Conclusion. *Swarm intelligence methods can be effectively used to solve the engineering constrained optimization problems. At the same time, the differential evolution method, which relates to evolutionary algorithms, proved to be more effective. Consequently, the considered methods demonstrated their effectiveness and competitiveness in solving complex optimization problems, and foresee further development.*

Key words: *swarm intelligence methods, bacterial foraging optimization algorithm, wolf pack search, differential evolution, constrained optimization problem.*

Стаття надійшла 21.03.2017
Прийнято до друку 24.04.2017

УДК 519.85

PACS 89.20.Bb; 89.20.Ff; 89.20.Kk; 89.40.-a; 89.65.Lm

СТАНІНА Ольга Дмитрівна
ДВНЗ «Український хіміко-технологічний університет», асистент кафедри інформаційних систем
e-mail: stanina@i.ua

КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ В ОДНОМУ КЛАСІ НЕПЕРЕРВНИХ БАГАТОЕТАПНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН

Анотація. *У роботі розглянуто двохетапну задачу розміщення підприємств з неперервно розподіленим ресурсом, як різновид задачі оптимального розбиття множин з розміщенням центрів першого етапу без обмежень на їх потужності. Метою даної роботи є отримання необхідних та достатніх умов оптімальності для задачі оптимального розбиття множин з розміщенням центрів першого етапу без обмежень на їх потужності. Для двохетапної задачі розміщення підприємств з неперервно розподіленим ресурсом сформульовані необхідні і достатні умови оптимальності. Показано, що така задача через функціонал Лагранжа може бути зведена до задачі оптимізації негладкої функції скінченного числа змінних.*

Ключові слова: *оптимальне розбиття множин, задачі розміщення-розподілу, багатоетапні задачі розбиття, критерій оптимальності*

Вступ

З розвитком виробництва та інфраструктури актуальними становляться задачі розміщення-розподілу [2, 7], в яких, наприклад, потрібно знайти на деякій території оптимальні місця розташування підприємств-виробників і виявити зони їх обслуговування так, щоб мінімізувати транспортні витрати на доставку виробленої продукції до споживачів. На даним момент існує декілька підходів до моделювання та розв’язування таких задач. Один з них приводить до дискретних задач розміщення-розподілу (наприклад, задач розміщення на графі або вибір місць розташування із заданої скінченної кількості точок), інший описує розміщення підприємств на певній території з урахуванням неперервності розподілення продукту у цьому регіоні. Розробка математичних моделей та методів таких задач є колом досліджень різноманітних математичних шкіл [3, 8-10, 12], зокрема, науковою школою член-кореспондента НАН України, доктора фізико-математичних наук, заслуженого діяча науки і техніки України професора О.М. Кісельової [4-6]. Сьогодні в рамках вказаної школи проводяться дослідження, пов'язані з подальшим узагальненням теорії оптимального розбиття множин (ОРМ) та розповсюдженням її на нові класи задач.

Одним з таких напрямів є неперервні задачі ОРМ при наявності додаткових зв'язків між центрами, урахуванні різних категорій центрів, що розміщуються, та інш.

Окремо необхідно відзначити перспективність розгляду багатоетапних задач розміщення підприємств з неперервно-розподіленим ресурсом, як різновид неперервних задач ОРМ. Серед авторів, що займались дискретними багатоетапними задачами, слід відзначити В.Л. Береснева, Е. Х. Гімаді, Ю.А. Кочетова, В.А. Трубіна, Д.Б. Юдіна та інших [3, 8-10, 12].

Дана робота є послідовним продовженням досліджень, пов’язаних з вивченням властивостей багатоетапних задач ОРМ та їх розв'язків. Вперше, математичні моделі таких задач були приведені в [7]. Вони представляють собою двоетапні неперервні задачі ОРМ з розміщенням центрів першого етапу і враховують той факт, що підприємства першого етапу мають бути пов’язані з підприємствами другого етапу. Останній факт обумовив ще одну назву таких задач − задачі ОРМ з додатковими зв’язками.

Метою цієї роботи є отримання необхідніх и достатніх умов оптімальності для задачі ОРМ з розміщенням центрів першого етапу без обмежень на потужності.

1. Постановка задачі оптимального розбиття множин з додатковими зв’язками

Змістовну постановку задачі оптимального розбиття множин з додатковими зв'язками можна сформулювати у такий спосіб [7, 11]. Нехай існує деяке виробництво, пов'язане з суб'єктами, які мають збирати (добувати) сировину від постачальників, неперервно розподілених в деякій області Ω, переробляти її і відправляти для реалізації (або подальшої переробки) в пункти, розташування яких заздалегідь відомо. Підприємства, що переробляють сировину, будемо називати пунктами первинної переробки або підприємствами першого етапу, а пункти подальшої переробки – підприємствами другого етапу. Припустимо також, що:

– потужність j-го підприємства другого етапу відома і дорівнює b_j^{II}, $j = 1, 2, .., M$;

– запас ресурсу в кожній точці області Ω оцінений і описується функцією $\rho(x)$;

– відомий спосіб розрахунку вартості доставки одиниці ресурсу $c_i^I(x, \tau_i^I)$, $i = 1, 2, ..., N$ – з точки x в пункт первинної переробки τ_i^I,

– вартість перевезення одиниці продукту $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ з пункту первинної переробки τ_i^I в пункт τ_j^{II} пропорційна відстані між цими пунктами;

– кожен постачальник сировини $x \in \Omega$ пов'язаний тільки з одним підприємством першого етапу τ_i^I, $i = \overline{1, N}$, який в свою чергу має бути пов'язаний хоча б з одним підприємством другого етапу τ_j^{II}, $j = \overline{1, M}$.

Окрім того, будемо вважати, що потужність i-го виробника першого етапу визначається сумарним запасом ресурсу в області, що обслуговується цим підприємством, а його прибуток залежить тільки від транспортних витрат.

