

Keywords: laminar-turbulent transition in the boundary layer, bypass transition, transition with high level of the external flow turbulence.

Одержано редакцією 06.08.2019 р.
Прийнято до публікації 09.10.2019 р.

UDK 519.24, 530.19, 330.46

DOI 10.31651/2076-5886-2019-2-20-34

PACS 02.50.Cw, 02.70.Rr, 03.65.-w,
89.65.Gh

СОЛОВІЙОВ Володимир Миколайович,
доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри інформатики
та прикладної математики Криворізького
державного педагогічного університету
e-mail: vnsoloviev2016@gmail.com
ORCID 0000-0002-4945-202X

СЕРДЮК Олександр Анатолійович,
кандидат економічних наук, старший
викладач кафедри прикладної математики
та інформатики Черкаського національного
університету імені Богдана Хмельницького
e-mail: serdyuk@ukr.net
ORCID 0000-0002-3919-4661

МОДЕЛІ ЗАСТОСУВАННЯ ЕНТРОПІЇ ПЕРІОДУ РЕКУРЕНТНОСТІ ТА ЕНТРОПІЇ РЕКУРЕННОСТІ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

У статті розглянуто методику розрахунку ентропії періоду рекурентності та ентропії рекурентності на основі методу рекурентних діаграм, запропонованого Н. Марваном. Проаналізовано поведінку ентропій на основі синтетичних даних. Продемонстровано стабільність отримуваних показників з використанням процедури рухомого вікна на синтетичних даних. Проведено оцінку поведінки динаміки показників на основі економічних часових рядів: індексу Доу Джонса та цін на нафту. Зроблено висновки про можливість використання досліджуваних показників для аналізу часових рядів економічної природи та визначення критичних періодів у економічних системах.

Ключові слова: складна система, ентропія, рекурентна діаграма, кризове явище

Вступ

Складні системи – це системи з великою кількістю агентів, які взаємодіють між собою. Під час такої взаємодії на макроскопічному рівні колективної поведінки генеруються нові характеристики систем, що проявляються шляхом самовільної організації значних часових, функціональних чи просторових структур. Застосування кількісних методів у якості процесів моделювання включає у себе процедури вимірювання, де досить важливими є показники складності системи, для кількісного опису яких існує велике різноманіття підходів.

Одним з таких підходів є застосування поняття ентропії [1], на якому ґрунтується другий закон термодинаміки. Узагальнено - другий закон полягає у властивості закритих систем прагнути набути стану термодинамічної рівноваги. У відповідності з цим у замкнутій системі, яка досягла рівноважного стану, ніяка частина внутрішньої енергії системи не може бути перетворена у механічну енергію, і внутрішній хаос системи поступово зростає [1].

Як показано у багатьох попередніх працях, економічні системи, що є яскравими зразками складних систем, можуть досліджуватись за допомогою методів, призначених для використання у інших науках, зокрема – фізиці. Досить успішно для дослідження економічних систем використовується й поняття ентропії [2, 3, 4, 5, 6]. Однак, з появою нових моделей та методів дослідження складних систем, з'являються й нові підходи до оцінки ентропії.

На поточний момент серед різноманіття способів визначення ентропії складної системи з'явилося кілька нових, що опираються на аналіз рекурентних діаграм – методу, розроблену під керівництвом Н. Марвана [7]. Розгляд двох таких способів і було взято для дослідження, проведеного у даній роботі.

Метою статті є опис та оцінка можливості застосування до дослідження економічних рядів двох понять ентропії, що опираються на аналіз рекурентних діаграм: ентропії періоду рекурентності та ентропії рекурентності.

Виклад основного матеріалу

Метод рекурентного відображення (recurrence plot) використовується для відображення поведінки динамічної системи у часі шляхом візуалізації траєкторії $\vec{x}_i \in R^n$ ($i = 1, \dots, N$) у n -вимірному фазовому просторі [8]. Фактично, він відображує подібність траєкторії у фазовому просторі до певного стану, що є фундаментальною властивістю детерміністичної динамічної системи [9, 10]. Головним кроком такої візуалізації є обчислення матриці розміру $N \times N$:

$$\mathbf{R}_{ij} = \Theta(\varepsilon_i - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

де ε_i – окіл, у якому точки вважаються сусідами;

$\|\cdot\|$ – норма (наприклад, Евклідова норма);

$\Theta(x)$ – функція Хевісайда.

Вектори фазового простору для одновимірною часового ряду $\{t_i\}$ реконструюються за допомогою методу часової затримки Такенса: $\vec{x}_i = (t_i, t_{i+\tau}, \dots, t_{i+(m-1)\tau})$ [11]. Розмірність m може бути отриманою за допомогою методу фальшивих найближчих сусідів (теоретично, $m = 2n + 1$ [10, 11]).

Радіус околу сусідніх точок ε_i визначає сферу, центр якої знаходиться у точці \vec{x}_i . Якщо \vec{x}_j попадає у сферу точки \vec{x}_i , то стани відповідних точок вважаються близькими, і $\mathbf{R}_{ij} = 1$. Значення радіуса ε_i може бути як фіксованим, так і варіюватись таким чином, щоб у кожену сферу попадало не більше, ніж задана кількість сусідніх точок. Однак переважно використовується стале значення радіуса для усього ряду.

В якості норми часто використовується також максимум модулів різниць між відповідними координатами:

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = \max\{|a_i - b_i|\}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

З врахуванням сталого радіуса ε_i та норми (2) матриця \mathbf{R} отримується симетричною, а бінарні значення у \mathbf{R} досить просто візуалізувати у вигляді відображення на площині точок з координатами, що відповідають рядкам і стовпчикам

у \mathbf{R} , та зображеними чорним кольором при $\mathbf{R}_{ij} = 1$ і білим кольором при $\mathbf{R}_{ij} = 0$. На рис. 1 подано графіки двох числових рядів та відповідні їм рекурентні діаграми.

На основі матриці крос-рекурентності \mathbf{R} може бути розраховано ряд характеристик вихідної динамічної системи, зокрема, коефіцієнт рекурентності (recurrence rate) [7], коефіцієнт визначеності (determinism) [12], ламінарність (laminarity) [13], час рекурентності першого типу (recurrence times of first type) [14], коефіцієнт кластеризації (clustering coefficient) [15] тощо.

