

УДК 519.115.1

PACS 01.40.-d; 02.10.Ox; 02.10.De; 02.30.Gp; 02.60.Dc

О.С. Білопранич, В.В. Атамась

ФОРМУЛА КІЛЬКОСТІ РОЗФАРБУВАНЬ КВАДРАТА $k \times k$ ТА КУБА $k \times k \times k$ В ДВА КОЛЬОРИ

У статті отримано формули обчислення кількості розфарбувань квадрата, поділеного на $k \times k$ менших квадратів, і куба, поділеного на $k \times k \times k$ менших кубів. Задача підрахунку таких розфарбувань виникла при вивченні самоподібних множин, утворених шляхом вилучення частин із квадрата і куба.

Ключові слова: кількість розфарбувань, квадрат $k \times k$, куб $k \times k \times k$, симетрія.

Постановка проблеми. Своїми яскравими і фундаментальними роботами Бенуа Мандельброт пробудив загальний інтерес до фрактальної геометрії – терміну, введеному самим Мандельбротом. Відомі фрактали такі, як множина Кантора, сніжинка Коха, трикутник і килим Серпінського спочатку вважались «монстрами математики», але з часом дали розвиток нового напрямку математики [2].

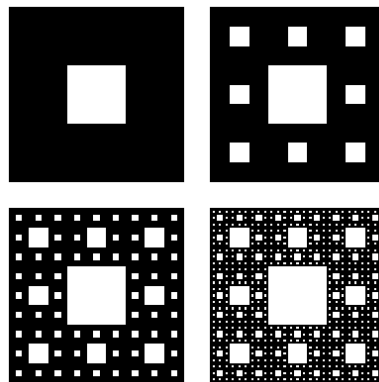


Рис. 1. Килим Серпінського

Килим Серпінського отримуємо так: візьмемо квадрат, на першому кроці поділимо його на 9 конгруентних квадратів і відкинемо середній квадрат. На наступному кроці проробимо це з кожним квадратом, що залишився і т. д. В результаті нескінченного числа таких відкидань отримаємо фігуру, яка і є килимом Серпінського. А якщо викинути не центральний квадрат, а якийсь з бічних або кутових? І що буде, коли викинути одразу декілька квадратів? А якщо ми перейдемо в тривимірний простір? Будемо викидати не квадрати, а менші куби. Які фігури ми отримаємо?

Важливим також є питання про кількість різних фрактальних об'єктів, які можна побудувати, відкидаючи ту чи іншу кількість квадратів чи кубів. Розв'язування цієї комбінаторної задачі можна звести до підрахунку кількості розфарбування квадрата чи куба, поділених на менші квадрати і куби відповідно, у два кольори.

Мета статті – розв'язати комбінаторну задачу обрахунку кількості можливих розфарбувань в два кольори куба $k \times k \times k$ та квадрата $k \times k$, де $k = 2, 3, \dots$

Викладення основного матеріалу. Комбінаторна задача обчислення кількості варіантів розфарбування квадрата в два кольори тісно пов'язане з лемою Бернсайда [1, с. 69], яка сформульована нижче. Для її застосування нам потрібно розглянути групу самосуміщень квадрата [1, с. 60].

Всі самосуміщення квадрата є або поворотами $\alpha_0 = \varepsilon, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на кути $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ відповідно навколо центра квадрата, або симетріями $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ відносно осей k, l, m, n відповідно, проведених через середини протилежних сторін і через протилежні вершини.

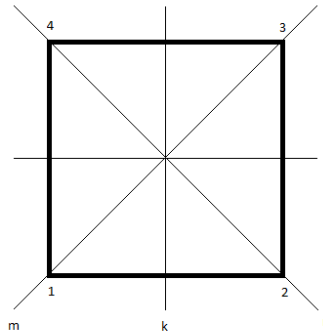


Рис. 2. Осі симетрії квадрата.

Відповідність між самосуміщеннями квадрата і перестановками на множині вершин квадрата має вигляд: $\alpha_1 \sim (1\ 2\ 3\ 4)$, $\alpha_2 \sim (1\ 3)(2\ 4)$, $\alpha_3 \sim (1\ 4\ 3\ 2)$, $\alpha_4 \sim (1\ 2)(3\ 4)$, $\alpha_5 \sim (1\ 4)(2\ 3)$, $\alpha_6 \sim (2\ 4)$, $\alpha_7 \sim (1\ 3)$. Група симетрій квадрата є підгрупою симетричної групи S_4 , вона позначається символом D_4 .

