

*The problem has been solved numerically with the use of numerically-analytical approach. On the base of the method using a system of the 15 equations are solved. Flow parameters, that are varied, are Mach number, angle of attack, angle of blade setting in plane of rotation, and value of blade bending. Several interesting facts have been discovered. In particular, using blade bend allowed decrease noise level that was observed before at the tip of blade without bend.*

*Analysis of calculated data also discovered effective using of the "sin-sin" twice-bent for the noise decreasing. In particular, it have been succeeded in 10-20 dB noise decreasing dependently both on calculation's situation and point position on the blade; sound energy concentrates not in 2-3 first harmonics, but in 5-6 one. More active capture of energy of high frequencies is seen.*

**Keywords:** "Blue-edge" blade, BVI-noise.

*Одержано редакцією 18.05.2017 р.  
Прийнято до публікації 12.06.2017 р.*

УДК 519.6:004.8

PACS 02.60.-x, 02.60.Pn, 02.70.Wz

**ГОЛОВНЯ Борис Петрович**

Черкаський національний університет

імені Богдана Хмельницького,

д. т. н., доцент, зав. кафедрою прикладної  
математики і інформатики

e-mail: bpgolovnya@gmail.com

## **РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПРИСТЕННОЙ ОБЛАСТИ ТУРБУЛИЗИРОВАННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ**

***Аннотация.** В работе, на основе модели турбулентности, разработанной автором, строится решение уравнения переноса энергии турбулентности в непосредственной близости от стенки. Показано, что решение хорошо соответствует известным теоретическим и экспериментальным данным.*

***Ключевые слова:** моделирование турбулентности, энергия турбулентности.*

### **Вступление**

Из экспериментов известно, что в пристенной области энергия турбулентности подчиняется соотношению  $k_+ = 1 \div 10 \times 10^{-3} u_+^2$ . Известные модели турбулентности в расчетах уверенно воспроизводят это соотношение, но не позволяют получить его теоретически. В работе [1] автором была предложена модель турбулентности, позволяющая получить это соотношение. В данной работе предложен вывод этой формулы.

### **1. Вывод уравнений, описывающих перенос турбулентности в непосредственной близости от стенки**

Предложенная модель турбулентности [1] позволяет теоретически рассчитать распределение энергии турбулентности в турбулизированном пограничном слое при произвольно малых числах Рейнольдса. Итак, пусть мы имеем плоскую пластину, обтекаемую турбулизированным потоком. На пластине образуется пограничный слой, ламинарный в начальной стадии и переходящий с развитием течения в турбулентный. Перенос турбулентности во внешнем потоке в этом случае можно описать системой уравнений (1)-(2) с начальными условиями (3).

$$U_e \frac{dk_e}{dx} = -\varepsilon_e, \quad (1)$$

$$U_e \frac{d\varepsilon_e}{dx} = -C_2 \frac{\varepsilon_e^2}{k_e}, \quad (2)$$

$$k_e(x_0) = k_0, \quad \varepsilon_e(x_0) = \varepsilon_0. \quad (3)$$

Система (1)-(2) имеет точное решение (4)

$$k_e = k_0 \left( \frac{\tilde{x}}{x_a} \right)^{\frac{1}{1-C_2}}, \quad \varepsilon_e = \varepsilon_0 \left( \frac{\tilde{x}}{x_a} \right)^{\frac{C_2}{1-C_2}}, \quad (4)$$

$$x_a = \frac{k_0 U_e}{\varepsilon_0 (C_2 - 1)}, \quad \tilde{x} = x_a - x_0 + x.$$

Приближенное решение системы (1)-(2) очень часто записывают в виде аппроксимационного соотношения вида (см. например Дыбан, Эпик [2])  $u' = C(x + x_0)^{-10/7}$ . Здесь  $C$  и  $x_0$  – константы, зависящие от турбулентности внешнего потока,  $x$  – расстояние от начала пластины. Так, например, в случае  $Tu_e = u'/U_e = 0.03$  хорошее согласование с экспериментальными данными дает соотношение  $u' = 10^{-4}(x + 0.4)^{-10/7}$ . Здесь  $x$  – расстояние в метрах от начала пластины,  $u'$  выражается в м/сек. Из этого выражения и уравнения (2) можно оценить диссипативный масштаб в свободном потоке. Вычисленный в  $\eta \left( \eta = \frac{U_e y}{\nu \sqrt{2Re}} \right)$  при числах  $Re < 100$  и  $Tu_e = 0.03 \div 0.05$  он оказывается равным  $L_\varepsilon = 1.5 \times 10^3 \div 2.5 \times 10^9$ . В то же время толщина пограничного слоя в этом случае хорошо известна из автомодельного решения и выраженная в  $\eta$  равна  $\delta = 3.52$ .