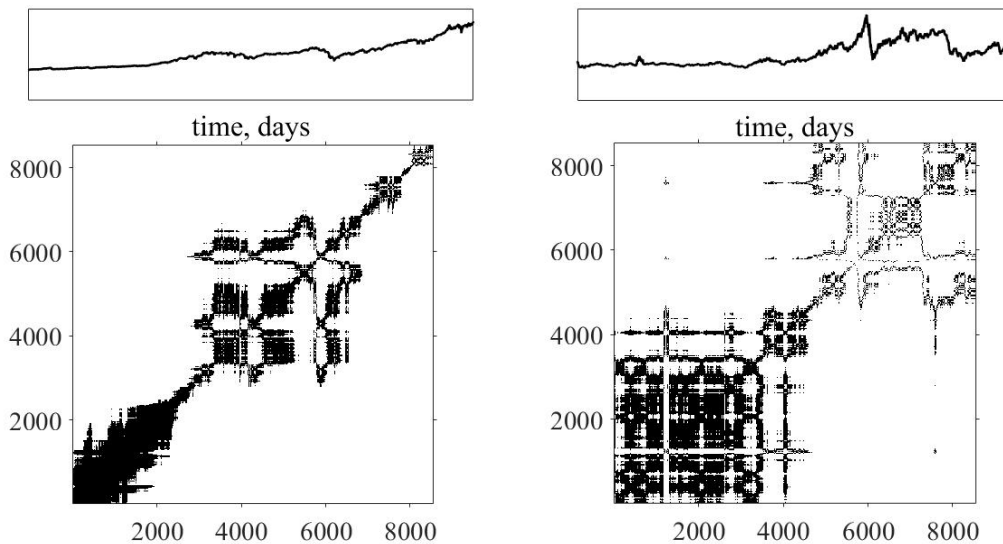


Рис. 1. Угорі: синтетичний часовий ряд, унизу: відповідна крос-рекурентна діаграма.

Шляхом дослідження конфігурацій, утворених з одиниць матриці \mathbf{R} , можна отримувати інформацію про природу фазового простору. Зокрема: 1) паралельний рух точок описується діагональними рядами; 2) ламінарність можна досліджувати шляхом аналізу вертикальних та/чи горизонтальних рядів; 3) періодична чи квазіперіодична природа фазового простору визначається на основі наявності лише діагональних рядів з відповідно однаковою чи різною часовою затримкою; 4) прямокутні структури складаються з діагональних ліній, утворених ізольованими точками; 5) вертикальні ряди відповідають хаотичній природі системи.

За допомогою рекурентних діаграм можуть бути досліджені й більш складні структури, що виникають у стохастично хаотичних чи суто хаотичних системах. Наприклад, наявність рівномірно розподілених ізольованих точок свідчить про процес, що є білим шумом, а окремі ізольовані точки свідчать про сильні флуктуації, наявні у процесі, що відповідає некорельованому чи антикорельованому процесу у системі. Вказані характеристики можуть також бути оцінені за допомогою щільності періоду рекурентності.

Одним зі способів оцінки хаотичності системи є аналіз показника ентропії, що базується на концепції ентропії Шеннона:

$$H = -\sum_{i=1}^N p(x_i) \log_2(p(x_i)), \quad (3)$$

де $p(x_i)$ – ймовірність події x_i (за домовленістю, $0 \log_2 0 = 0$).

Далі у роботі розглядається два види ентропії на основі ентропії Шеннона, які можна розрахувати шляхом аналізу характеристик матриці крос-рекурентності \mathbf{R} : ентропію періоду рекурентності (recurrence period density entropy, RPDE) та ентропію рекурентності (recurrence entropy, RecEn).

Ентропія періоду рекурентності

Міра RPDE підходить з ідеї про рекурентність часу між рекурентними точками [16]. Час рекурентності обчислюється шляхом підрахунку кількості нерекурентних точок, які йдуть підряд у матриці крос-рекурентності, що відповідає довжині нулів у матриці крос-рекурентності \mathbf{R} чи довжині білих ліній на рекурентній діаграмі. Так, для двох рекурентних точок \vec{x}_i та \vec{x}_j час рекурентності визначається як $T_k = i - j$. Тоді для усіх точок, відображених у матриці \mathbf{R} , можна отримати послідовність інтервалів часів рекурентності $R(T_k)$, підрахувавши кількість кожного з інтервалів T_k . На основі послідовності $R(T_k)$ отримується щільність періодів рекурентності $P(T_k)$, що визначається як ймовірність кожного з періодів рекурентності T_k у просторі $\{R(T_k)\}$:

$$P(T_k) = \frac{R(T_k)}{\sum_{k=1}^{T_{\max}} R(T_k)}, \quad (4)$$

де $T_{\max} = \max\{T_k\}$.

Отримані ймовірності періодів рекурентності є основою для обчислення ентропії періоду рекурентності на основі ентропії Шеннона:

$$RPDE = -\sum_{k=1}^{T_{\max}} P(T_k) \ln P(T_k). \quad (5)$$

Оскільки T_{\max} може змінюватись з часом, для показника RPDE може бути необхідним застосування нормалізації, внаслідок чого також використовується нормалізована ентропія періоду рекурентності:

$$NRPDE = -\frac{1}{\ln T_{\max}} \sum_{k=1}^{T_{\max}} P(T_k) \log P(T_k), \quad \ln T_{\max} = -\sum_{i=1}^{T_{\max}} P(i) \ln P(i). \quad (6)$$

Фактично, показник ентропії періоду рекурентності визначає міру упорядкованості системи, опираючись на довжини послідовностей сусідніх точок фазового простору: чим більше точок будуть сусідами у фазовому просторі – тим меншим буде значення показника ентропії, розрахованого за формулами (5) чи (6).

Ентропія рекурентності

Однак, у поданому вище визначення ентропії оцінка «сусідства» точок проводиться на основі застосування норми $\|\cdot\|$ до пар відповідних координат. Наприклад, для двох точок m -вимірного фазового простору $\mathbf{a}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ та $\mathbf{b}(b_1, b_2, \dots, b_m)$ порівнюються лише пари координат (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , ..., (a_m, b_m) , при

цьому відкидається велика кількість пар, утворених різними координатами точок \mathbf{a} та \mathbf{b} .

Врахування й інших пар пропонується у роботі [17], де авторами вводиться поняття *мікростанів*, що визначає взаємне розташування двох точок. Для визначення мікростану використовуються точки у 2-, 3- чи 4-вимірному просторі. Розмірність простору визначається параметром N , який назовемо *порядком мікростану*.

Розглянемо визначення мікростану 2-го порядку для двох точок $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ та $\mathbf{b}(b_1, b_2)$. Маємо для оцінки 4 пари координат: (a_1, b_1) , (a_1, b_2) , (a_2, b_1) , (a_2, b_2) . Вибравши норму $\|\cdot\|$ та застосувавши до кожної з пар функцію Хевісайда $\Theta(\varepsilon - \|a_i - b_j\|)$, отримаємо послідовність нулів та одиниць, довжина якої рівна кількості оцінюваних пар координат. Така послідовність і є мікростаном.

Оскільки кожний з мікростанів можна подати числом у двійковій системі числення, розрядність якого відповідає кількості оцінюваних пар, для мікростанів порядку 2, існує 16 різних значень: від 0000 до 1111.

На основі мікростанів автори роботи [17] вводять поняття *ентропії рекурентності* $S(A)$, яка визначається наступним чином:

$$RecEn = S(A) = -\sum_A p_A \ln p_A, \quad (7)$$

де $A = A(\varepsilon)$ – розподіл по мікростанам множини точок, поданих у фазовому просторі розмірності N , з використанням радіусу околу сусідніх точок ε .

Зупинимось на кількох особливостях визначення ентропії рекурентності $S(A)$.