Нехай G – група перестановок на множині $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Підмножина $O \subset M$ називається *орбітою групи G* , якщо:

- 1) для будь-якого $\alpha \in G$ і будь-якого $a \in O$ $\alpha(a) \in O$;
- 2) будь-які два елемента з O можна перевести один в один деякою перестановкою з G .

Лема Бернсайда. Нехай $\chi(\alpha)$ – число нерухомих точок перестановки α , $t(G)$ – число орбіт групи перестановок $G = \{\alpha_0 = \varepsilon, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\}$, що діє на множині $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Тоді для будь-якої групи перестановок має місце рівність

$$t(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in G} \chi(\alpha).$$

Для підрахунку кількості розфарбувань квадрату, поділеного на $k \times k$ менших квадратів, розглянемо два випадки.

1 випадок. $k = (2n) \times (2n)$.

Розглянемо повороти на кути $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. У цьому випадку відсутній центральний квадрат, тому перестановки α_1, α_3 не мають нерухомих точок, отже дані повороти мають $\frac{2n \cdot 2n}{4} = n^2$ циклів типу $(\cdot \cdot \cdot \cdot)$. Для α_2 при повороті на кут π нерухомі точки відсутні також, але всі цикли мають вигляд $(\cdot \cdot)$ і їхня кількість рівна $\frac{2n+2n}{2} = 2n^2$.

Симетріям відносно осей k, l , що з'єднують протилежні ребра, відповідають перестановки α_4, α_5 , вони також складаються з циклів типу $(\cdot, \cdot)$ а отже і кількість їх буде рівною $2n^2$. Існує симетрія відносно двох діагоналей m, n . Їм відповідають перестановки: α_6, α_7 . При симетрії відносно діагоналі m , всі елементи, що лежать на ній залишаються на місці – $(\cdot)$, їхня кількість рівна $2n$. Елементи, що залишилися, входять до циклів типу $(\cdot, \cdot)$, з кількістю $\frac{2n \cdot 2n - 2n}{2} = 2n^2 - n$. Разом з тотожною перестановкою $\alpha_0 \sim (1)(2)(3)(4) \dots (4n^2)$, ми отримали 8 перестановок – всі елементи групи G . Отже, в групі G поворотів і симетрії квадрата ми маємо:

Таблиця 1

Перестановка	Тип	Кількість	Кількість розфарбувань
Тотожна	$\langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$	1	2^{4n^2}
Симетрія відносно осей m, n	$\langle \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{2n^2-n}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2n} \rangle$	2	2^{2n^2+n}
Симетрія відносно діагоналей k, l та поворот на π	$\langle 2, 2, 2, \dots, 2 \rangle$	3	2^{2n^2}
Повороти на кути $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	$\langle 4, 4, 4, \dots, 4 \rangle$	2	2^{n^2}

Позначимо через $p(D_4^{2n})$ кількість різних з точністю до вказаних симетрій розфарбувань квадрату, поділеного на $(2n)^4$ менших квадратів. Відповідно до леми Бернсайда, маємо:

$$p(D_4^{2n}) = \frac{1}{8}(2^{4n^2} + 2 \cdot 2^{2n^2+n} + 3 \cdot 2^{2n^2} + 2 \cdot 2^{n^2}), \quad (1)$$

Спростимо (1) і отримаємо:

$$p(D_4^{2n}) = 2^{n^2-2}(2^{n^2-1}(2^{2n^2} + 3) + 2^n + 1). \quad (1')$$

2 випадок. $k = (2n+1) \times (2n+1)$.

Розглянемо повороти на кути $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. При поділі квадрату маємо центральний квадрат, тому перестановки α_1, α_3 мають одну нерухому точку і $\frac{(2n+1)(2n+1)-1}{4} = n^2 + n$ циклів типу $(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$. В сумі повороти на кути $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ мають $n^2 + n + 1$ циклів. В α_2 при повороті на кут π центральна точка нерухома а всі інші дужки мають вигляд $(\cdot, \cdot)$ і їхня кількість рівна $\frac{(2n+1)(2n+1)-1}{2} = 2n^2 + 2n$. Просумувавши отримаємо $2n^2 + 2n + 1$.

