus, the theory and practice of solving the inverse problems lie at the basis of the diagnostics of the technical condition, which requires further research on the development of methods for solving these problems, effective algorithms and software products.

The main problems in solving applied inverse heat conduction problems (IHCP) include the correctness of the statement of the problem, the time of the solution of systems of algebraic equations for the discrete analogue of the heat conduction equation, the volume of computations during the optimization of the quadratic functional in inverse problems (the number of calculations per iteration), stability and convergence of unconditional optimization methods.

It is known that the numerical solution of linear problems of direct and inverse thermal conductivity is obtained much faster than nonlinear problems, since a discrete analog of linear problems requires solving a linear system of equations, and for nonlinear ones it is nonlinear [1; 5; 7]. When finding a numerical solution of nonlinear problems, a number of problems arises in solving the problems.

Most modern methods and algorithms for solving applied problems, which are reduced to the solution of inverse heat conduction problems, use the multiple challenge of the procedure for solving the direct heat conduction problem (DHCP). Therefore, it is obvious that one of the most effective ways to significantly reduce the search time for a numerical IHCP solution is to reduce the time of the DHCP solution for the corresponding IHCP [4, 5]. In the classical statement of incorrect tasks, including IHCP, there is a quadratic functional that needs to be minimized. Therefore, the modification of existing methods of unconditional optimization of the corresponding quadratic functional is no less effective way of accelerating the solution of IHCP, in particular nonlinear ones.

For linear and nonlinear IHCP, the number of calls for a procedure for solving DHCP for one iteration during the application of gradient methods is proportional to the number of desired parameters of the IHCP to be solved. As the dimension of the task grows, the number of calls for the DHCP procedure increases. If, for example, a two-dimensional IHCP to restore the initial temperature distribution of the considered area [4] is solved on a grid of 34×34 (with boundary nodes), the number of calls to the DHCP 32^2 solution procedure. If this same two-dimensional problem is solved on the 66×66 grid (with boundary nodes), then the number of calls for the procedure for resolving DHCP 64^2 , etc.

Purpose. Development of numerical methods that reduce the number of calculations for obtaining a solution of nonlinear inverse heat conduction problems and approbation of these methods for specific problems.

Results. When testing methods, it should be noted that again, the modifications of Newton's (13) - (15) methods work on nonlinear problems in finding the coefficient of heat conductivity much more efficiently than the classical Newton method. Testing of methods (13), (14) and (15) was carried out on various nonlinear problems, including problems (16) - (19), (20) - (22) and (23) - (27). The problems considered in the work were solved on grids of different dimensions. In any case, when solving data of nonlinear problems, the greatest function calls are Newton's method. For each task, the number of function calls in solving this method was taken 100%.

Conclusions. On the basis of the obtained results it can be argued that an alternating step during minimization of the quadratic functional of similar nonlinear IHCP is a necessary condition for reducing the total number of calls to the DHCP procedure. Testing methods (13), (14) and (15) were performed on various two-dimensional problems. A marked acceleration of calculations compared with the classical Newton method is shown.

The correctness of the formulation of the problem, the time of solving algebraic equations for a discrete analogue of the heat equation, the amount of computation for the optimization of a quadratic

functional in inverse problems (the number of calculations per iteration), the stability and convergence of unconditional optimization methods are among the main problems of solving inverse heat conduction problems. In this paper, a numerical analysis of a series of methods of unconditional optimization on nonlinear problems that enable us to reduce the time for searching for a numerical solution of a large class of nonlinear inverse heat conduction problems is carried out.

Key words: *inverse heat conduction problem (IHCP), direct heat conduction problem (DHCP), unconditional optimization methods, quadratic functional.*

*Стаття надійшла 20.09.2017
Прийнято до друку 30.10.2017*