1. Кількість мікростанів для порядку N визначається за формулою 2^{N^2} , де основа степеня є основою системи числення для представлення мікростанів, а показник степеня N^2 відповідає кількості порівнюваних пар координат. Зважаючи на використання двійкової системи числення для представлення мікростанів, маємо, наприклад, $2^{2^2} = 16$ мікростанів порядку 2: від $0000_2 = 0_{10}$ до $1111_2 = 15_{10}$, $2^{3^2} = 512$ мікростанів порядку 3, або ж $2^{4^2} = 65536$ мікростанів порядку 4. Очевидно, зважаючи на кількість мікростанів порядку 4, більші порядки авторами роботи [17] не використовуються. З іншого боку, порядок мікростанів висуває вимоги й до кількості точок часового ряду, що оцінюються: бажано, щоб ця кількість була більшою за максимальну кількість мікростанів, інакше буде багато мікростанів, кількість яких у досліджуваній системі рівна 0. Останнє, однак, не є необхідною умовою.

2. Розподіл точок по мікростанам прямо залежить від околу сусідства ε . Так, якщо при використанні норми (2) для числового ряду $\{t_i\}$ довжиною K вибрати $\varepsilon > \max\{|t_i - t_j|\}$, де $i, j = 1, \dots, K$, то усі можливі мікростани будуть рівні $\underbrace{1\dots 1}_{N^2}$, і тоді значення ентропії рекурентності становитиме $S(A) = 1 \cdot \ln 1 = 0$. Таке ж значення буде отримане й у випадку, коли вибрати $\varepsilon < \min\{|t_i - t_j|\}$, оскільки усі мікростани будуть рівні $\underbrace{0\dots 0}_{N^2}$. Таким чином, окіл сусідства повинен вибиратись з інтервалу $\varepsilon \in (\min\{|t_i - t_j|\}, \max\{|t_i - t_j|\})$. Наприклад, у роботі [15] для часових рядів, що містять білий шум, експериментально отримано значення $\varepsilon \in [0.14, 0.45]$ і для таких рядів

пропонується $\varepsilon = 0.293$, для якого отримується максимальне значення ентропії рекурентності $S(A)$.

Використовуване програмне забезпечення

Для дослідження часових рядів нами використано наступне програмне забезпечення.

Розрахунок ентропії за Н. Марваном, яку автор називає *ентропія щільності періоду рекурентності* (recurrence period density entropy, RPDE) [12], проводилась за допомогою функцій пакету інструментів Cross Recurrence Plot [18].

Для розрахунку ентропії рекурентності було реалізовано окремий пакет у інструментальному середовищі MatLab.

Обидва методи об'єднано в інструменті з графічним інтерфейсом, що дозволяє обирати аналізований часовий ряд та параметри для розрахунку вказаного показника ентропії. Результати обрахунків як візуалізуються, так і зберігаються у файл.

Вибір радіусу сусідства можна робити, задавши його числове значення, або ж провівши попередню оцінку. У останньому випадку для числового ряду $\{t_i\}$ проводиться розрахунок значень ентропії для послідовності значень $\varepsilon_j \in (\min\{|t_i - t_j|\}, \max\{|t_i - t_j|\})$, взятих з певним кроком $\Delta\varepsilon$, після чого в якості початкового значення параметра ε автоматично обирається те, для якого отримано максимальне значення ентропії, або ж користувачем вибирається бажане значення ε на основі розрахованого профіля ентропій $E(\varepsilon)$.

Додатково, оскільки, у першу чергу, нас цікавить саме динаміка зміни показника ентропії у часовому ряді, в інструменті реалізовано процедуру зміщеного вікна (moving window procedure), де показник ентропії розраховується для поточного підряду довжиною K , після чого вибір підряду зміщується на деякий крок h .

Аналіз показників ентропії на синтетичних часових рядах

Оцінка значень ентропії періоду рекурентності RPDE та ентропії рекурентності RecEn спочатку проводилась на синтетичних часових рядах, що містять $1/f$ -шум з різними показниками α від 0.0 (білий шум) до 2.0 (броунівський рух) з кроком $\Delta\alpha = 0.2$. При дослідженні використовувався набір показників ε з відрізка $[0,5]$, взятих з кроком $\Delta\varepsilon = 0.1$. Для кожного набору показників ε та α генерувалось по 10 рядів, для яких розраховані значення ентропій потім усереднювались для візуалізації результатів (рис. 2).

Аналіз результатів дозволив отримати наступні висновки.

1. У кожному випадку для значення ентропії рекурентності при збільшенні околу сусідніх точок ε спостерігається спочатку швидке зростання, потім – повільне спадання. При цьому для профіля значень ентропії рекурентності існує максимум у точці, близькій до $\varepsilon = 1.0$, який зміщується до $\varepsilon = 0.7$ зі зростанням значення α при розрахунку ентропії порядку 2, та до $\varepsilon = 0.3$ при розрахунку ентропії порядку 3.

2. Отримані усереднені значення ентропії рекурентності дозволяють використовувати у більшості випадків значення $\varepsilon = 1.0$ при використанні порядку 2 та $\varepsilon = 0.5$ при використанні порядку 3.

3. Максимальне значення ентропії рекурентності зменшується зі зростанням α : при використанні порядку 2 від $RecEn \approx 2.8$ для $\alpha = 0$ до $RecEn \approx 1.1$ для $\alpha = 2$ та при використанні порядку 3 від $RecEn \approx 6$ для $\alpha = 0$ до $RecEn \approx 1.9$ для $\alpha = 2$ (рис. 3).

Таким чином, оцінку отриманих значень ентропії рекурентності для довільного ряду можна проводити і шляхом порівняння аналізованого ряду з рядом $1/f$ -шуму.