Необхідно визначити місця розташування підприємств першого етапу, зони обслуговування для них та обсяги перевезень між підприємствами першого та другого етапів так, щоб забезпечити мінімальну сумарну вартість доставки сировини і кінцевої продукції.

Математичною моделлю описаної задачі є наступна двоетапна неперервна задача розбиття множин з розміщенням центрів підприємств першого етапу.

Нехай Ω – замкнута, обмежена, опукла, вимірна за Лебегом множина евклідового простору E^n; $\sum_{\Omega}^{N}$ – множина усіх можливих розбиттів множини Ω на N підмножин, що не перетинаються, а саме:

$$\sum_{\Omega}^{N}=\{(\Omega_1,...,\Omega_N):\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i=\Omega, mes(\Omega_i\cap\Omega_j)=\varnothing, i\neq j, i,j=1,...,N\}.$$

Задача А. Потрібно знайти таке розбиття множини Ω на N вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_N$ (серед яких можуть бути й порожні), визначити координати $\tau_i^I,...,\tau_N^I$ центрів цих підмножин та такі величини $v_{11},...,v_{NM}$, які забезпечують мінімум функціоналу:

$$F(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{\tau_1^I,...,\tau_N^I\},\{v_{11},...v_{NM}\})=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)dx+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})v_{ij}, \tag{1}$$

за умов

$$\int_{\Omega_i}\rho(x)dx=\sum_{j=1}^{M}v_{ij},\ i=\overline{1,N}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N}v_{ij}=b_j^{II},\ j=\overline{1,M}, \tag{3}$$

$$\{\Omega_1,...,\Omega_N\}\in\sum_{\Omega}^{N},$$
$$v_{ij}^{II}\geq 0,\ i=1,2,...,N,\ j=1,2,...,N,\ \tau^I=(\tau_1^I,\tau_2^I,...,\tau_N^I),\ \tau^I\in\Omega^N. \tag{4}$$

Тут $x=(x^{(1)},...,x^{(n)})\in\Omega$; b_j^{II}, $j=\overline{1,M}$, – задані дійсні невід'ємні числа.

Функції $c_i^I(x,\tau_i^I)$, $i=\overline{1,N}$ – дійсні, обмежені, вимірні по аргументу x на Ω, та опуклі по τ на Ω для всіх $i=\overline{1,N}$; $\rho(x)$ – дійсна визначена на множині Ω функція, що інтегрується; τ_j^{II}, $j=\overline{1,M}$ – задані точки області Ω, $c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,M}$ – функції скінченого числа (NM) змінних.

Тут обмеження (2) висловлюють баланс між потужностями підприємств першого та другого етапів, отже мають бути виконані умови розв'язності задачі (1) – (4), які визначає наступна лема.

Лема 1. Нехай, в задачі (1) – (4) $\int_{\Omega}\rho(x)dx=S$. Тоді, якщо виконується умова $\sum_{j=1}^{M}b_j^{II}=S$, то допустима множина розв’язків задачі (1) – (4) є непорожньою.

Введемо характеристичну функцію підмножини Ω_i у вигляді:

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}1,\ x\in\Omega_i,\\ 0,\ x\in\Omega\backslash\Omega_i,\quad i=1,...,N.\end{cases}$$

Розглянемо функціонал

$$I(\lambda(\cdot),\tau_i^I,v)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)\lambda_i(x)dx+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})v_{ij},$$

де $\lambda(x)=(\lambda_1(x),...,\lambda_N(x))$, $x\in\Omega$, $\tau_i^I=(\tau_1^I,...,\tau_N^I)\in\Omega^N$, $v=(v_{11},...,v_{NM})\in R_{NM}^{+}$.

Очевидно, що має місце рівність

$$I(\lambda(\cdot),\tau_i^I,v)=F(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{\tau_1^I,...,\tau_N^I\},\{v_{11},...,v_{NM}\}),$$

Перепишемо задачу А в термінах характеристичних функцій $\lambda_i(x)$ підмножини Ω_i, $i=\overline{1,N}$ в наступному вигляді.

Задача Б. Знайти

$$\min_{\lambda(\cdot),\tau^I,v} I(\lambda(\cdot),\tau^I,v),$$

при обмеженнях

$$\int_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)dx=\sum_{j=1}^M v_{ij},\ i=\overline{1,N},$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij}=b_j^{II},\ j=\overline{1,M};$$

$$\lambda(\cdot)\in\Gamma_1,\ \tau^I\in\Omega^N, v\in R_{NM}^+;$$

де

$$\Gamma_1=\Big\{\lambda(\cdot)=\lambda_1(\cdot),...,\lambda_N(\cdot):\lambda_i(x)=0\vee 1, i=\overline{1,N},\ x\in\Omega,$$

$$\sum_{i=1}^N\lambda_i(x)=1, x\in\Omega\Big\}. \qquad (5)$$

Задача Б є задачею нескінченновимірного математичного програмування з булевими змінними $\lambda(\cdot)$. Перейдемо від неї до задачі зі значеннями $\lambda(\cdot)$ з відрізка [0,1].

Задача В. Знайти $\lambda^*(\cdot)\in\Gamma_2$, $\tau_*^I\in\Omega^N$ и $v_{ij}^*\in R_{NM}^+$ такі, що

$$I(\lambda^*(\cdot),\tau_*^I,v_{ij}^*)=\min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma_2,\tau^I\in\Omega^N,v\in R_{NM}^+} I(\lambda(\cdot),\tau^I,v),$$

$$\int_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)dx=\sum_{j=1}^M v_{ij},\ i=\overline{1,N},$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij}=b_j^{II},\ j=\overline{1,M},$$

де

$$\Gamma_2=\left\{\lambda(\cdot)=\lambda_1(\cdot),...,\lambda_N(\cdot):\lambda_i(x)\in\Gamma,\sum_{i=1}^N\lambda_i(x)=1, x\in\Omega\right\}$$

$$\Gamma=\{\lambda(\cdot)=(\lambda_1(\cdot),...,\lambda_N(\cdot)):0\le\lambda_i(x)\le 1,\ \ \forall x\in\Omega,\ \ i=\overline{1,N}\}.$$

В [6] показано, що Γ_2 – опукла, замкнена, обмежена множина Гільбертового простору $L_2^N(\Omega)$.