Відносно осей k, l , що з'єднують протилежні ребра існують симетрії. Їм відповідають перестановки α_4 і α_5 , в них всі елементи, що лежать на осі симетрії – нерухомі, їхня кількість рівна $2n + 1$, всі інші точки входять до перестановок типу $(\cdot \cdot)$ а кількість їх буде рівною $\frac{(2n+1)(2n+1)-(2n+1)}{2} = 2n^2 + n$. Всього отримуємо $2n^2 + 3n + 1$ циклів.

При симетрії відносно діагоналі m , всі елементи, що лежать на ній, залишаються на місці – $(\cdot)$, їхня кількість рівна $2n + 1$. Решта елементів входять до циклів типу $(\cdot \cdot)$, з кількістю $\frac{(2n+1)(2n+1)-(2n+1)}{2} = 2n^2 + n$. Отже загальна сума циклів дорівнює $2n^2 + 3n + 1$. Для діагоналі n всі підрахунки аналогічні.

Разом з тотожною перестановкою $\alpha_0 \sim (1)(2)(3) \dots ((2n+1)^2)$, ми отримали 8 перестановок – всі елементи групи G . Отже, в групі G поворотів і симетрії квадрата маємо:

Таблиця 2

Перестановка	Тип	Кількість	Кількість розфарбувань
Тотожна	$\langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$	1	$2^{(2n+1)^2}$
Симетрія відносно осей m, n та діагоналей k, l	$\underbrace{\langle 2, 2, \dots, 2 \rangle}_{2n^2+n} \underbrace{\langle 1, 1, \dots, 1 \rangle}_{2n+1}$	4	2^{2n^2+3n+1}
Поворот на π	$\underbrace{\langle 2, 2, \dots, 2 \rangle}_{2n^2+2n} \langle 1 \rangle$	1	2^{2n^2+2n+1}
Повороти на кути $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	$\underbrace{\langle 4, 4, 4, \dots, 4 \rangle}_{n^2+n} \langle 1 \rangle$	2	2^{n^2+n+1}

Таким чином, відповідно до леми Бернсайда, маємо:

$$p(D_4^{2n+1}) = \frac{1}{8} (2^{(2n+1)^2} + 4 \cdot 2^{2n^2+3n+1} + 2^{2n^2+2n+1} + 2 \cdot 2^{n^2+n+1}), \quad (2)$$

Спростимо (2) і отримаємо:

$$p(D_4^{2n+1}) = 2^{n^2+n-1} (2^{2n^2+n-1} (2^{2n^2+2n} + 2^{n+2} + 1) + 1). \quad (2')$$

Об'єднавши формули для $(1')$ і $(2')$, отримаємо:

$$p(D_4^k) = \begin{cases} 2^{n^2-2} (2^{n^2-1} (2^{2n^2} + 3) + 2^n + 1), & \text{якщо } k = 2n \\ 2^{n^2+n-1} (2^{n^2+n-1} (2^{2n^2+2n} + 2^{n+2} + 1) + 1), & \text{якщо } k = 2n + 1 \end{cases}$$

Теорема. Кількість варіантів розфарбувань квадрата поділеного на k^2 , де $k = 2, 3, \dots$, менших квадратів з урахуванням поворотів на кути $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ та симетрії

відносно його діагоналей і осей, що з'єднують середини протилежних сторін, обчислюється за формулою:

$$p(D_4^k) = \begin{cases} 2^{n^2-2}(2^{n^2-1}(2^{2n^2} + 3) + 2^n + 1), & \text{якщо } k = 2n \\ 2^{n^2+n-1}(2^{n^2+n-1}(2^{2n^2+2n} + 2^{n+2} + 1) + 1), & \text{якщо } k = 2n + 1. \end{cases}$$

Кількість розфарбувань куба $k \times k \times k$, де $k = 2, 3, \dots$

Симетрії куба поділяються на два типи: перетворення першого роду, які не змінюють орієнтацію куба та перетворення другого роду, при яких змінюється орієнтація довільного тетраедра простору. Перетворення першого роду є поворотами навколо осей, відповідну групу, яку вони утворюють, будемо називати групою поворотів куба.