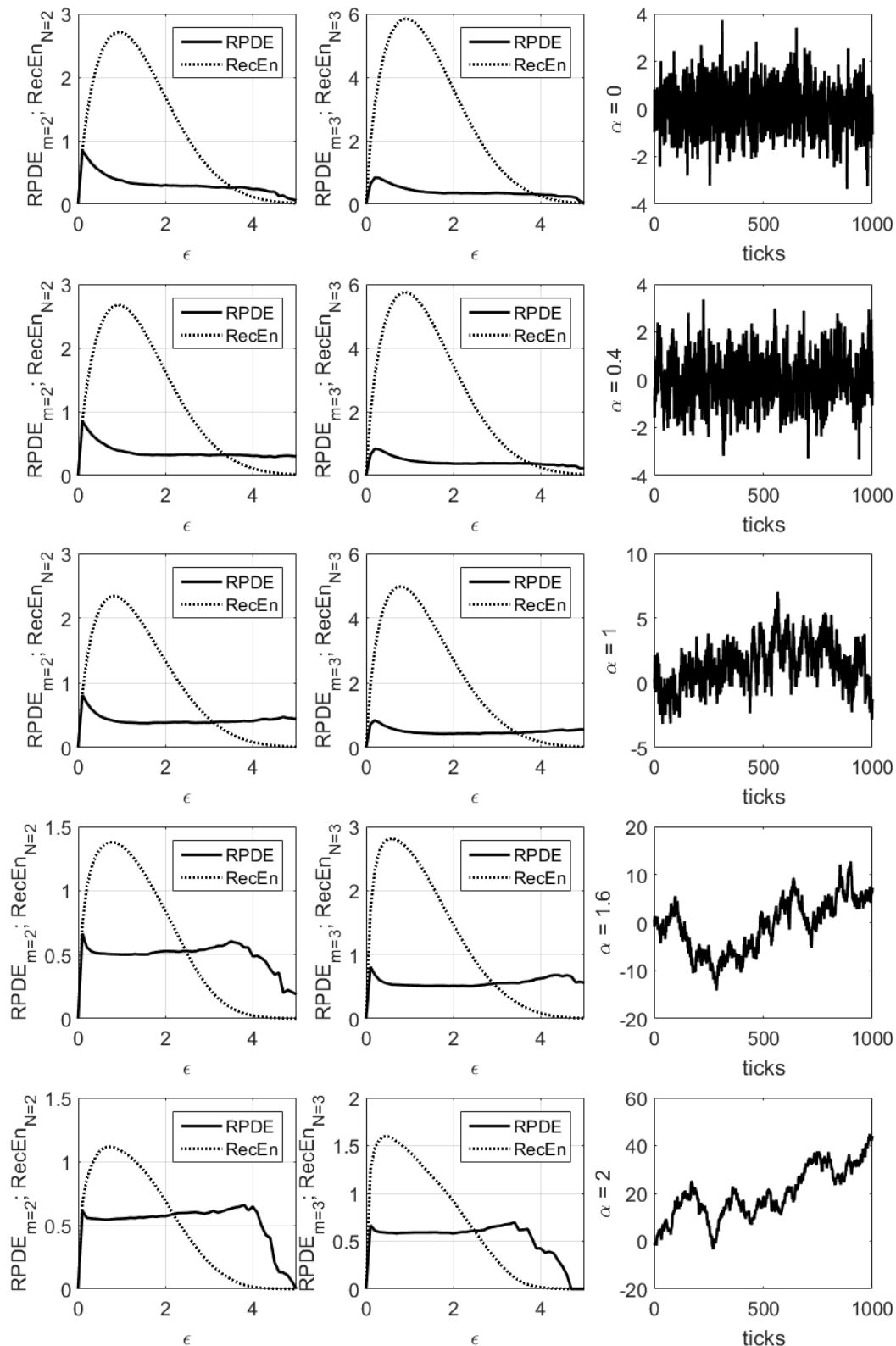


Рис. 2. У кожному ряду зображень: зліва – профіль значень ентропії періодів (RPDE) та ентропії рекурентності (RecEn), взятих для розмірності фазового простору $m = 2$ і порядку $N = 2$ відповідно; по центру – профіль значень ентропії періодів та ентропії рекурентності, взятих для розмірності фазового простору $m = 3$ і порядку $N = 3$ відповідно; справа – зразок часового ряду $1/f$ -шуму з заданим значенням α .

4. Значення ентропії періодів різко зростає при збільшенні ε від 0 до 0.1, після

чого у більшості випадків стабілізується, і лише при наближенні ε до 0.5 починає спадати до 0. Отриманий профіль ентропії періодів підтверджує вибір Н. Марваном значення радіуса $\varepsilon = 0.1$ за замовчуванням у пакеті CRPTool.

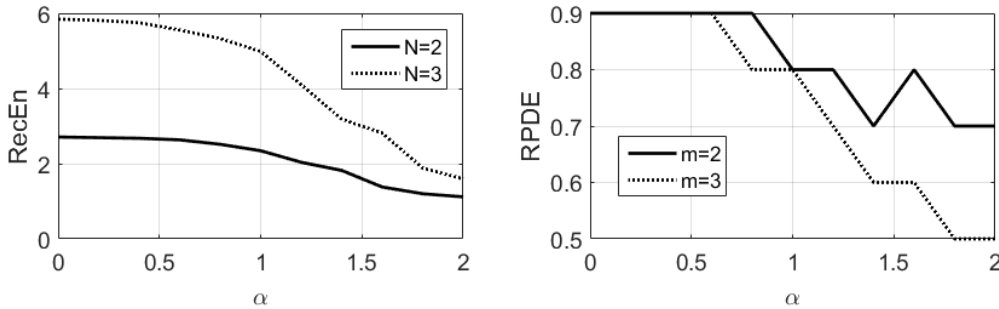


Рис. 3. Профілі максимальних значень ентропії для рядів $1/f$ -шуму з різними значеннями α : зліва – профіль значень ентропії рекурентності (RecEn), справа – профіль значень ентропії періодів рекурентності (RPDE).

Для оцінки значень більш упорядкованих систем використано періодичну функцію $\sin(x)$.

Оцінка повністю упорядкованої системи проводилась на основі часових рядів, згенерованих за допомогою функції $\sin(x + \omega)$ з різними фазами ω . Профілі отриманих ентропій подано на рис. 4, угорі.

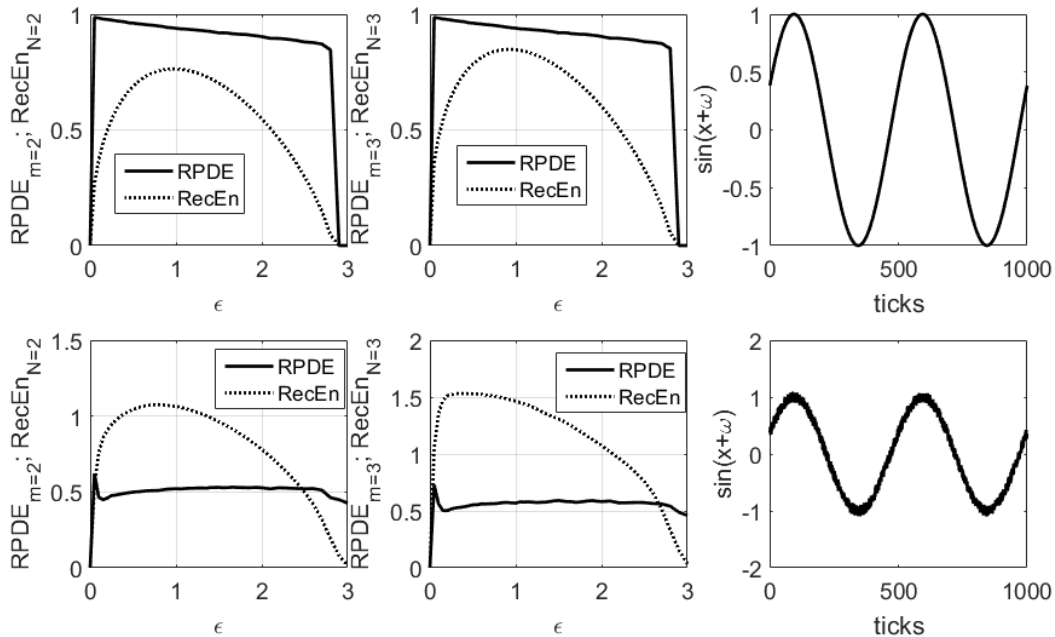


Рис. 4. У кожному ряду зображень: зліва – профіль значень ентропії періодів (RPDE) та ентропії рекурентності (RecEn), взятих для розмірності фазового простору $m = 2$ і порядку $N = 2$ відповідно; по центру – профіль значень ентропії періодів та ентропії рекурентності, взятих для розмірності фазового простору $m = 3$ і порядку $N = 3$ відповідно; справа – зразок часового ряду $\sin(x + \omega)$ (угорі) та $\sin(x + \omega) + rnd$ (унизу).