В этом случае внутри пограничного слоя значения функции  $f_0$  оцененные по выражению  $f_0 = 1 - \exp\left(-2.4 \frac{y}{L_\varepsilon}\right)$  оказываются величинами порядка  $10^{-4} \div 10^{-9}$ .

Отметим теперь некоторые очевидные особенности переноса турбулентности. Во первых, все изменения, обусловленные конвекцией, сосредоточены внутри пограничного слоя. Во вторых, вне слоя генерация турбулентности равна нулю в силу того, что  $\partial U / \partial y = 0$ . Поэтому вполне естественным представляется предположение о том, что значения  $k$  вне слоя практически постоянны, т.е. диффузионный перенос вне слоя исчезающе мал. В то же время, в связи с малостью  $f_0$  внутри пограничного слоя, диффузией и генерацией можно пренебречь и внутри слоя.

В итоге уравнения  $k$ - $\varepsilon$  модели приобретают вид

$$U \frac{\partial k_0}{\partial x} + V \frac{\partial k_0}{\partial y} = -\varepsilon_0, \quad (5)$$

$$U \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial y} = -C_2 \frac{\varepsilon_0^2}{k_0}. \quad (6)$$

Краевые условия имеют вид

$$y = 0, \quad k_0 = \varepsilon_0 = 0; \quad y \rightarrow \infty, \quad k_0 = k_e, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_e. \quad (7)$$

Значения  $k_e$  и  $\varepsilon_e$  рассчитывают по выражениям (4).

## 2. Теоретический анализ турбулентного течения в пограничном слое при малых числах Re

Система (5)-(6) заменой  $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_e}{k_e^{C_2}} k_0^{-C_2}$  приводится к одному уравнению:

$$U \frac{\partial k_0}{\partial x} + V \frac{\partial k_0}{\partial y} = - \frac{\varepsilon_e}{k_e^{C_2}} k_0^{C_2}. \quad (8)$$

Уравнение (8) объединим с уравнениями неразрывности и переноса импульса в ламинарном пограничном слое.

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Замена (4) не меняет внешнего вида системы (9) и она допускает решение в хорошо известных переменных  $\xi = \frac{U_e \tilde{x}}{\nu}$ ,  $\eta = \frac{U_e y}{\nu \sqrt{2\xi}}$ ,  $U = F U_e$ . Используя эти же переменные в уравнении (8) и проводя замену  $\tilde{k} = k_0/k_e$ , где  $k_e$  определяется соотношением (4), после несложных преобразований получаем (см. [130]):

$$2\xi F \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \xi} + V \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \eta} + \frac{2}{1-C_2} F \tilde{k} = \frac{2}{1-C_2} \tilde{k}^{C_2}. \quad (10)$$

Краевые условия для  $\tilde{k}$  выглядят следующим образом:

$$\tilde{k}(0) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \tilde{k}(\eta) = 1.$$

Так как краевые условия не зависят от  $\xi$ , то согласно теореме Моргана производная по  $\xi$  в (10) может быть отброшена. Таким образом, уравнение переноса  $k$  в пограничном слое можно упростить, заменив его уравнением

$$V \frac{d\tilde{k}}{d\eta} + \frac{2}{1-C_2} F \tilde{k} = \frac{2}{1-C_2} \tilde{k}^{C_2}. \quad (11)$$

Скорости  $V$  и  $F$  определяются из автомодельной формы записи системы (9):

$$V \frac{dF}{d\eta} = \frac{d^2 F}{d\eta^2}, \quad (12)$$

$$\frac{dV}{d\eta} + F = 0. \quad (13)$$

Подставляя уравнение неразрывности (13) в (11), уравнение (11) можно привести к виду

$$V \frac{d\tilde{k}}{d\eta} - \frac{2}{C_2 - 1} \frac{dV}{d\eta} \tilde{k} = -\frac{2}{C_2 - 1} \tilde{k}^{C_2}. \quad (14)$$