Куб має центр симетрії (точка перетину його діагоналей), 3 осі симетрії четвертого порядку, 4 осі симетрії третього порядку і 6 осей симетрії другого порядку. Достатньо розглянути повороти навколо осей симетрії.

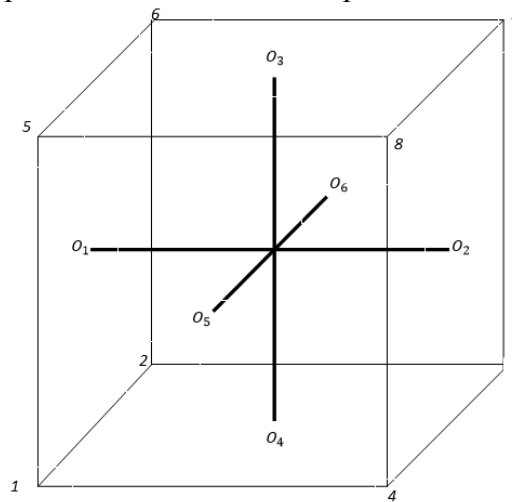


Рис. 3. Осі симетрій куба.

Осі симетрії четвертого порядку – це осі O_1O_2 , O_3O_4 , O_5O_6 , які проходять через центри протилежних граней. Навколо кожної з цих осей є по три нетотожних повороти, а саме повороти на кути $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$. Цим поворотам відповідають 9 перестановок вершин куба, при яких вершини протилежних граней переставляються циклічно і узгоджено.

Осями симетрії третього порядку є діагоналі куба. Навколо кожної з чотирьох діагоналей $(1,7)$, $(2,8)$, $(3,5)$, $(4,6)$ є по два нетотожні повороти на кути $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$. Всього отримуємо 8 таких поворотів.

Осями симетрії другого порядку будуть прямі, які з'єднують середини протилежних ребер куба. Є шість пар протилежних ребер, кожна пара визначає одну вісь симетрії, отже отримуємо 6 осей симетрії другого порядку. Навколо кожної осі є один нетотожний поворот. Всього 6 поворотів.

Разом з тотожною перестановкою отримуємо $9 + 8 + 6 + 1 = 24$ різних поворотів. Повороти куба визначають перестановки на множині його вершин, ребер, граней і діагоналей. Розглянемо, як діє група поворотів куба на множині його

діагоналей. Різні повороти куба переставляють діагоналі куба по-різному, отже їм відповідають різні перестановки на множині діагоналей. Тому група поворотів куба визначає групу перестановок на множині діагоналей, яка складається з 24 перестановок. Оскільки куб має 4 діагоналі, група всіх таких перестановок співпадає з симетричною групою на множині діагоналей. Отже, будь-яка перестановка діагоналей куба відповідає деякому його повороту, причому різним перестановкам відповідають різні повороти [1; 71].

Опишемо тепер всю групу симетрій куба. Візьмемо одну симетрію відносно площини, що з'єднує середини чотирьох ребер і проходить через центр симетрій. Таких площин існує три. Якщо візьмемо підстановку (15)(26)(37)(48) і перемножимо на всі повороти, то отримаємо ще 24 підстановки.

Таблиця 3

№	Перетворення куба	Повороти	Підстановки утворені множенням (15)(26)(37)(48) на відповідний поворот
1	Тотожна перестановка	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)	(15)(26)(37)(48)
2	Поворот відносно осі O_3O_4 на кут $\frac{\pi}{2}$	(1234)(5678)	(1638)(2745)
3	Поворот відносно осі O_3O_4 на кут π	(13)(24)(57)(68)	(17)(28)(35)(46)
4	Поворот відносно осі O_3O_4 на кут $\frac{3\pi}{2}$	(1432)(5876)	(1836)(2547)
5	Поворот відносно осі O_1O_2 на кут $\frac{\pi}{2}$	(1562)(4873)	(1)(4)(6)(7)(25)(38)
6	Поворот відносно осі O_1O_2 на кут π	(16)(25)(47)(38)	(12)(34)(56)(78)
7	Поворот відносно осі O_1O_2 на кут $\frac{3\pi}{2}$	(1265)(4378)	(2)(3)(5)(8)(16)(47)
8	Поворот відносно осі O_5O_6 на кут $\frac{\pi}{2}$	(1584)(2673)	(1)(2)(7)(8)(45)(36)
9	Поворот відносно осі O_5O_6 на кут π	(18)(45)(27)(36)	(14)(23)(58)(67)
10	Поворот відносно осі O_5O_6 на кут $\frac{3\pi}{2}$	(1485)(2376)	(3)(4)(5)(6)(18)(27)
11	Поворот відносно осі $[1,7]$ на кут $\frac{\pi}{3}$	(1)(7)(245)(386)	(2)(8)(156734)
12	Поворот відносно осі $[1,7]$ на кут $\frac{2\pi}{3}$	(1)(7)(254)(368)	(4)(6)(158732)
13	Поворот відносно осі $[2,8]$ на кут $\frac{\pi}{3}$	(2)(8)(163)(457)	(3)(5)(126784)