Як видно з профілів, загальні характеристики ентропій, визначені вище, повторюються. Відмінністю є менше максимальне значення ентропії рекурентності,

рівне $RecEn \approx 0.75$ для порядку 2 та $RecEn \approx 0.85$ для порядку 3, та вище максимальне значення ентропії періодів. Знайдені значення ε , при яких ентропії мають максимальні значення, узгоджуються зі знайденими раніше.

Додатково було досліджено поведінку профілів ентропій для часових рядів, згенерованих за допомогою функції $\sin(x+\omega)+rnd$, де rnd – випадкове число з рівномірним розподілом на відрізку $[-0.1,0.1]$. Генерувались такі ряди з метою оцінки поведінки ентропій у випадку різних механізмів роботи систем на низькочастотному та високочастотному рівнях. Для такого випадку поведінка обох ентропій схожа на їх поведінку при броунівському русі, тобто, при $1/f$ -шумі при $\alpha = 2.0$ (див. рис. 4, унизу).

Таким чином, на основі проведених вище досліджень було зроблено додатковий висновок про оданкову поведінку досліджуваних ентропій, незалежно від природи формування часових рядів, що дозволяє зробити припущення про універсальність ентропії рекурентності та ентропії періодів.

Оскільки дослідження динаміки зміни показників у часових рядах проводиться з використанням процедури рухомого вікна, таку ж процедуру було застосовано й для тестових рядів. Метою було визначення стійкості отримуваних значень при суттєво меншій ширині використовуваного вікна порівняно з довжинами аналізованих вище синтетичних рядів та загалом визначення можливості застосування досліджуваних ентропій у процедурі рухомого вікна.

Процедура проводилась для синтетичних рядів $1/f$ -шуму з різними показниками α при ширині вікна $win = 250$ та кроці вікна $step = 5$ (самі такі параметри вікон переважно застосовується нами при аналізі часових рядів економічної природи з денними показниками).

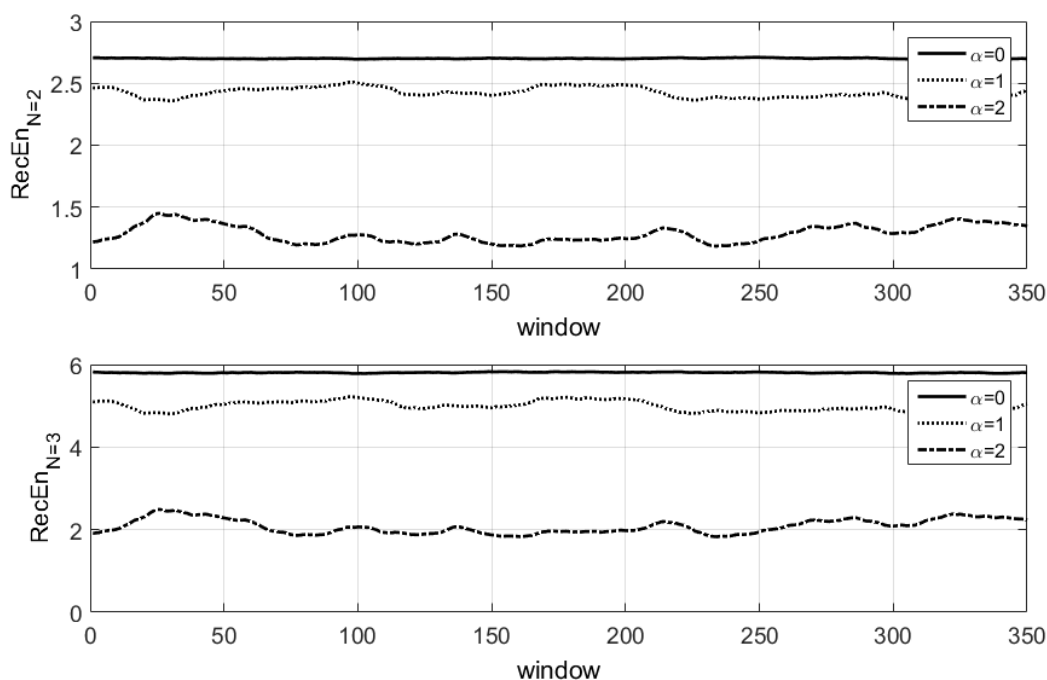


Рис. 5. Динаміка значення ентропії рекурентності ($RecEn$) при використанні процедури рухомого вікна шириною $win = 250$ та кроком вікна $step = 5$, розрахованих для рядів $1/f$ -шуму з показниками $\alpha = 0,1,2$ для порядку $N = 2$ (угорі) та $N = 3$ (унизу).

Для ентропії рекурентності отримано показники ResEn, близькі до наведених вище. Звичайно, невелика ширина вікна вносить свої збурення, що стають більш чутливими зі зростанням показника α (див. рис. 5). При цьому порядок ентропії практично не є суттєвим.

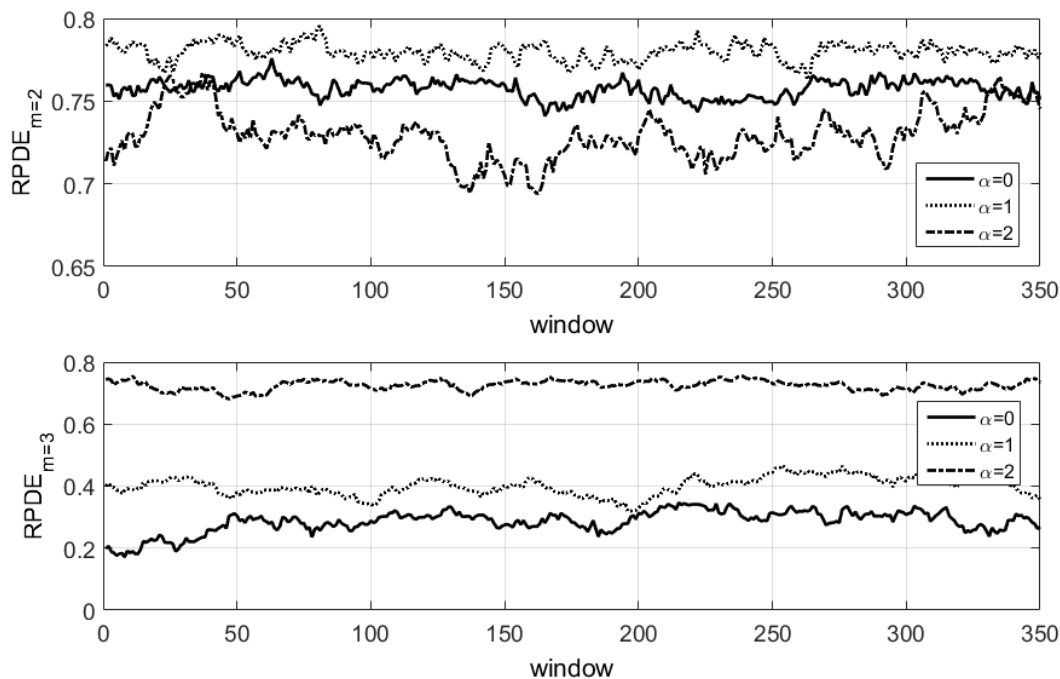


Рис. 6. Динаміка значення ентропії періодів (RPDE) при використанні процедури рухомого вікна шириною $win = 250$ та кроком вікна $step = 5$, розрахованих для рядів $1/f$ -шуму з показниками $\alpha = 0,1,2$ для розмірності фазового простору $m = 2$ (угорі) та $m = 3$ (унизу).