Зрозуміло, що

$$I(\lambda^*(\cdot),\tau_*^I,v^*)=\min_{\tau^I\in\Omega^N,v\in R_{NM}^+}\left[\min_{\lambda(\cdot)\in\hat{A}_2} I(\lambda(\cdot),\tau^I,v)\right], \qquad (6)$$

Згідно з результатів [3-5] при кожній фіксованій парі $\tau^I\in\Omega^N$ та $v\in R_{NM}^+$ внутрішня задача (6) лінійна відносно $\lambda(\cdot)$ на Γ_2 і є глобально розв’язною. Крім того, серед множини оптимальних розв’язків задачі В є оптимальні розв’язки задачі Б.

2. Необхідні і достатні умови оптимальності

Для отримання необхідних і достатніх умов оптимальності для задачі В введемо функціонал Лагранжа в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L(\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\},\Psi(\cdot)) &= \int_\Omega \sum_{i=1}^N c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)\lambda_i(x)dx + \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})v_{ij} + \\ &+\sum_{j=1}^M \eta_j(-\sum_{i=1}^N v_{ij}+b_j^{II}) + \int_\Omega \psi_0(\sum_{i=1}^N\lambda_i(x)-1)dx + \sum_{i=1}^N\psi_i(\int_\Omega\rho(x)\lambda_i(x)dx - \sum_{j=1}^M v_{ij}) = \\ &= \int_\Omega\sum_{i=1}^N(c_i^I(x,\tau_i^I)+\psi_i)\rho(x)\lambda_i(x)dx + \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M(c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})-\eta_j-\psi_i)v_{ij} + \\ &+\sum_{j=1}^M\eta_j b_j^{II} + \int_\Omega\psi_0(\sum_{i=1}^N\lambda_i(x)-1)dx, \end{aligned} \tag{7}$$

де $\lambda(\cdot)\in\Gamma$, $\tau^I\in\Omega^N$, $v\in R_{NM}^+$, $\Psi(x), x\in\Omega$ – вектор-функція, $\Psi(\cdot)\in\Lambda$, $\Lambda=\{\Psi(\cdot)=(\psi_0(\cdot),\psi,\eta):\psi_0(\cdot)\in L_\Omega^2, \psi\in E_N, \eta\in E_M\}$.

Пару елементів $(\{\lambda^*(\cdot),\tau_*^I,v^*\},\Psi^*(\cdot))$ назвемо сідловою точкою функціоналу (7) на множині $\{\Gamma\times\Omega^N\times R_{NM}^+\}\times\Lambda$, якщо

$L(\{\{\lambda^*(\cdot),\tau_*^I,v^*\},\Psi(\cdot))\le L(\{\lambda^*(\cdot),\tau_*^I,v^*\},\Psi^*(\cdot))\le L(\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\},\Psi^*(\cdot))$ для всіх $\lambda(\cdot)\in\Gamma$, $\tau^I\in\Omega^N$, $\Psi(\cdot)\in\Lambda, v\in R_{NM}^+$ або

$$L(\{\lambda^*(\cdot),\tau^{I*},v^*\},\Psi^*(\cdot)) = \min_{\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\}\in\tilde{A}\times\Omega^N\times R_{NM}^+}\left[\max_{\Psi(\cdot)\in\Lambda} L(\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\},\Psi(\cdot))\right] =$$

$$= \max_{\Psi(\cdot)\in\Lambda}\left[\min_{\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\}\in\Gamma\times\Omega^N\times R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\},\Psi(\cdot))\right]$$

Лема 2. Для того, щоб пара $\left(\{\lambda(\cdot)^*,\tau^{I*},v^*\},\Psi^*(\cdot)\right)\in\{\Gamma\times\Omega^N\times R_{NM}^+\}\times\Lambda$ була сідловою точкою функціоналу (7), необхідно і достатньо існування такого, відмінного від тотожного нуля, вектора $\{\Psi^*(\cdot)\}$, щоб виконувалися умови:

1) $L(\{\lambda^*(\cdot),\tau^{I*},v^*\},\Psi^*(\cdot))\le L(\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\},\Psi^*(\cdot))$, $\left(\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\},\Psi^*(\cdot)\right)\in\{\Gamma\times\Omega^N\times R_{NM}^+\}\times\Lambda$,

2) $\sum_{i=1}^N\lambda_i^*(x)=1$, $\int_\Omega\rho(x)\lambda_i^*(x)dx=\sum_{j=1}^M v_{ij}^*$, $\sum_{i=1}^N v_{ij}^* = b_j^{II}$.

Згідно з теоремою Куна-Таккера [1], перша компонента сідлової точки функціоналу Лагранжа і буде оптимальним розв'язком задачі B.