Продовження Таблиці 3

14	Поворот відносно осі [2,8] на кут $\frac{2\pi}{3}$	(2)(8)(136)(475)	(1)(2)(265843)
15	Поворот відносно осі [3,5] на кут $\frac{\pi}{3}$	(3)(5)(186)(247)	(2)(8)(143765)
16	Поворот відносно осі [3,5] на кут $\frac{2\pi}{3}$	(3)(5)(168)(274)	(4)(6)(123785)
17	Поворот відносно осі [4,6] на кут $\frac{\pi}{3}$	(4)(6)(183)(257)	(3)(5)(148762)
18	Поворот відносно осі [4,6] на кут $\frac{2\pi}{3}$	(4)(6)(138)(275)	(1)(7)(234856)
19	Поворот відносно осі, що з'єднує середини протилежних ребер на кут π	(15)(37)(46)(28)	(1)(3)(5)(7)(24)(68)
20	Поворот відносно осі, що з'єднує середини протилежних ребер на кут π	(48)(26)(17)(35)	(2)(4)(6)(8)(13)(57)
21	Поворот відносно осі, що з'єднує середини протилежних ребер на кут π	(14)(67)(35)(28)	(1863)(2457)
22	Поворот відносно осі, що з'єднує середини протилежних ребер на кут π	(58)(23)(17)(46)	(2754)(1368)
23	Поворот відносно осі, що з'єднує середини протилежних ребер на кут π	(12)(78)(35)(46)	(1683)(2574)
24	Поворот відносно осі, що з'єднує середини протилежних ребер на кут π	(34)(56)(17)(28)	(1386)(2475)

Отримали 24 повороти та 24 симетрій.

Таким чином, група симетрій куба K_3 містить такі типи підстановок:

$(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)$ – 1 підстановка;

$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot)(\cdot)$ – 8 підстановок;

$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)$ – 13 підстановок;

$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot\cdot)$ – 8 підстановок;

$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)$ – 6 підстановок;

$(\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot)$ – 12 підстановок.

Знову розглянемо два випадки.

1. Кількість розфарбувань куба $2n \times 2n \times 2n$ в два кольори.

Поділимо куб на $(2n)^3$ менших кубів. Відповідно до типів підстановок, вказаних вище, розглянемо типи підстановок, що діють $(2n)^3$ кубах. Для зручності використаємо таблицю.

Таблиця 4

Тип підстановки, що діють на кубі	Кількість	Тип підстановки на менших кубах	Кількість розфарбувань
$(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)$	1	$\frac{(\cdot)(\cdot) \dots (\cdot)}{(2n)^3}$	$2^{(2n)^3}$
$(\dots)(\dots)(\cdot)(\cdot)$	8	$\frac{(\dots)(\dots) \dots (\dots)(\cdot)(\cdot) \dots (\cdot)}{\frac{(2n)^3 - (2n)}{3} (2n)}$	$2^{\frac{(2n)^3 - (2n)}{3} + (2n)}$
$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)$	13	$\frac{(\cdot\cdot)(\cdot\cdot) \dots (\cdot\cdot)}{\frac{(2n)^3}{2}}$	$2^{\frac{(2n)^3}{2}}$
$(\cdot\cdot)(\dots\dots)$	8	$\frac{(\cdot\cdot)(\cdot\cdot) \dots (\cdot\cdot)(\dots\dots)(\dots\dots) \dots (\dots\dots)}{\frac{(2n)}{2} \frac{(2n)^3 - (2n)}{6}}$	$2^{\frac{(2n)^3 - (2n)}{6} + \frac{(2n)}{2}}$
$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)$	6	$\frac{(\cdot\cdot)(\cdot\cdot) \dots (\cdot\cdot)(\cdot)(\cdot) \dots (\cdot)}{\frac{(2n)^3 - (2n)^2}{2} (2n)^2}$	$2^{\frac{(2n)^3 - (2n)^2}{2} + (2n)^2}$
$(\dots\dots)(\dots\dots)$	12	$\frac{(\dots\dots)(\dots\dots) \dots (\dots\dots)}{\frac{(2n)^3}{4}}$	$2^{\frac{(2n)^3}{4}}$

Відповідно до леми Бернсайда, кількість розфарбувань куба, поділеного на $(2n)^3$ кубів, шукаємо за формулою:

$$K_3^{2n} = \frac{1}{48} \left(2^{(2n)^3} + 8 \cdot 2^{\frac{(2n)^3 - (2n)}{3} + (2n)} + 13 \cdot 2^{\frac{(2n)^3}{2}} + 8 \cdot 2^{\frac{(2n)^3 - (2n)}{6} + \frac{(2n)}{2}} + 6 \cdot 2^{\frac{(2n)^3 - (2n)^2}{2} + (2n)^2} + 12 \cdot 2^{\frac{(2n)^3}{4}} \right), \quad (2.1)$$

Спростимо формулу (2.1) і отримаємо:

$$K_3^{2n} = \frac{2^{(2n)^3 - 4} + 2^{\frac{(2n)^3 + 4n - 8}{3}} + 13 \cdot 2^{\frac{(2n)^3 - 8}{2}} + 2^{\frac{(2n)^3 - 2n - 8}{6}}}{3} + 2^{\frac{(2n)^3 + (2n)^2 - 8}{2}} + 2^{\frac{(2n)^3 - 8}{4}}, \quad \text{де } n \in \mathbb{N} \quad (2.1')$$

2. Кількість розфарбувань куба $(2n + 1) \times (2n + 1) \times (2n + 1)$ в два кольори.

Поділимо куб на $(2n + 1)^3$ менших кубів. Знову побудуємо таблицю типів підстановок на менших кубах. Для зручності використаємо таблицю.

Таблиця 5

Тип підстановки, що діють на кубі	Кількість	Тип підстановки на менших кубі	Кількість розфарбувань
$\frac{(\cdot)(\cdot) \dots (\cdot)}{8}$	1	$\frac{(\cdot)(\cdot) \dots (\cdot)}{(2n+1)^3}$	$2^{(2n+1)^3}$
$(\dots)(\dots)(\cdot)(\cdot)$	8	$\frac{(\dots)(\dots) \dots (\dots)(\cdot)(\cdot) \dots (\cdot)}{\frac{(2n+1)^3 - (2n+1)}{3} (2n+1)}$	$2^{\frac{(2n+1)^3 - (2n+1)}{3} + (2n+1)}$

Продовження Таблиці 5

$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)$	13	$\frac{(\cdot\cdot)(\cdot\cdot) \dots (\cdot\cdot)(\cdot\cdot) \dots (\cdot\cdot)(\cdot\cdot)}{\frac{(2n+1)^5 - (2n+1)^2}{2}} \cdot \frac{(\cdot)(\cdot) \dots (\cdot)(\cdot) \dots (\cdot)(\cdot)}{(2n+1)^2}$	$2^{\frac{(2n+1)^5 - (2n+1)^2}{2} + (2n+1)}$
$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot\cdot)$	8	$\frac{(\cdot\cdot)(\cdot\cdot) \dots (\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot\cdot) \dots (\cdot\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot\cdot)}{\frac{(2n+1)^5 - 1}{2} \cdot \frac{(2n+1)^5 - (2n+1)}{6}} \cdot$	$2^{\frac{(2n+1)^5 - (2n+1)}{6} + \frac{(2n+1) - 1}{2}}$
$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)$	6	$\frac{(\cdot\cdot)(\cdot\cdot) \dots (\cdot\cdot)(\cdot\cdot) \dots (\cdot\cdot)(\cdot\cdot)}{\frac{(2n+1)^5 - (2n+1)^2}{2}} \cdot \frac{(\cdot)(\cdot) \dots (\cdot)(\cdot) \dots (\cdot)(\cdot)}{(2n+1)^2}$	$2^{\frac{(2n+1)^5 - (2n+1)^2}{2} + (2n+1)}$
$(\cdot\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot\cdot)$	12	$\frac{(\cdot\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot\cdot) \dots (\cdot\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot\cdot) \dots (\cdot\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot\cdot)}{\frac{(2n+1)^5 - (2n+1)}{4}} \cdot \frac{(\cdot)(\cdot) \dots (\cdot)(\cdot) \dots (\cdot)(\cdot)}{(2n+1)}$	$2^{\frac{(2n+1)^5 - (2n+1)}{4} + (2n+1)}$

Відповідно до леми Бернсайда, кількість розфарбувань шукаємо за формулою:

$$K_3^{(2n+1)} = \frac{1}{48} \left(2^{(2n+1)^5} + 8 \cdot 2^{\frac{(2n+1)^5 - (2n+1)}{5} + (2n+1)} + 13 \cdot 2^{\frac{(2n+1)^5 - (2n+1)^2}{2} + (2n+1)} + 8 \cdot 2^{\frac{(2n+1)^5 - (2n+1)}{6} + \frac{(2n+1) - 1}{2}} + 6 \cdot 2^{\frac{(2n+1)^5 - (2n+1)^2}{2} + (2n+1)} + 12 \cdot 2^{\frac{(2n+1)^5 - (2n+1)}{4} + (2n+1)} \right) \quad (2.2)$$

Спростимо формулу (2.2) і отримаємо:

$$K_3^{(2n+1)} = \frac{2^{(2n+1)^5 - 4} + 19 \cdot 2^{\frac{(2n+1)^5 + (2n+1)^2 - 8}{3}} + 2^{\frac{(2n+1)^5 + 2(2n+1) - 8}{5}} + 2^{\frac{(2n+1)^5 + 2(2n+1) - 8}{6}} + 2^{\frac{(2n+1)^5 + (2n+1) - 8}{4}}}{3} \quad (2.2')$$

де $n \in \mathbb{N}$.

Об'єднавши формули для (2.1') і (2.2'), отримаємо:

$$K_3^k = \begin{cases} \frac{2^{4(2n^2-1)} + 13 \cdot 2^{4(n^2-1)} + 2^{\frac{4n(n^2+1)-1}{3}} + 2^{\frac{2n(n^2+1)-1}{3}}}{3} + 2^{2n^2(2n+1)-2} + 2^{2n^2-2}, & \text{де } n \in \mathbb{N} \\ \frac{2^{(2n+1)^2-4} + 19 \cdot 2^{\frac{(2n+1)^2 + (2n+1)^2 - 8}{3}} + 2^{\frac{(2n+1)^2 + 2(2n+1) - 8}{5}} + 2^{\frac{(2n+1)^2 + 2(2n+1) - 8}{6}} + 2^{\frac{(2n+1)^2 + (2n+1) - 8}{4}}}{3}, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Теорема. Кількість варіантів розфарбувань куба поділеного на k^3 , де $k = 2, 3, \dots$ менших кубів з урахуванням поворотів та симетрії обчислюється за формулою:

$$K_3^k = \begin{cases} \frac{2^{k^2-4} + 2^{\frac{k^2+2k-8}{3}} + 13 \cdot 2^{\frac{k^2-8}{3}} + 2^{\frac{k^2-k-8}{6}}}{3} + 2^{\frac{k^2+k^2-8}{2}} + 2^{\frac{k^2-8}{4}}, & \text{де } k = 2n, \quad n \in \mathbb{N} \\ \frac{2^{k^2-4} + 19 \cdot 2^{\frac{k^2+k-8}{3}} + 2^{\frac{k^2+2k-8}{3}} + 2^{\frac{k^2+2k-8}{6}}}{3} + 2^{\frac{k^2+k-8}{4}}, & \text{де } k = 2n+1, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Висновок. У статті наведено розв'язання задачі про підрахунок кількості розфарбувань у два кольори квадрата, поділеного на $k \times k$ менших квадратів, і куба, поділеного на $k \times k \times k$ менших кубів. Розв'язання цієї задачі знадобиться при побудові самоподібних множин на площині та у просторі.

Теоретично цікавою була б аналогічна задача підрахунку таких розфарбувань у чотирирівимірному чи, взагалі, n -вимірному просторах.

Список використаної літератури:

1. Калужнин Л. А., Сущанский В. И. Преобразования и перестановки: Пер. с укр.— 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 160 с.
2. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. / М. Шредер — Ижевск : НИЦ «Регуляторная и хаотическая динамика», 2001. — 528.

Reference:

7. Kaluzhnnin L. A., Sushchansky V. I. Transformations and permutations: Trans. from ukr.—2-nd pub. — Moscow.: Nauka, 1985. — 160 p (in Rus.).
8. Shroeder M. Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from Infinite Paradise – Izhevsk: SPC «Regulatory and chaotic dynamics», 2001. – 528 p (in Rus.).

Summary

O.S. Bilopranych, V.V. Atamas

THE FORMULA FOR CALCULATING THE NUMBER OF COLORINGS OF SQUARE $k \times k$ AND CUBE $k \times k \times k$ IN TWO COLORS

Introduction. His bright and fundamental work of Benoit Mandelbrot awakened general interest in fractal geometry – a term coined by Mandelbrot. The famous fractals such as the Cantor set, Koch's snowflake, Sierpinski triangle and carpet originally considered "monster of mathematics", but eventually gave new direction of development of mathematics.

Sierpinski carpet is obtained as follows: take the square, in the first step divide it into 9 congruent squares and reject central square. In the next step, do it with each remaining square and so on. As a result, after an infinite number of rejections we obtain the Sierpinski carpet. An interesting question is: what will we obtain if we don't throw a central square, but some other squares? And what if we will throw more than one square? And what will we get in the three-dimensional space?

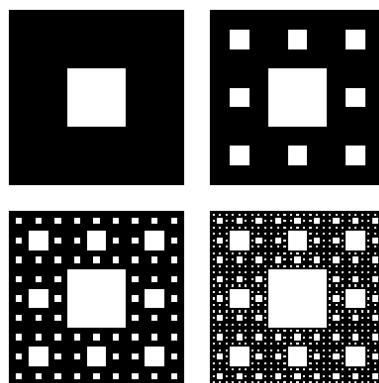


Fig. 1. Sierpinski carpet

The number of different fractal objects that can be built by rejection of some squares or cubes is an important question. Solving of this combinatorial problem can be reduced to counting the number of colorings of the square or cube, divided into smaller squares and cubes respectively, in two colors.

Purpose

Calculation of the number of colorings of cube $k \times k \times k$ and square $k \times k$, where $k = 2, 3, \dots$, in two colors.

Results

Taking into account rotations and symmetry the number of colorings of cube divided into k^3 , where $k = 2, 3, \dots$, smaller cubes, is calculated using the formula:

$$K_2^k = \begin{cases} \frac{2^{k^3-4} + 2^{\frac{k^2+2k-3}{2}} + 13 \cdot 2^{\frac{k^2-3}{2}} + 2^{\frac{k^2-k-6}{2}}}{3} + 2^{\frac{k^2+k^2-6}{2}} + 2^{\frac{k^2-3}{4}}, & \text{where } k = 2n, \quad n \in \mathbb{N} \\ \frac{2^{k^3-4} + 19 \cdot 2^{\frac{k^2+k-3}{2}} + 2^{\frac{k^2+2k-3}{2}} + 2^{\frac{k^2+2k-3}{2}}}{3} + 2^{\frac{k^2+k-3}{4}}, & \text{where } k = 2n+1, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Number of colorings of square divided by k^2 , where $k = 2, 3, \dots$, smaller squares, considering turning on the corners $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ and symmetry against its diagonals and axes connecting opposite sides of the middle is calculated using the formula:

$$p(D_4^k) = \begin{cases} 2^{n^2-2} (2^{n^2-1} (2^{2n^2} + 3) + 2^n + 1), & \text{if } k = 2n \\ 2^{n^2+n-1} (2^{n^2+n-1} (2^{2n^2+2n} + 2^{n+2} + 1) + 1), & \text{if } k = 2n+1. \end{cases}$$

Conclusion

In the article the problem of counting the number of colorings of the square divided by $k \times k$ smaller squares, and cubes, divided by $k \times k \times k$ smaller cubes in two colors is solved.

Keywords: number of colorings, square $k \times k$, cube $k \times k \times k$, symmetry.

*Стаття надійшла 16_12_2015_
Прийнято до друку 23_12_2015_*