Подібна ситуація отримана й для ентропії періодів (рис. 6).

Отже, ентропія рекурентності та ентропія періодів рекурентності можуть бути використані у віконних процедурах, при цьому ентропія рекурентності показує сталі показники навіть при порівняно малій ширині рухомого вікна.

Аналіз курсу Dow Jones Industrial Average та цін на нафту

Дослідження можливості застосування ентропії рекурентності та ентропії періодів у економічних системах проводилось на основі денних даних індекса Dow Jones Industrial Average (DJIA), взятих за період з 1990 р. по 2019 р., та денних значень ціни на спотовому ринку нафти, взятих за період з 1987 р. по 2019 р. З метою оцінки динаміки зміни значень показників ентропій у окремі критичні періоди економічних систем було складено таблиці критичних та кризових явищ на відповідних ринках.

У таблиці 1 подано список критичних та кризових явищ на фондовому ринку Доу Джонса за досліджуваний період. Відповідні номери явищ відмічено й на рис. 7 разом з графіками динаміки значень ентропії рекурентності та ентропії періоду рекурентності, отриманими за допомогою процедури рухомого вікна при використанні ширини вікна $win = 500$ та кроку вікна $step = 1$.

Аналіз отриманих результатів дозволив зробити наступні висновки.

1. Значення RPDE різко падає, щонайменше, на 10%, при попаданні у вікно періоду критичного явища, яке проявляється у часовому ряді у вигляді поступового

зменшення чи різкого падіння індексу. Поступове зменшення показника RPDE спостерігається іноді з деякий час до входження у рухоме вікно періоду відповідно критичного явища.

2. Поведінка значення RecEn подібна до поведінки RPDE, за деякими відмінностями, а саме: графік динаміки зміни RecEn є більш гладким і поступове зменшення значення RecEn починається за більший час порівняно з RPDE.

Таблиця 1

Критичні та кризові явища на фондовому ринку Доу-Джонса
за період з 01.01.1990 по 01.06.2019 рр.

N	Часовий період	Тривалість, днів	Падіння показника, %
1	17.07.1990-23.08.1990	28	17.21
2	01.10.1997-21.10.1997	15	12.43
3	17.08.1998-31.08.1998	11	18.44
4	14.08.2002-01.10.2002	34	19.52
5	16.10.2008-15.12.2008	42	30.21
6	09.08.2011-22.09.2011	32	11.94
7	18.08.2015-25.08.2015	6	10.53
8	29.12.2015-20.01.2016	16	11.02
9	03.12.2018-24.12.2018	15	15.62

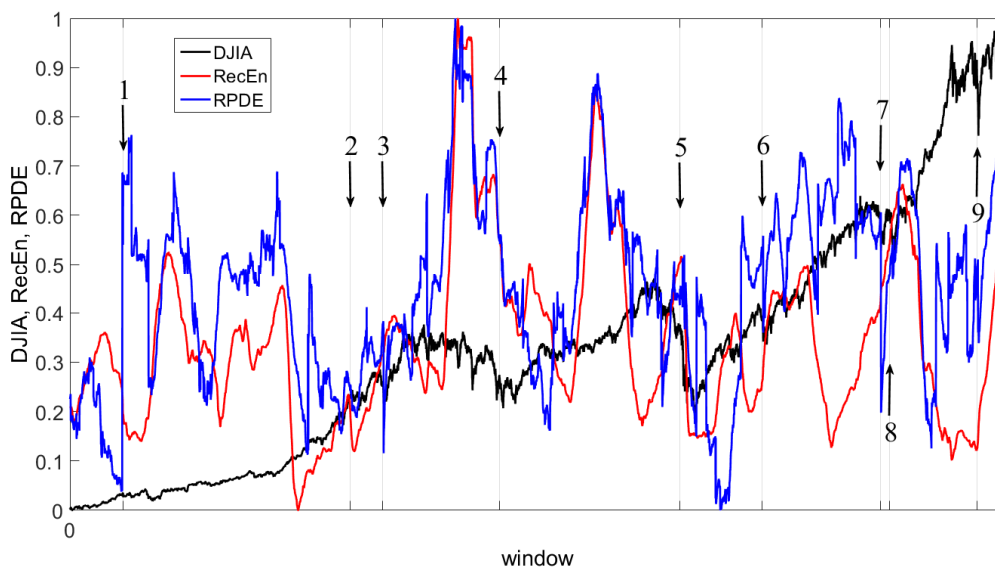


Рис. 7. Динаміка значень ентропії рекурентності (RecEn) та ентропії періоду рекурентності (RPDE) при використанні процедури рухомого вікна шириною $win = 500$ та кроком вікна $step = 1$, розрахованих для Dow Jones Index Average. Стрілками відображено кризові явища, подані у табл. 1.

У таблиці 2 подано список критичних та кризових явищ на спотовому ринку нафти за досліджуваний період. Відповідні номери явищ відмічено на рис. 8 разом з графіками динаміки значень ентропії рекурентності та ентропії періоду рекурентності, отриманими за допомогою процедури рухомого вікна при використанні ширини вікна $win = 500$ та кроку вікна $step = 1$.

Таблиця 2

Критичні та кризові явища на спотовому ринку нафти
за період з 01.01.1987 по 01.06.2019 рр.

N	Часовий період	Тривалість, днів	Падіння показника, %
1	09.12.1987-21.12.1987	9	18
2	11.10.1990-23.08.1990	8	31
3	17.11.1993-17.12.1993	22	18
4	11.04.1996-05.06.1996	38	22
5	30.09.1998-25.11.1998	40	33
6	07.03.2000-10.04.2000	24	29
7	27.11.2000-20.12.2000	17	29
8	14.09.2001-24.09.2011	6	27
9	12.03.2003-21.03.2003	7	28
10	26.10.2004-10.12.2004	31	28
11	07.08.2006-17.11.2006	73	27
12	03.07.2008-23.12.2008	120	80
13	03.05.2010-25.05.2010	16	25
14	29.04.2011-17.05.2011	12	15
15	24.02.2012-28.06.2012	87	27
16	06.09.2013-27.11.2013	58	17
17	20.06.2014-29.01.2015	152	59
18	03.11.2015-20.01.2016	52	44
19	03.10.2018-27.12.2018	56	41