Отже, перейдемо до розв'язання наступної задачі:

$$L(\{\lambda^*(\cdot),\tau^{I*},v^*\},\Psi^*(\cdot)) = \max_{\Psi(\cdot)\in\Lambda}\min_{\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\}\in\Gamma\times\Omega^N\times R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\},\Psi(\cdot)). \tag{8}$$

Нехай $(\bar{\tau}^I,\bar{v})$ – довільний, але фіксований елемент з множини $\Omega^N\times R_{NM}^+$. Розглянемо наступну задачу: знайти вектор-функцію $\bar{\lambda}(\cdot)\in\Gamma$, яка забезпечує $\min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma} L(\{\lambda(\cdot),\bar{\tau}^I,\bar{v}\},\bar{\Psi}(\cdot))$ при будь-якому $\bar{\Psi}(\cdot)\in\Lambda$, де

$$\begin{aligned} L(\lambda(\cdot),\bar{\tau}^I,\bar{v},\bar{\Psi}(\cdot)) &= \int_\Omega\sum_{i=1}^N(c_i^I(x,\bar{\tau}_i^I)\rho(x)+\bar{\psi}_0(x)+\bar{\psi}_i\rho(x))\lambda_i(x)dx + \\ &+\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M(c_{ij}^{II}(\bar{\tau}_i^I,\tau_j^{II})-\bar{\eta}_j-\bar{\psi}_i)\bar{v}_{ij} + \sum_{j=1}^M\bar{\eta}_j b_j^{II} - \int_\Omega\bar{\psi}_0(x)dx, \end{aligned} \tag{9}$$

Очевидно, що

$$\min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma} L(\lambda(\cdot),\overline{\tau}^I\overline{v},\overline{\Psi}(\cdot)) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(c_{ij}^{II}(\overline{\tau}_i^I,\tau_j^{II}) - \overline{\eta}_j - \overline{\psi}_i)\overline{v}_{ij} + \sum_{j=1}^{M}\overline{\eta}_j b_j^{II} - \int_\Omega \overline{\psi}_0(x)dx +$$

$$+\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \min_{0\le\lambda_i(x)\le 1}[(c_i^I(x,\overline{\tau}_i^I)\rho(x) + \overline{\psi}_0(x) + \overline{\psi}_i\rho(x))\lambda_i(x)]dx .$$

Оптимальний розв'язок задачі мінімізації функціоналу (9) за змінною $\lambda(\cdot)\in\Gamma$ при довільних фіксованих векторах $\overline{\tau}^I$, $\overline{v}$ та вектор-функції $\overline{\Psi}(\cdot)$ можна записати в наступний спосіб: м.в. для $x\in\Omega$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, \textit{ якщо } \widetilde{n}_i^I(x,\overline{\tau}_i^I)\rho(x) + \overline{\psi}_0(x) + \overline{\psi}_i\rho(x) > 0 \\ 0, \textit{ якщо } \widetilde{n}_i^I(x,\overline{\tau}_i^I)\rho(x) + \overline{\psi}_0(x) + \overline{\psi}_i\rho(x) < 0 \\ \in[0,1], \textit{якщо} \widetilde{n}_i^I(x,\overline{\tau}_i^I)\rho(x) + \overline{\psi}_0(x) + \overline{\psi}_i\rho(x) = 0 \end{cases}, \ i=\overline{1,N},\ \overline{\Psi}(\cdot)\in\Lambda. \quad (10)$$

З усіх $\overline{\Psi}(\cdot)\in\Lambda$ виберемо такі $\overline{\Psi}^*(\cdot)\in\Lambda$, що відповідні їм за формулою (10) $\lambda_i^*(x)$ при фіксованих інших параметрах будуть характеристичними функціями множини Ω_i^*, $i=\overline{1,N}$, які задовольнятимуть умову

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x) = 1, \text{ м.в для } x\in\Omega .$$

Тобто для усіх $x\in\Omega$ компоненти вектор-функції $\lambda^*(x)$ можна обчислити за однією з наступних формул: або

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, \textit{ якщо } \widetilde{n}_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x) + \overline{\psi}_0^*(x) + \overline{\psi}_i^*\rho(x) > 0, \textit{ тоді } x\notin\Omega \\ 1, \textit{ якщо } \widetilde{n}_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x) + \overline{\psi}_0^*(x) + \overline{\psi}_i^*\rho(x) = 0, \textit{ тоді } x\in\Omega \end{cases}, \quad (11)$$

за умови $mes(x\in\Omega : c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x) + \overline{\psi}_0^*(x) + \overline{\psi}_i^*\rho(x) < 0) = 0$, або

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x) + \overline{\psi}_0^*(x) + \overline{\psi}_i^*\rho(x) > 0, \text{ тоді } x\notin\Omega_i^*, \\ 1, \text{ якщо } c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x) + \overline{\psi}_0^*(x) + \overline{\psi}_i^*\rho(x) < 0, \text{ тоді } x\in\Omega_i^*, \end{cases} \quad (12)$$

за умови $mes(x\in\Omega : c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x) + \overline{\psi}_0^*(x) + \overline{\psi}_i^*\rho(x) = 0) = 0$.

Нехай $\overline{\Psi}(\cdot) = \overline{\Psi}^*(\cdot)$, а $\lambda^*(\cdot)$ − обрана за (11). Тоді, з леми 2 випливає, що при фіксованих $\overline{\tau}^I$, $\overline{v}$ та вектор-функції $\overline{\Psi}(\cdot)$ вектор-функція $\lambda^*(\cdot)$ є першою компонентою сідлової точки функціоналу Лагранжа (7). Теж саме можна сказати про вектор-функція $\lambda^*(\cdot)$, яка визначається за формулою (12).

Порівнюючи (11) та (12), можна побачити, що координати вектор-функції $\lambda_i^*(\cdot)$ з (11) та (12) визначають одне й те саме розбиття $(\Omega_1^*,...,\Omega_N^*)$, відрізняється лише форма запису умов приналежності точки x до підмножини Ω_i^*, $i=\overline{1,N}$. Тому вирази (11) та (12) будемо вважати різною формою запису однієї і тієї ж відповідного елементу першої компоненти сідлової точки $\left(\left\{\lambda(\cdot)^*,\tau^{I*},v^*\right\},\Psi^*(\cdot)\right)\in\left\{\Gamma\times\Omega^N\times R_{NM}^+\right\}\times\Lambda$.

Зазначимо, що форма запису (12) переважніша за вираз (11), оскільки в цьому випадку майже всюди для $x\in\Omega$ компоненти вектор-функції $\lambda^*(\cdot)$ можуть бути записані у компактному вигляді через функцію $sign(\cdot)$:

$$\lambda_i^*(x) = \frac{1}{2}\{1 - sign(c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i\rho(x))\}, i=\overline{1,N}. \quad (13)$$

При цьому умову $mes(x \in \Omega : c_i^I(x, \tau_i^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) = 0) = 0$ будемо називати **умовою сильної регулярності** для функціоналу (7).

В силу довільності вибору векторів $\overline{\tau}^I$, $\overline{v}$, в формулі (13) позначку «$\bar{\cdot}$» надалі будемо опускати. Підставивши $\lambda_i^*(\cdot)$ з (13) в рівності (2), (5), отримаємо майже всюди для $x \in \Omega$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} sign(c_i^I(x, \tau_i^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x)) = N - 2 \\ \int\limits_{\Omega} \rho(x) sign(c_i^I(x, \tau_i^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) dx = S - 2\sum\limits_{j=1}^{M} v_{ij}, \quad i = \overline{1, N}. \end{cases} \tag{14}$$

Таким чином, при виконанні умов сильної регулярності для функціоналу (7) для будь-яких векторів $\tau^I \in \Omega^N$, $v \in R_{NM}^+$ перша компонента оптимального розв'язку задачі В однозначно визначається за формулами (13), причому функція $\psi_0(\cdot)$ та константи $\psi_1, ..., \psi_N$ − розв'язок системи (14).

Далі будемо припускати, що для задачі А виконуються такі умови:

$$\rho(x) > 0, \text{ майже всюди для } x \in \Omega, \tag{15}$$

$$mesK = 0, \ K = \{x \in \Omega : c_i^I(x, \tau_i^I) - c_j^I(x, \tau_j^I) = const, i \neq j, i, j = \overline{1, N}. \tag{16}$$

Справедливі наступні твердження.

Твердження 1. Нехай для задачі А має місце умова (15), $v \in R_{NM}^+$, вектор $\tau^I \in \Omega^N$ такий, що виконується умова (16), а компоненти вектор-функції $\Psi(\cdot)$ задовольняють систему (14), тоді для функціоналу $L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, v\}, \Psi(\cdot))$ умова сильної регулярності виконується.

Твердження 2. Нехай $v = \overline{v}$ − довільний допустимий вектор з множини R_{NM}^+, для якого виконуються умови (2), (3). Якщо виконані умови (15), (16), то множини перших компонент оптимальних розв'язків задач Б та В співпадають.

Розглянемо задачу А, для будь-якого, довільно вибраного фіксованого $\tau^I = (\tau_1^I, \tau_2^I, ..., \tau_N^I)$, $\tau^I \in \Omega^N$. Зафіксуємо довільний вектор $\overline{v} \in R_{NM}^+$, що задовольняє умови (2) − (4). Розглянемо допоміжну задачу:

$$F^{\overline{v}}(\{\Omega_1, ..., \Omega_N\}) \to \min_{\{\Omega_1, ..., \Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^{N}}, \tag{17}$$

за умови

$$\int\limits_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^{M} \overline{v}_{ij}, \ i = 1, 2, ..., N,$$

де $F^{\overline{v}}(\{\Omega_1, ..., \Omega_N\}) = F(\{\Omega_1, ..., \Omega_N\}, \{\overline{v}_{11}, ..., \overline{v}_{NM}\})$.

Для задачі (17) має місце наступна теорема.

Теорема 1. Нехай в задачі (17), $\rho(x) \geq 0$ майже всюди для $x \in \Omega$. Тоді, якщо допустиме розбиття $(\Omega_1^*, \Omega_2^*, ..., \Omega_N^*)$ є оптимальним розв'язком задачі (17), то існують дійсні константи $\psi_1, ..., \psi_N$, для яких

$$c_i^I(x, \tau_i^I) - c_j^I(x, \tau_i^I) = \psi_j - \psi_i \text{ м. в. для } x \in \Omega_i^*, i, j = \overline{1, N}. \tag{18}$$

Доведення. Нехай $(\Omega_1^*, \Omega_2^*, ..., \Omega_N^*)$ є оптимальним для задачі (17) та нехай x – довільна точка однієї з підмножин $\Omega_i^*, i=\overline{1,N}$, множини Ω. Якщо $v=\overline{v}$, то (17) еквівалентна задачі B при фіксованому $v=\overline{v}$ та $\tau^I \in \Omega^N$.

1. Вважатимемо спочатку, що множина Ω_i^* ідентифікується характеристичною функцією $\lambda_i^*(\cdot)$ виду:

$$\lambda_i^*(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } \widetilde{n}_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_i\rho(x)>0\\ 1, \text{ якщо } \widetilde{n}_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_i\rho(x)<0\end{cases}, \tag{19}$$

де $\psi_0(\cdot)\in L^2_\Omega$, $i=\overline{1,N}$.

Тоді згідно (19), $\forall x\in\Omega_i^*$, $i=\overline{1,N}$, матиме місце система нерівностей:

$$\begin{cases}c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_1\rho(x)\ge 0,\\ \ldots\\ c_{i-1}^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_{i-1}\rho(x)\ge 0,\\ c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_i\rho(x)\le 0,\\ c_{i+1}^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_{i+1}\rho(x)\ge 0,\\ \ldots\\ c_N^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_N\rho(x)\ge 0.\end{cases} \tag{20}$$

З того що задача B має розв'язок, випливає сумісність системи нерівностей (20). За умови сильної регулярності функціоналу

$$L(\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\},\Psi(\cdot))=\int_\Omega\sum_{i=1}^N(c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_i\rho(x))\lambda_i(x)dx+$$

$$+\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M(c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})-\eta_j-\psi_i)\overline{v}_{ij}+\sum_{j=1}^M\eta_j b_j^{II}-\int_\Omega\psi_0(x)dx,$$

функцію $\psi_0(\cdot)$ в системі (20) майже всюди для $x\in\Omega_i^*$, $i=\overline{1,N}$, можна обрати у вигляді:

$$\psi_0(x)=-\frac{1}{2}((c_i^I(x,\tau_i^I)+\psi_i)+\min_{j\ne i}(c_j^I(x,\tau_j^I)+\psi_j))\rho(x), \tag{21}$$

де $c_i^I(x,\tau_i^I)+\psi_i=\min_{k=\overline{1,N}}(c_k^I(x,\tau_k^I)+\psi_k)$.

Підставляючи знайдений вираз для $\psi_0(x)$ в i-у нерівність системи (20), цю систему можна переписати у такий спосіб: майже всюди для $x\in\Omega_i$

$$\frac{1}{2}\rho(x)\left[(c_i^I(x,\tau_i^I)+\psi_i)-\min_{j\ne i}(c_j^I(x,\tau_j^I)+\psi_j)\right]\le 0, i=\overline{1,N}.$$

Звідси, з урахуванням умови, що $\rho(x)\ge 0$ майже всюди для $x\in\Omega_i$, та довільності індексу $i=\overline{1,N}$, отримуємо виконання умови:

$c_i^I(x,\tau_i^I)+\psi_i\le c_j^I(x,\tau_j^I)+\psi_j$ майже всюди для $x\in\Omega_i, i,j=\overline{1,N}$.

Отже, за умови визначення вектор-функції $\lambda_i^*(\cdot)$ за формулою (19), нерівність (18) доведена.

2. Будемо вважати тепер, що множина Ω_i ідентифікується характеристичної функцією $\lambda_i(x)$ виду:

$$\lambda_i^*(x)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ c_i^I\left(x,\tau_i^I\right)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_i\rho(x)>0\\ 1,\ \text{якщо}\ c_i^I\left(x,\tau_i^I\right)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_i\rho(x)=0\end{cases}.$$

Тоді майже всюди для $x\in\Omega_i$, $i=\overline{1,N}$, має місце система нерівностей:

$$\begin{cases}c_1^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_1\rho(x)\ge 0,\\ \ldots\\ c_{i-1}^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_{i-1}\rho(x)\ge 0,\\ c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_i(x)=0,\\ c_{i+1}^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_{i+1}\rho(x)\ge 0,\\ \ldots\\ c_N^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_N\rho(x)\ge 0.\end{cases}\qquad (22)$$

Отже, майже всюди для $x\in\Omega$ система (22) може бути записана у вигляді $c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_i\,\rho(x)\ge 0, i=\overline{1,N}$, звідки випливає така рівність:

$$\psi_0(x)=-(c_i^I(x,\tau_i^I)+\psi_i)\rho(x),\ \text{ì . â. äëÿ}\ x\in\Omega_i^*\qquad (23)$$

Підставляючи знайдений вираз для $\psi_0(x)$ в j-у, нерівність системи (22), $j\ne i, j=\overline{1,N}$, отримуємо

$c_j^I(x,\tau_j^I)\rho(x)-(c_i^I(x,\tau_i^I)+\psi_i(x))\rho(x)+\psi_j\rho(x)\ge 0$, ì . â. äëÿ $x\in\Omega_i^*$.

Звідси, з урахуванням умови $\rho(x)\ge 0$ майже всюди для $x\in\Omega$ та довільності індексу $i=\overline{1,N}$, отримаємо наступну нерівність:

$c_i^I(x,\tau_i^I)+\psi_i\ \le c_j^I(x,\tau_j^I)+\psi_j$ майже всюди для $x\in\Omega_i^*, i, j=\overline{1,N}$.

Теорема доведена.

Отже, координати першої компоненти оптимального розв'язку задачі В для майже всіх $x\in\Omega$ та $i=\overline{1,N}$ можна представити одним з наступних способів: або

$$\lambda_i^*(x)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ c_i^I\left(x,\tau_i^I\right)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_i\rho(x)>0,\ \text{тоді}\ x\notin\Omega_i^*\\ 1,\ \text{якщо}\ c_i^I\left(x,\tau_i^I\right)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_i\rho(x)<0,\ \text{тоді}\ x\in\Omega_i^*\end{cases}\qquad (24)$$

за умов, що $mes\{x\in\Omega:\ c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_i\,\rho(x)=0\}=0$,

$$\psi_0^*(\cdot)=-\frac{1}{2}\{\ (c_i^I(x,\tau_i^I)+\psi_i^*)+\min_{i\ne j}(c_j^I(x,\tau_j^I)+\psi_j^*\}\rho(x)\,,\qquad (25)$$

а $c_i^I(x,\tau_i^I)+\psi_i^*=\min\limits_{k=\overline{1,N}}(c_k^I(x,\tau_k^I)+\psi_k^*)$, де $\psi_1^*,...,\psi_N^*$ визначаються з системи (14) після підстановки до неї функцій $\lambda^*(\cdot)$ та $\psi_0^*(\cdot)$ згідно з (24), (25) відповідно;

або

$$\lambda_i^*(\cdot)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ c_i^I\left(x,\tau_i^I\right)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_i\rho(x)>0,\ \text{тоді}\ x\notin\Omega_i^*\\ 1,\ \text{якщо}\ c_i^I\left(x,\tau_i^I\right)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_i\rho(x)=0,\ \text{тоді}\ x\in\Omega_i^*\end{cases}\qquad (26)$$

за умов, що $mes\{x\in\Omega:\ c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)+\psi_0(x)+\psi_i\rho(x)<0\}=0$,

$$\psi_0^*(\cdot)=-\min_{k=\overline{1,N}}(c_k^I(x,\tau_k^I)+\psi_k^*\}\rho(x)\,,\qquad (27)$$

$\psi_1^*,...,\psi_N^*$ визначаються з системи (14) після підстановки до неї функцій $\lambda^*(\cdot)$ та $\psi_0^*(\cdot)$ згідно з (26), (27) відповідно.