Уравнение (14) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{(-V)^{C_2-1}} \frac{d}{d\eta} (-V)^{C_2} \tilde{k} = A \tilde{k}^{C_2}. \quad (15)$$

Здесь  $A \equiv 1/(C_2-1)$ . Из уравнения неразрывности (13) следует, что  $V < 0$ , поэтому запись (15) корректна. Из (15) элементарными преобразованиями имеем:

$$\frac{d}{d\eta} (-V)^{C_2} \tilde{k} = (-V)^{C_2-1} A [(-V)^{C_2} \tilde{k}]^{C_2}. \quad (16)$$

Общее решение (16) имеет вид

$$\tilde{k} = \left\{ V^{C_2} \left[ C(1 - C_2) + 2 \int_0^\eta \frac{1}{V^{3C_2}} d\eta \right] \right\}^{\frac{1}{1-C_2}}. \quad (17)$$

Здесь  $C$  – произвольная постоянная.

Решение должно удовлетворять условиям  $\tilde{k}(0) = 0$ ,  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \tilde{k} = 1$ . Рассмотрим выражение  $2V^{C_2} \int_0^\eta V^{-3C_2} d\eta$ . По правилу Лопиталья, с учетом уравнения неразрывности (13), имеем:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} 2 \frac{\int_0^\eta V^{-3C_2} d\eta}{V^{C_2-1}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{dV}{d\eta}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{F} = \infty.$$

Так как показатель степени в (17) отрицателен, то отсюда следует, что  $\tilde{k}(0) = 0$  независимо от значений  $C$ . Аналогичным образом получаем, что

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} 2 \frac{\int_0^\eta V^{-3C_2} d\eta}{V^{C_2-1}} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{F} = 1.$$

Отсюда следует, что для выполнения условия  $\tilde{k}(\infty) = 1$  необходимо, чтобы  $C=0$ . В итоге, точное решение уравнения (16) имеет вид

$$\tilde{k} = \left[ 2V^{C_2} \int_0^\eta \frac{1}{V^{3C_2}} d\eta \right]^{\frac{1}{1-C_2}}. \quad (18)$$

Оценим поведение этого решения в пристенной области. Из решения Польгаузена следует, что вблизи стенки  $F \approx 1.5 \frac{\eta}{\delta_\eta} = 1.5 \frac{\eta}{3.52} \approx 0.4\eta$ . Тогда из уравнения неразрывности (13) следует, что  $V \approx -0.2\eta$ . Подставляя это соотношение в (18) имеем

$$\tilde{k} = \left[ 0.08\eta^4 \int_0^\eta \frac{d\eta}{-0.008\eta^6} \right]^{C_2-1} = 0.5^{\frac{1}{C_2-1}} \eta^{\frac{1}{C_2-1}}. \quad (19)$$

При  $C_2=1.5$  имеем  $\tilde{k} \approx 1.56F^2$ . В случае  $Tu_e=0.03 \div 0.05$ , учитывая, что у стенки  $U_+=y_+$ , получаем  $k_{0+}=1.4 \times 10^{-3} \div 9.9 \times 10^{-3} y_+^2$ , что находится в хорошем соответствии с экспериментальными данными по поведению  $k$  в пристеночной области развитого турбулентного пограничного слоя.

Следует отметить, что, вообще говоря, соотношение (19) дает несколько большую, чем квадратичная, скорость затухания  $k$  у стенки, т.к. из приведенных выше рассуждений следует, что  $C_{\varepsilon 2}$  всегда меньше, чем 1.5.

К сожалению, в связи с несобственностью интеграла в (18), вызванной тем, что  $V(0)=0$ , выражение (18) непригодно для точных расчетов  $\tilde{k}$  по найденным значениям  $V$ . По этой причине уравнение (19) решалось численно.

### 3. Сопоставление решений упрощенного уравнения с экспериментальными данными. Обсуждение результатов

Уравнение (10) решалось на неравномерной сетке в области  $0 < \eta < 1500$  методом стационарирования. Скорости  $V$  и  $F$  брались из предварительно проведенного решения системы (12)-(13). Зависимости результатов от шагов сетки не обнаружено.

Расчетные значения  $k_0/k_e$  и  $\varepsilon_0/\varepsilon_e$  приведены на рис. 1. Как и ожидалось, все изменения параметров сосредоточены в ламинарном пограничном слое, т.е. в области  $\eta < 3.52$ .

К сожалению, экспериментальные данные о распределении  $k$  при  $Re < 1000$  автору неизвестны. Поэтому на рис. 2 приведены результаты сопоставления расчетов  $k_0$  по уравнению (19) с результатами моделирования ламинарно-турбулентного перехода, проведенного LES-методом (Янг и Вок [3]). Данные Янга и Вока получены при  $Re=1.6 \times 10^4$ . Результаты приведены в виде зависимости  $k_0/k_{\text{перегиба}}$  от  $y/y_{\text{перегиба}}$ . Здесь  $k_{\text{перегиба}}$  – значение  $k_0$  в точке перегиба на профиле  $k_0$ ,  $y_{\text{перегиба}}$  – координата этой точки. Совпадение практически точное.

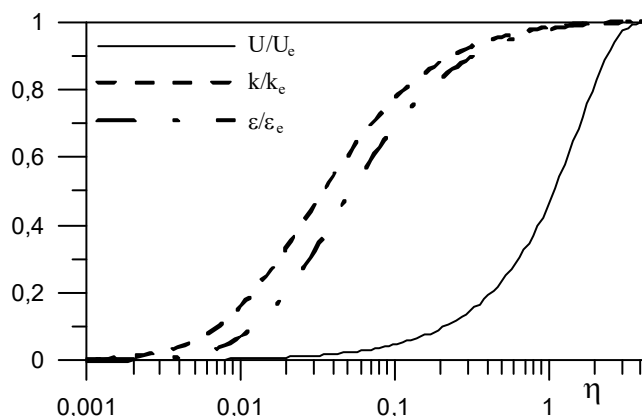


Рис. 1. Расчет распределения энергии и диссипации при малых  $Re$

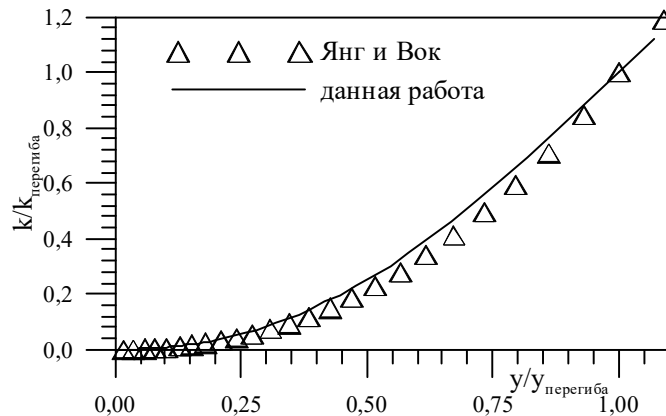


Рис. 2. Сопоставление расчетов  $k$  с результатами LES-моделирования Янга и Вока [3] при  $Re=1.6 \cdot 10^4$ .

Более того, на рис. 3 приведено сопоставление расчетов  $k_0$  с расчетами течения в развитом пограничном слое, проведенными по моделям Нагано-Тагава [4], Чена [5] и Лаундера-Шармы [6]. Результаты также представлены в виде зависимости  $k/k_{перегиба}$  от  $y/y_{перегиба}$ . Соответствие по крайней мере с двумя расчетами из трех очень хорошее.

Чтобы пояснить смысл этого соответствия, запишем уравнение переноса  $k_0$  в виде

$$f_0 \frac{\partial}{\partial y} D_{diff} \frac{\partial k_0}{\partial y} = conv(k_0) - (f_0 P - \varepsilon_0) \quad (11)$$

Здесь  $conv(k_0)$  – оператор конвективного переноса.

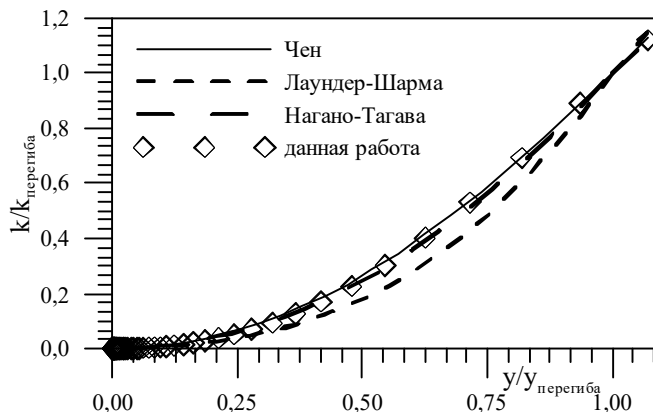


Рис. 3. Сопоставление результатов расчетов  $k$  с расчетами энергии турбулентности по трем моделям.

Как известно, точка перегиба – это точка изменения знака второй производной. В непосредственной близости от стенки профиль  $k_0$  имеет выпуклость вниз, т.е. вторая производная положительна. Тогда из (11) следует, что в этой области  $conv(k_0) > f_0 P - \varepsilon_0$ , т.е. распределение  $k_0$  в основном определяется конвекцией. На некотором расстоянии от стенки профиль  $k_0$  становится выпуклым вверх, т.е. вторая производная становится отрицательной, т.е.  $conv(k_0) < f_0 P - \varepsilon_0$ . Таким образом можно сказать, что в области  $y < y_{перегиба}$  распределение  $k_0$  в основном определяется конвективным переносом, а в области  $y > y_{перегиба}$  – генерацией и диссипацией. Распределение  $k_0$  в области преимущественного влияния конвекции хорошо описывается уравнением (14). Более

того, это распределение, вычисленное в переменных  $k/k_{\text{перезгиба}}$  от  $y/y_{\text{перезгиба}}$  сохраняется практически неизменным начиная от самого начала пластины.

### Выводы

В работе получено теоретическое решение для распределения энергии турбулентности в непосредственной близости от стенки. Решение очень хорошо согласуется с известными экспериментальными и расчетными данными и является дополнительным подтверждением верности модели турбулентности [1].

### Список использованной литературы:

1. Golovnya B.P. Modelling of the fluctuating component in the form of the sum of an infinite number of random quantities// Int.J. of Heat and Mass Transf. - V 52 - 2009 - pp.5218-5228
2. Дыбан Е.П., Эпик Э.Я. Теплообмен и гидродинамика турбулизированных потоков. - Киев. - Наукова думка. – 1985 - 295 с.
3. Yang, Z., Voke, P.R. Large-Eddy Simulation Studies of Bypass Transition.// В кн. Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2, ed. W. Rodi and F. Martelli. : Amsterdam. 1993.
4. Nagano Y. Tagawa M. An improved (k-ε) Model for Boundary Layer Flows. // J. of Fluid Eng. - 1990. - V. 112. - P.33-39.
5. Chien K.-Y. Prediction of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds- Number Turbulence Model // AIAA Journal – 1982 - V.20 - P.34-38.
6. Launder B.E., Sharma B.I. Application of the Energy-Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc. // Letters in Heat and Mass Transfer – 1974 - V. 1 - P. 131-138.

### References:

1. Golovnya B.P. Modelling of the fluctuating component in the form of the sum of an infinite number of random quantities// Int.J. of Heat and Mass Transf. - V 52 - 2009 - pp.5218-5228
2. Dyban E.P., Epik E.Ya. Heat-and-mass transfer an hydrodynamics of turbulized flows. - Kyev. – Naykova dumka. – 1985 - 295 с. (in Rus)
3. Yang, Z. & Voke, P.R. Large-Eddy Simulation Studies of Bypass Transition.// В кн. Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2, ed. W. Rodi and F. Martelli. : Amsterdam. 1993.
4. Nagano Y. Tagawa M. An improved (k-ε) Model for Boundary Layer Flows. // J. of Fluid Eng. - 1990. - V. 112. - P.33-39.
5. Chien K.-Y. Prediction of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds- Number Turbulence Model // AIAA Journal – 1982 - V.20 - P.34-38.
6. Launder B.E., Sharma B.I. Application of the Energy-Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc. // Letters in Heat and Mass Transfer – 1974 - V. 1 - P. 131-138

### GOLOVNYA Boris,

The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Doctor of Science, Chair of Department of Applied Mathematics and Informatics

### CALCULATION OF THE DISTRIBUTION OF THE TURBULENCE ENERGY IN THE WALLED TURBULIZED BOUNDARY LAYER INTRODUCTION

**Abstract. Introduction.** In the works [1]-[2], the author proposed a new technique for designing turbulence models that differed significantly from the classical approach to developing such models. The equations of the model obtained are simple and contain much less adjusting functions than existing models for simulation of turbulent flows in the presence of hard surfaces.

An important stage in approbation of new models of turbulence is their verification on problems with a known result. As a rule, the list of such problems includes the results of experiments approved in the conferences on modeling turbulence.

One of the well-known and experimentally verified facts is a following statement. In close proximity to the wall, the turbulence energy is proportional to the square of the distance from the wall, and the turbulent friction – to the cube of the distance. All models of turbulence are required to ensure the fulfillment of these ratios. In all models known to the author this was tested by solving on the complete equations of the model in the immediate vicinity of the wall.

At the same time, the author does not know any simplified version of any model of turbulence for the calculation of currents in the immediate vicinity of the wall. In this paper, a simplified version is proposed.

**Purpose.** *Approbation of the developed model. Demonstration of the possibilities of the approach to the construction of models of turbulence.*

**Results.** *By using the estimations of the model terms in the near-wall region and rejection of small ones, a simplified version of the turbulence model developed by the author was proposed. The simplified version makes it possible to simulate turbulence in the immediate the near-wall region, without taking into account the effect of the external flow. Furthermore. In the immediate vicinity of the wall, a simplified version allows an analytical solution that well corresponds to the experimental and simulation data of different authors. The numerical solution of the equations of the simplified model in a more extended region also corresponds well to a variety of data. Analysis of the results of calculations makes it possible to propose a new explanation of the behavior of turbulence in the near-wall region.*

*Одержано редакцією 07.09.2017 р.  
Прийнято до публікації 25.09.2017 р.*

УДК 519.6:004.8, 536.24

PACS 02.60.-x, 02.60.Pn, 02.70.Wz,  
51.20.+d, 82.40.Ck

**ГОЛОВНЯ Борис Петрович**

Черкаській національній університет  
імені Богдана Хмельницького, д.т. н.,  
доцент, завідувач кафедри прикладної  
математики та інформатики  
e-mail: bpgolovnya@gmail.com

**ХАЙДУРОВ Владислав Володимирович**

Київській міжнародній університет,  
викладач кафедри комп'ютерних наук  
e-mail: allif0111@gmail.com

## **ДЕЯКІ ШВИДКІСНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ**

**Анотація.** *У статті проведений чисельний аналіз серії методів безумовної оптимізації на нелінійних задачах, які дають можливість зменшити час пошуку чисельного розв'язку великого класу нелінійних ОЗТ. Також у роботі запропоновані суттєві модифікації класичного методу Ньютона, які дають можливість отримати шуканий чисельний розв'язок нелінійних задач значно швидше у порівнянні з класичним методом Ньютона. Модифікації методу Ньютона зі змінним кроком дають значно швидшу збіжність та дають можливість отримати досить швидко розв'язки нелінійних ОЗТ.*

**Ключові слова:** *обернена задача теплопровідності (ОЗТ), пряма задача теплопровідності (ПЗТ), методи безумовної оптимізації, квадратичний функціонал.*

### **Вступ**

Експериментальні методи дослідження теплофізичних процесів та їх систем є найбільш достовірним джерелом інформації про тепловий стан об'єкту [7]. Особливого значення теорія і практика розв'язання обернених задач набувають у наш час, коли в силу обставин що склалися, об'єкти енергетики, промисловості, транспорту, господарства, комунікацій, будівель та споруд відпрацювали свій плановий ресурс і потребують уникнення техногенних катастроф, а саме потребують термінового оновлення, модернізації і реконструкції. Першим кроком в реалізації програми реконструкції перерахованих вище об'єктів є діагностика їх технічного стану і визначення залишкового ресурсу, тобто часу, протягом якого даний об'єкт може надійно і ефективно працювати, не ставлячи під загрозу життя людей і навколишнє