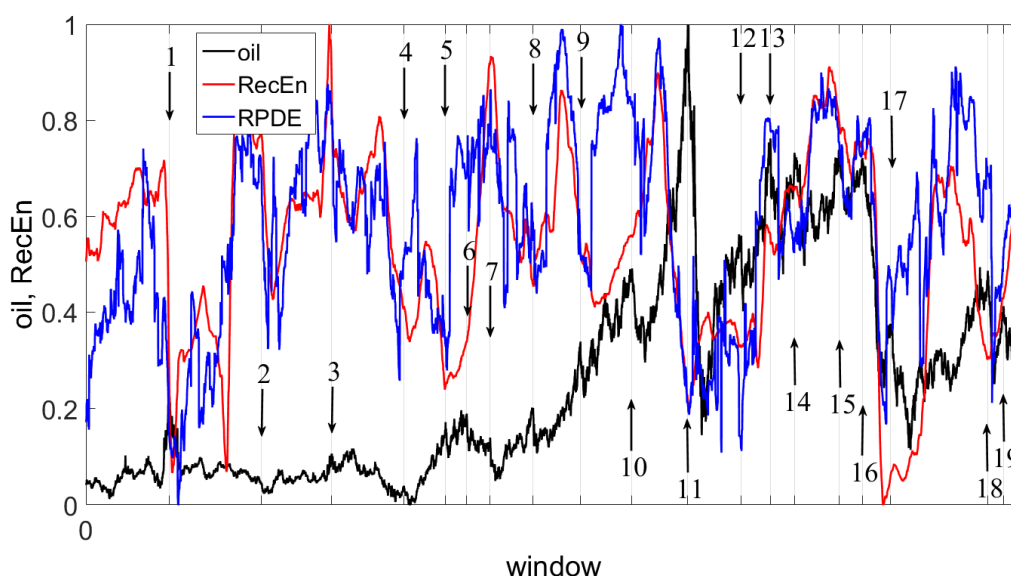


Рис. 8. Динаміка значень ентропії рекурентності (RecEn) та ентропії періоду рекурентності (RPDE) при використанні процедури рухомого вікна шириною $win = 500$ та кроком вікна $step = 1$, розрахованих для цін на спотовому ринку нафти. Стрілками відображено кризові явища, подані у табл. 2.

Висновки, отримані у результаті аналізу отриманих графіків, підтвердили висновки, зроблені для індекса ДІА, й дозволили їх узагальнити наступним чином.

1. У поведінці динаміки значення RPDE спостерігається яскраво виражена волатильність, обумовлена, очевидно, способом розрахунку показника ентропії. У той же час графік значення RecEn є більш згладженим.

2. На обидва показники суттєво впливає значення околу сусідства, а тому перед проведенням дослідження на заданому часовому ряді необхідне проведення процедури оцінки використовуваного значення.

3. Значення RecEn є більш чутливим до критичних явищ і дозволяє виявляти їх за деякий час до початку безпосередньо самого явища, у період його підготовки. Це узгоджується з деякими теоріями виникнення та розвитку критичних явищ у економічних системах, що наголошують про внутрішні зміни системи під час наближення критичних та кризових явищ.

Висновки

У результаті проведеної роботи розглянуто застосування ентропійного підходу до дослідження економічних систем, результати діяльності яких подано у вигляді часових рядів. Розглянуто два методи розрахунку показників ентропії на основі часових рядів – ентропію рекурентності та ентропію періоду рекурентності – що опираються на методіку рекурентних відображень Н. Марвана. Досліджено поведінку розглянутих ентропій на основі часових рядів, що містять економічні показники: ряду денних значень індекса DJIA та ряду денних значень цін нафти на спотовому ринку. Зроблено висновки про чутливість розглянутих показників ентропії до критичних та кризових явищ, що відбуваються у економічних системах. Відмічено більшу чутливість ентропії періоду рекурентності до змін, що відбуваються у системі, та більший час, за який ентропія рекурентності починає реагувати на підготовку у економічній системі критичного явища.

Отже, ентропії періоду рекурентності та рекурентності можуть успішно застосовуватись до дослідження стану економічних систем та, потенційно, слугувати індикаторами-передвісниками надходження особливих станів економічної системи у майбутньому.

Список використаної літератури:

1. Кубо, Р. Термодинамика / Р. Кубо; пер с англ. – М.: Мир, 1970. – 307 с.
2. Sole, R.V. Information theory of complex networks: on Evolution and Architectural constraints / R.V. Sole, S. Valverde // *Lecture Notes in Physics*. – 2004. – Vol. 650. – p. 189-207.
3. Tsallis, C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics, Approaching a Complex World / C. Tsallis. – New-York: Springer, 2009. – 382 p.
4. Joshua, S. Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy / S. Joshua, J. Richman, R. Moorman // *Am. J Physiol. Heart Circ. Physiol.* – 2000. – I. 278. – H2039-H2049.
5. Синергетичні та еконофізичні методи дослідження динамічних та структурних характеристик економічних систем: монографія / В. Д. Дербенцев, О. А. Сердюк, О. Д. Шарапов, В. М. Соловйов. – Черкаси: Брама-Україна, 2010. – 300 с.
6. Моделирование сложных систем: Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни / В.М. Соловйов, О.А. Сердюк, Г.Б. Данильчук. – Черкаси : Брама-Черкаси, 2016. – 194 с.
7. Marwan, N. Recurrence plots for the analysis of complex systems / N. Marwan, M.C. Romano, M. Thiel, J. Kurths // *Physics Reports*. – 2007. – V. 438. – P. 237-329. – Режим доступу: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2006.11.001>
8. Eckmann, J.-P. Recurrence Plots of Dynamical Systems / J.-P. Eckmann, S. Kamphorst, D. Ruelle // *Europhysics Letters (epl)*. – 1987. – V. 4. – P. 973-977. – Режим доступу: <https://doi.org/10.1209/0295-5075/4/9/004>
9. Ott E. *Chaos in Dynamical Systems* / E. Ott. – Cambridge University Press, 2012. – 478 p. – Режим доступу: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511803260>
10. Argyris, J. H. *An Exploration of Chaos: An Introduction for Natural Scientists and Engineers (Texts on Computational Mechanics)* / J. H. Argyris, G. Faust, M. Haase. – North Holland, 1994. – 751 pp.