Позначимо

$$G\left(\left\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\right\},\Psi(\cdot)\right)=\min_{\left\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\right\}\in\Gamma\times\Omega^N\times R^+_{NM}} L\left(\left\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\right\},\Psi(\cdot)\right).$$

Підставляючи формули (26), (27) в функціонал (7), отримуємо функцію, яка визначає мінімум функціоналу $L(\left\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\right\},\Psi(\cdot))$ по змінній $\lambda(\cdot)$ і не містить у своєму виразі функції $\psi_0(\cdot)$:

$$G_1(\left\{\tau^I,v\right\},\{\psi,\eta\})=\min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma} L(\left\{\lambda(\cdot),\tau^I,v\right\},\Psi(\cdot)) \;=\int_\Omega\sum_{i=1}^N \min_{i=\overline{1,N}}(c_i^I(x,\tau_i^I)+\psi_i)\rho(x)dx$$

$$+\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M(c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})-\eta_j-\psi_i)v_{ij}+\sum_{j=1}^M\eta_j b_j^{II}.$$

Позначимо

$$G_2(\{\psi,\eta\})=\min_{\left\{\tau^I,v\right\}\in\Omega^N\times R^+_{NM}} G_1(\left\{\tau^I,v\right\},\{\psi,\eta\}) \;.$$

Тоді, задача, двоїста до задачі В, має вигляд:

$$G_2(\{\psi,\eta\})\to\max. \tag{28}$$

Вочевидь, функція $G_1(\left\{\tau^I,v\right\},\{\psi,\eta\})$ за кожною із змінних $v_{ij}\geq 0$ обмежена знизу, якщо виконується умова:

$$c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})\geq\eta_j+\psi_i,\; i=\overline{1,N},\; j=\overline{1,M}. \tag{29}$$

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 2. Нехай для задачі В виконуються умови леми 1, та (15), (16). Тоді сідлова точка $(\left\{\lambda^*(\cdot),\tau^{I*},v^*\right\},\left\{\psi^*,\eta^*\right\})$ функціоналу Лагранжу (7) для задачі В (де перша компонента $\left\{\lambda^*(\cdot),\tau^{I*},v^*\right\}$ є оптимальним розв’язком задачі Б) на множині $\left\{\Gamma\times\Omega^{N\times}R^+_{NM}\right\}\times\left\{E_N\times E_M\right\}$ визначається у такий спосіб: м.в. для $x\in\Omega$

$$\lambda_i^*(x)=\begin{cases}1, \textit{ якщо } x\in\Omega=\left\{x\in\Omega: c_i^I\left(x,\tau_i^{I*}\right)+\psi_i^*=\min\limits_{k=1,N}\left(c_k^I\left(x,\tau_k^{I*}\right)+\psi_k^*\right)\right\}\\ 0 \textit{ у іншому випадку}\end{cases},\; i=\overline{1,N},$$

а в якості $\tau^{I*},v^*,\psi^*,\eta^*$ обирається оптимальний розв’язок двоїстої задачі, приведеної до вигляду:

$$G(\{\psi,\eta\})=$$

$$=\min_{\left\{\tau^I,v\right\}\in\Omega^N\times R^+_{NM}}\Big[\;\int_\Omega\min_{k=\overline{1,N}}(c_k^I(x,\tau_k^I)+\psi_k)\rho(x)dx+\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^M(c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})-\eta_j-\psi_i)v_{ij}\Big]+$$

$$+\sum_{j=1}^M\eta_j b_j^{II}\to\max,\;\psi\in E_N,\eta\in E_M,$$

за умов

$$(c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})-\eta_j-\psi_i)\geq 0,\; i=\overline{1,N},\; j=\overline{1,M}.$$

Висновки

У роботі розглянуто двохетапну задачу розміщення підприємств з неперервно розподіленим ресурсом як різновид задачі оптимального розбиття множин з розміщенням центрів першого етапу без обмежень на їх потужності. Для двохетапної задачі розміщення підприємств з неперервно розподіленим ресурсом сформульовані необхідні і достатні умови оптимальності. Показано, що така задача через функціонал

Лагранжа може бути зведена до задачі оптимізації негладкої функції скінченного числа змінних. У подальшому результати роботи можуть бути використані під час розробки чисельних алгоритмів розв'язання вказаних задач і узагальнені на випадок наявності обмежень на потужності підприємств першого етапу.

Список використаної літератури:

1. Васильев Ф.П., Методы оптимизации –М.: Факториал пресс, 2002. — 824 с.
2. Гимади Э.Х., Эффективные алгоритмы для решения многоэтапной задачи размещения на цепи / Э.Х Гимади // Дискретный анализ и исследование операций, Октябрь – декабрь 1995. Том 2, № 4, с. 13-31
3. Киселева Е.М. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К. : Наук. думка, 2013. – 606 с.
4. Киселева Е.М. Теория оптимального разбиения множеств в задачах распознавания образов, анализа и идентификации систем / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, С.А. Ус / М-во образования и науки Украины; Нац. горн. ун-т. – Д. : НГУ, 2015. – 270 с.
5. Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К.: Наукова Думка, 2005 – 564 с.
6. Ус С.А. О математических моделях многоэтапных задач размещения предприятий / Ус С.А., Станина О.Д // Питания прикладної математики і математичного моделювання: зб.наук.пр. – Д.: Вид-во «Ліра», 2014, с.258-268
7. Drezner Z. Facility Location: Application and Theory / Z. Drezner, H. Hamacher / Berlin: Springer. 2001
8. Fengqi You Mixed-Integer Nonlinear Programming Models and Algorithms for Large-Scale Supply Chain Design with Stochastic Inventory Management / Fengqi You , Ignacio E. Grossmann // Ind. Eng. Chem. Res. 2008, 47, 7802–7817
9. Trubin V. A. Simple multistage location problem on a treelike network / V. A. Trubin, F. A. Sharifov // Cybernetics and Systems Analysis. November–December, 1992, Volume 28, Issue 6, pp 912-917
10. Us S. On same mathematical models of facility location problems of mining and concentration industry / S. Us, O. Stanina // Theoretical and Practical Solutions of Mineral Resources Minig – Pivnyak, Bondarenko, Kovalevska (eds), 2015, pp. 419-424
11. Yu. Kochetov Bilevel facility location: discrete models and computational methods // Proceedings Of XXXVII Symposium în Operations Research – (SYMOPIS-2010). – 2010. – pp 12–16

References:

1. Vasilev, F.P. *Metody optimizacii* (2002) — M.: Faktorial press,. — 824 p. (in Rus)
2. Gimadi, E. Kh, *Jeffektivnye algoritmy dlja reshenija mnogojetapnoj zadachi razmeshhenija na cepi* (1995) Diskretnyj analiz i issledovanie operacij, IM SO RAS, Novosibirsk.. —Volume 2 — P. 13-31. (in Rus)
3. Kiseliova, E.M. & Koryashkina, L.S., *Modeli i metody reshenija nepreryvnyh zadach optimal'nogo razbienija mnozhestv* (2013), — K .: Naukova Dumka. — 606 p. (in Rus)
4. Kiseliova, E.M. & Koryashkina, L.S., Us, S.A. *Teorija optimal'nogo razbienija mnozhestv v zadachah raspoznavanija obrazov, analiza i identifikacii sistem* (2015) Ministry of education and science of Ukraine; National Mining University. D.: NMU. 270 p. (in Rus)
5. Kiseleva, E.M., Shor, N.C. *Nepreryvnye zadachi optimal'nogo razbienija mnozhestv: teorija, algoritmy, prilozhenija: Monografija* (2005). — Kiev: Naukova Dumka. – 564 p. (in Rus)
6. Us, S.A., Stanina, O.D., *O matematicheskih modeljah mnogojetapnyh zadach razmeshhenija predprijatij* (2014) / Pitanija prikladnoï matematiki i matematichnogo modeljuvannja: zb.nauk.pr. — D.: Vid-vo «Lira». — P.258-268. (in Rus)
7. Drezner, Z. & Hamacher, H. (2001) *Facility Location: Application and Theory*. Berlin: Springer. 457 p
8. Fengqi Y., Grossmann I. E., *Mixed-Integer Nonlinear Programming Models and Algorithms for Large-Scale Supply Chain Design with Stochastic Inventory Management* (2008). Ind. Eng. Chem. Res. 47. P. 7802–7817.
9. Trubin V. A. & Sharifov F. A., *Simple multistage location problem on a treelike network* (1992) Cybernetics and Systems Analysis — Volume 28, Issue 6 — P. 912-917
10. Us S., Stanina O., *On same mathematical models of facility location problems of mining and concentration industry* (2015) Theoretical and Practical Solutions of Mineral Resources Minig – Pivnyak, Bondarenko, Kovalevska (eds), — P. 419-424
11. Yu. Kochetov, *Bilevel facility location: discrete models and computational methods* (2010) Proceedings Of XXXVII Symposium în Operations Research – (SYMOPIS-2010) – P.12–16

STANINA Olga,
Ukrainian State University of Chemistry and Technology, senior lecturer of the Information Systems Department

OPTIMALITY CRITERION IN ONE CLASS OF CONTINUOUS MULTISTAGE OPTIMAL PARTITION SETS PROBLEMS

Abstract. Introduction. *With the development of production and infrastructure, the location-allocation problems arise in the situation, where, for example, there is a necessity to find optimal locations of manufacturing enterprises and to identify areas of their service while minimizing transport costs for the delivery of manufactured products to consumers. There are several approaches to modeling and solving such problems nowadays. One of them leads to discrete location-allocation problems (for example, location problems on a graph or selection of locations from a given finite number of points), the other describes the placement of enterprises in a given territory, taking into account the continuity of product distribution in the region. The development of mathematical models and solutions for such problems is a range of research for various mathematical schools, in particular, the scientific school of E.M. Kiselyova. The studies in this school are carried out today on further generalization of the theory of optimal partition sets (OPS) and its dissemination to new classes of problems. One of these areas is the continuous problem of the OPS with the existence of additional links between the centers, taking into account the different categories of centers placed, etc.*

It is also necessary to note the prospect of considering multistage problems of location of enterprises with a continuously distributed resource as a kind of continuous problems of OPS. Among the authors who researched discrete multistage problems, should be noted the following V.L. Bernesnev, E. Kh. Gimadi, Yu.A. Kochetov, V.A. Trubin, DB Judin and others.

This work is a sequential continuation of research related to the study of the properties of multistage OPS problems and their solutions. Mathematical models of these problems represent two-stage continuous problems of OPS with the first stage centers placement and take into account the fact that enterprises of the first stage should be associated with enterprises of the second stage. The latter fact has given an another name for such problems - OPS problems with additional links.

Purpose. *Obtaining of necessary and sufficient conditions of optimality for the OPS problems with the first stage centers placement without restrictions on their power.*

Results. *Two-stage continuous problem of partitioning sets with the placement of enterprises centers of the first stage is formulated in this research. The necessary and sufficient conditions for optimality for the problem are obtained. The Optimal solution to the problem of minimizing the Lagrange function is given. The theorem that the saddle point is the optimal solution of the OPS problems is proved.*

Conclusion. *The necessary and sufficient optimality conditions for a two-stage problem of optimal partition sets with additional links and with placement of centers of the first stage were obtained in this research. In the future, the results of work can be used during the development of numerical algorithms for solving these problems and summarized in the event of restrictions on the capacity of enterprises in the first stage.*

Key words: *optimal partition sets, location-allocation problems, multistage location problems, optimality criterion.*

Стаття надійшла 17.02.2017
Прийнято до друку 27.03.2017