11. Kantz H. *Nonlinear Time Series Analysis* / H. Kantz, T. Schreiber. – Cambridge University Press, 2003. – 388 pp.
12. Cross Recurrence Plot Toolbox for Matlab. Reference Manual [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://tocsy.pik-potsdam.de/CRPtoolbox/>
13. Marwan, N. Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data / N. Marwan, N. Wessel, U. Meyerfeldt, A. Schirdewan, J. Kurths // *Phys. Rev.* – 2002. – Vol. 66, I. 2. – 026702. – Режим доступу: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.026702>
14. Gao, J. On the structures and quantification of recurrence plots / J. Gao, H. Cai // *Physics Letters A.* – 2000. – V. 270, I. 1-2. – P. 75-87. – Режим доступу: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(00\)00304-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00304-2)
15. Marwan, N. Complex network approach for recurrence analysis of time series / N. Marwan, J. Donges, Y. Zou, R. Donner, J. Kurths // *Physics Letters A.* – 2009. – V. 373. – P. 4246-4254. – Режим доступу: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.09.042>
16. Little, M.A. Exploiting Nonlinear Recurrence and Fractal Scaling Properties for Voice Disorder Detection / M.A. Little, P.E. McSharry, S.J. Roberts, D.AE. Costello, I.M. Moroz // *BioMedical Engineering OnLine.* – 2007. – V. 6, Article number: 23. – Режим доступу: <https://doi.org/10.1186/1475-925X-6-23>
17. Corso, G. A novel entropy recurrence quantification analysis / G. Corso, T. L. Prado, G. Z. dos S. Lima, S. R. Lopes [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/1707.00944>
18. CROSS RECURRENCE PLOT TOOLBOX [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://tocsy.pik-potsdam.de/CRPtoolbox/index.html>

Bibliography:

1. Kubo, R. (1970). *Termodinamika* [Thermodynamics]. M.: Mir [in Russian].
2. Sole, R.V., & Valverde S. (2004). Information theory of complex networks: on Evolution and Architectural constraints. *Lecture Notes in Physics*, 650, 189-207.
3. Tsallis, C. (2009). *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics, Approaching a Complex World*. New-York: Springer.
4. Joshua, S., Richman, J., & Moorman R. (2000). Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy. *Am. J Physiol. Heart Circ. Physiol.* 278, H2039-H2049.
5. Derbentsev, V.D., Serdiuk, O.A., Sharapov, O.D., & Soloviev, V.M. (2010). Synerhetychni ta ekonofizychni metody doslidzhennia dynamichnykh ta strukturnykh kharakterystyk ekonomichnykh system: monohrafiia [Synergetic and econophysical methods for studying the dynamic and structural characteristics of economic systems: a monograph]. Cherkasy: Brama-Ukraine [in Ukrainian].
6. Soloviev, V.M., Serdiuk, O.A., Danylchuk, G.B. (2016). Modeliuvannia skladnykh system [Modeling of Complex Systems]. *Navchalno-metodychnyi posibnyk dlia samostiinoho vyvchennia dysypliny* [A Guide for Independent Study of a Discipline]. Cherkasy: Brama-Ukraine [in Ukrainian].
7. Marwan, N., Romano, M.C., Thiel, M., & Kurths J. (2007). Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports*, 438, 237-329. Retrieved from: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2006.11.001>
8. Eckmann, J.-P., Kamphorst, S., & Ruelle D. (1987). Recurrence Plots of Dynamical Systems. *Europhysics Letters (epL)*, 4, 973-977. – Retrieved from: <https://doi.org/10.1209/0295-5075/4/9/004>
9. Ott, E. (2012). *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press. – Retrieved from: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511803260>
10. Argyris, J. H., Faust, G., & Haase, M. (1994). *An Exploration of Chaos: An Introduction for Natural Scientists and Engineers* (Texts on Computational Mechanics). North Holland.
11. Kantz, H., & Schreiber, T. (2003). *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press.
12. Cross Recurrence Plot Toolbox for Matlab. Reference Manual. Retrieved from: <http://tocsy.pik-potsdam.de/CRPtoolbox/>
13. Marwan, N., Wessel, N., Meyerfeldt, U., Schirdewan, A., & Kurths J. (2002). Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data. *Phys. Rev.* 66(2), 026702. Retrieved from: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.026702>
14. Gao, J., & Cai, H. (2000). On the structures and quantification of recurrence plots. *Physics Letters A*, 270(1-2), 75-87. – Retrieved from: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(00\)00304-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00304-2)
15. Marwan, N., Donges, J., Zou, Y., Donner, R., & Kurths, J. (2009). Complex network approach for recurrence analysis of time series. *Physics Letters A*, 373, 4246-4254. Retrieved from: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.09.042>
16. Little, M.A., McSharry, P.E., Roberts, S.J., Costello, D.AE., & Moroz, I.M. (2007). Exploiting Nonlinear Recurrence and Fractal Scaling Properties for Voice Disorder Detection. *BioMedical Engineering OnLine*, 6, article number: 23. Retrieved from: <https://doi.org/10.1186/1475-925X-6-23>
17. Corso, G., Prado, T. L., Lima, G. Z. dos S., & Lopes, S. R. (2017). A novel entropy recurrence quantification analysis. Retrieved from: <https://arxiv.org/abs/1707.00944>

18. CROSS RECURRENCE PLOT TOOLBOX. Retrieved from: <http://tocsy.pik-potsdam.de/CRPtoolbox/index.html>

SOLOVIEV Vladimir,

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chair of the Department of Informatics and Applied Mathematics, Kryvyi Rih State Pedagogical University, Ukraine

SERDIUK Oleksandr,

Candidate of Economic Sciences, Department of Informatics and Applied Mathematics, The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Ukraine

THE MODELS OF APPLICATION THE RECURRENCE ENTROPY AND RECURRENCE PERIOD DENSITY ENTROPY TO THE ANALYSIS OF COMPLEX SYSTEMS DYNAMICS

Summary. Introduction. *Complex systems are the systems with a large number of agents that interact with each other, and during such interactions new characteristics of the systems are generated. The using of quantitative methods in the modeling processes involves measurement procedures where the system complexity indicators are quite important. One such approach is to use the concept of entropy, which has been successfully used to study economic systems, which are also complex systems. Currently, among many ways of determining the entropy of a complex system, there are several new ones that rely on the analysis of recurrence diagrams, a technique developed by Norbert Marwan. Consideration of two such methods was taken for the study conducted in this paper.*

The purpose of the article is to describe and evaluate the possibility of applying to the economic series two concepts of entropy based on the analysis of recurrence diagrams: recurrence entropy and recurrence period density entropy.

Results. *The paper deals with the method of calculation of two entropy types on the basis of Norbert Marwan recurrence diagrams: entropy of the recurrence period density and recurrence entropy. The behavior of entropies on synthetic time series with and without noise is demonstrated. The general neighborhood error that can be used in practical research are identified. Based on the application of the moving window procedure, the stability of the calculated values on synthetic time series is demonstrated. The results of application the entropies to time series DJIA and oil prices are demonstrated to determine the possibility of applying the entropy values considered.*

Conclusions. *The analysed indicators have shown a high sensitivity to critical and crisis phenomena in economic systems. There is a greater sensitivity of the recurrence period density entropy to changes in the system, and more time during which the recurrence entropy begins to respond to the preparation in the economic system of a critical phenomenon. Thus, the recurrence period density entropy and recurrence entropy can be successfully applied to the study of the state of economic systems and serve as pre-cursor of the arrival of unique states in the economic system in the future.*

Keywords: *complex system, entropy, recurrence plot, critical event.*

Одержано редакцією 17.06.2019 р.
Прийнято до публікації 04.09.2019 р.

УДК 519.6: 004.023

DOI 10.31651/2076-5886-2019-2-34-43

PACS PACS 02.60.-x, 02.60.Pn, 02.70.-c

ЧЕРКАС Дар'я Валеріївна

магістрантка спеціальності «Прикладна математика» Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького
e-mail: cherkas.dasha1@gmail.com

КРАСНОШЛИК Наталія

Олександрівна

кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри прикладної математики та інформатики Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького