СЕКЦІЯ «ІНФОРМАТИКА»

УДК 519.6, 539.3 PACS 02.30.Oz; 02.30.Zz; 02.60.Lj; 02.60.-x; 02.30.Jr; 07.05.Kf

В. А. Громов, И. М. Воронин

ДООБУЧЕНИЕ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Рассматривается обратная задача теории бифуркаций для уравнений Кармана и способы повышения качества её решения. В качестве предвестников бифуркации (инструментов решения обратной задачи) используется характерные последовательности решений, фиксируемых на ветвях первичного и вторичного ветвления. Для выделения характерных последовательностей использовалась процедура кластеризации последовательностей решений указанных ветвей. Центры кластеров и образовывали множество предвестников бифуркации. Для снижения ошибки идентификации предбифуркационных состояний применялась процедура дообучения, в рамках которой идентификационная ценность предвестников бифуркации оценивалась на дополнительном, валидационном множестве с последующим удалением предвестников с низкой идентификационной ценностью.

Ключевые слова: *обратная задача теории бифуркаций, уравнения Кармана, алгоритм Уишарта, дообучение в обратных задачах теории бифуркаций, идентификация предбифуркационных состояний, нелинейные краевые задачи для уравнений в частных производных*

Введение

Необходимость оценки уязвимости различного рода систем в режиме реального времени обуславливает интерес к созданию алгоритмов быстрой оценки наблюдаемого состояния системы с различением состояний, ведущих к утрате функциональности или характеризующихся сохранением работоспособности системы. В работе [1] указанная задача была формализована как обратная задача теории бифуркаций [2-4] и для её решения было предложено использовать характерные последовательности решений, фиксируемых на ветви первичного, вторичного и т. д. ветвления; указанные характерные последовательности образуют множество (топологических) предвестников бифуркации, т. е. инструментов, используемых для решения указанной задачи.

Для получения указанных последовательностей применялась кластеризация векторов обучающей выборки, сформированных как последовательности фиксированной длины из множества решений, фиксируемых на ветвях первичного и т.д. ветвления нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана; центры данных кластеров и составили множество предвестников бифуркации.

В силу необходимости решения обратной задачи теории бифуркаций в режиме реального времени возникает задача уменьшения числа предвестников бифуркации до оптимального значения – задача оценки идентификационной ценности кластеров; процедура получения указанных оценок получила название дообучения.

В настоящей работе формулируется задача оценки идентификационной ценности предвестников бифуркации (кластеров) при решении обратной задачи теории бифуркаций для уравнений Кармана и предлагается метод её решения.

Современное состояние проблемы

Среди множества подходов к построению к решению обратной задачи теории бифуркаций выделяют два магистральных направления: построение шумовых предвестников бифуркации [2], где указанием на приближающуюся бифуркацию служит резкое увеличение амплитуды шума при приближении к точке бифуркации, а также изменение его характеристик, и топологических предвестников [3], являющихся результатом анализа характерных решений, предшествующих бифуркации системы.

В рамках подхода, предполагающего построение топологических предвестников при решении обратной задачи теории бифуркаций для уравнений Кармана путём кластеризации последовательностей решений, наблюдаемых на закритических ветвях решения, [5] предполагается использование алгоритмов идентификации последовательностей наблюдений в выборках большого объёма.

В работах, посвящённых анализу алгоритмов данного класса, исследованию, обычно, подвергается методология формирования обучающей выборки и алгоритм кластеризации; указанные составляющие алгоритма прогнозирования на основе кластеризации можно соотнести с концепциями адаптации к данным и адаптации к алгоритму [6]. В настоящей работе предлагается использовать ещё одну составляющую для создания эффективного алгоритма построения множества топологических предвестников бифуркации – оценку идентификационной ценности кластеров (адапатацию к процедуре идентификации).

В рамках концепции адаптации к данным можно выделить [6, 7] подходы, в рамках которых кластеризации подвергаются исходные данные, характеристики, извлечённые из данных, и результаты применения к исходным данным некоторой прогнозной модели.

В рамках адаптации к алгоритму осуществляется выбор алгоритма кластеризации и его приспособление к решению задачи построения топологических предвестников. Здесь, значительное число работ посвящено адаптации алгоритма k-средних, c-средних (чётких и нечётких) и им подобных. Так, работа [8] посвящена исследованию модификации стандартного алгоритма k-средних, удобной для выделения подобных последовательностей наблюдений, – TSkmeans (*Time Series k-means*); в работе [9] для прогнозирования хаотических последовательностей наблюдений также используются k-средние.

В работе [10] предлагается алгоритм кластеризации пространственновременных данных, использующий модификацию евклидового расстояния, позволяющую учесть пространственные и временные закономерности. Работа [11] посвящена выделению характерных паттернов в совокупности последовательностей наблюдений, порождённых энергогененрирующей системой крупной страны.

Недостатком алгоритмов этого класса [12] является сильная зависимость структуры выделяемых кластеров от используемой метрики; кроме того, в значительном числе случаев необходимым предусловием кластеризации является знание числа кластеров.

Указанных недостатков в известной степени лишены методы кластеризации, опирающиеся на аппарат теории графов\сложных сетей. Так, в работе [12] производится отображение участков наблюдаемых последовательностей в вершины графа, после чего (в рамках парадигмы теории сложных сетей) кластера выделяются с помощью алгоритмов нахождения сильно связных подграфов.

Постановка задачи

В методах данного класса ошибка идентификации связана с неправильной идентификацией наблюдаемой последовательности решений – неправильным выбором кластера, с помощью которого осуществляется идентификация: соответственно, задача уменьшения уровня ошибки может быть сформулирована как *задача оценки идентификационной ценности кластеров*. Задача формулируется как задача выбора из всего множества полученных кластеров подмножества, которое обеспечивает (первая постановка) минимальное – либо (вторая постановка) не более чем заданное – значение ошибки идентификации.

Математически задача оценки идентификационной ценности кластеров формулируется следующим образом. Пусть Λ – множество кластеров, используемых для идентификаци, $G:\Lambda \to R^1$ – функция оценки идентификационной ценности, $\tilde{\Lambda}(G,\beta) = \{\lambda \in \Lambda : G(\lambda) \geq \beta\}$ – множество кластеров, идентификационная ценность которых не превышает заданного уровня β. Требуется определить функцию G^* и пороговое значение β^*, таким образом, чтобы – в первой постановке – значение ошибки идентиифкации (на тестирующем множестве) было минимальным:

$$I(\tilde{\Lambda}(G,\beta)) \to \min \tag{1}$$

Во второй постановке минимизации подлежит количество кластеров, входящих в множество $\tilde{\Lambda}(G,\beta)$:

$$\left|\tilde{\Lambda}(G,\beta)\right| \to \min\,, \tag{2}$$

при ограничении

$$\left|I(\tilde{\Lambda}(G,\beta))\right| \leq \gamma \tag{3}$$

где γ – параметр алгоритма.

В рамках первой постановки делается упор на минимизацию ошибки идентификации, во второй – на скорость решения задачи. В каждой из постановок предполагается существенное снижения числа кластеров, т. е. уменьшение сложности общей модели идентификации; здесь можно провести параллели с различного рода методологиями снижения сложности (числа параметров) в моделях регрессии (например: AIC, BIC, GIC [13]).

Для решения данной задачи вводится дополнительное дообучающее (валидационное) множество, отличное от обучающего и тестирующего множеств; предполагается, что все три множества принадлежат одной генеральной совокупности. В приложениях, дообучающее множество порождается широкомасштабным натурным и\или вычислительным (в пакетах прикладных программ) экспериментом.

Алгоритм решения обратной задачи бифуркации может быть разделён на три части: в рамках первой части осуществляется генерация обучающей выборки с последующей её кластеризацией, в рамках второй осуществляется оценка идентификационной отбор кластеров, в третей части выполняется идентификация наблюдаемых последовательностей решений.

Формирование выборок и кластеризация последовательностей

Было установлено [1], что при решении обратной задачи бифуркации для обеспечения высокой достоверности идентификации, целесообразно использовать не отдельные решения, соответствующие одному значению параметра, но последовательности решений, лежащих на одной ветви и отвечающих близким значениям параметра.

Каждое из полученных решений нормализовались путём отнесения значений найденных решений к соответствующим максимальным значениям: в дальнейшем это позволило осуществлять кластеризация не характерных амплитуд, но характерных решений.

Интересно то, что использование векторов, состоящих из последовательно фиксируемых решений, оказалось менее эффективными для решения обратной задачи теории бифуркаций, чем векторов, составленных в соответствии с некоторым шаблоном: под шаблоном здесь понимается фиксированная последовательность расстояний между позициями наблюдений в последовательности, которые займут соседние позиции в формируемом векторе выборки. В алгоритме использовались выборки, полученные с помощью всех возможных шаблонов длины четыре. В качестве расстояния везде использовалось евклидово; вектора формировались из значений наблюдений в точках фиксированной сетки.

Для генерации обучающей выборки использовались последовательности решений, фиксируемых на ветвях первичного и вторичного ветвления нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана [5]. Вектора обучающей выборки подвергались кластеризации с использованием модифицированного алгоритма Уишарта [14]. Совокупность центров таким образом построенных кластеров образует множество предвестников бифуркации, для котрых решалась задача оценки идентификационной ценности кластеров с использованием валидационного множества.

Для генерации последовательностей, позволяющих сформировать тестирующее и валидационное множество, осуществлялось решение динамических уравнений Кармана с использованием метода конечных элементов в сочетании с методом Ньютона-Рафсона [15]. Конечноэлементные расчеты проводились с использованием пакета COSMOS/M 2.6.

Методы оценки идентификационной ценности кластеров

Для оценки идентификационной ценности и, собственно, идентификации использовались центры полученных кластеров (характерные последовательности), рассчитанные для всех используемых шаблонов. Обе процедуры опирались на понятие расстояния d_{ij} между i-м наблюдением и j-м кластером, которое вычислялось следующим образом: для позиции рассматриваемого, i-го, наблюдения, из предшествующих наблюдений последовательности решений составлялись векторы в соответствии с шаблоном, по которому был сформирован j-й кластер, таким образом, чтобы последняя позиция в шаблоне совпадала с позицией рассматриваемого наблюдения. Далее рассчитывалось евклидово расстояние между построенным таким образом вектором наблюдений и центром кластера.

В качестве оценки идентификационной ценности k-го кластера использовалась формула:

$$Q_k(\beta) = \sum_{i\in S_k}\frac{\bar{d}_i}{d_{ik}}\frac{1}{|V_i(\beta)|} - \sum_{i\in \bar{S}_k}\frac{\bar{d}_i}{d_{ik}}\frac{1}{|V_i(\beta)|},\quad \bar{d}_i = \frac{1}{|V_i|}\sum_{j\in V_i(\beta)} d_{ij} \tag{4}$$

Здесь $V_i(\beta)$ – множество кластеров, центры которых расположены от i-го наблюдения на расстоянии, не превышающем β; S_k – множество точек валидационного множества, которые алгоритм относит к k-му кластеру (предлагает идентифицировать последовательность наблюдений с помощью k-го кластера), при этом результат идентификации правилен; $\bar{S}_k$ – множество точек дообучающего множества, которые алгоритм относит к k-му кластеру (предлагает идентифицировать последовательность наблюдений с помощью k-го кластера), при этом результат идентификации неправилен.

Процедура идентификации

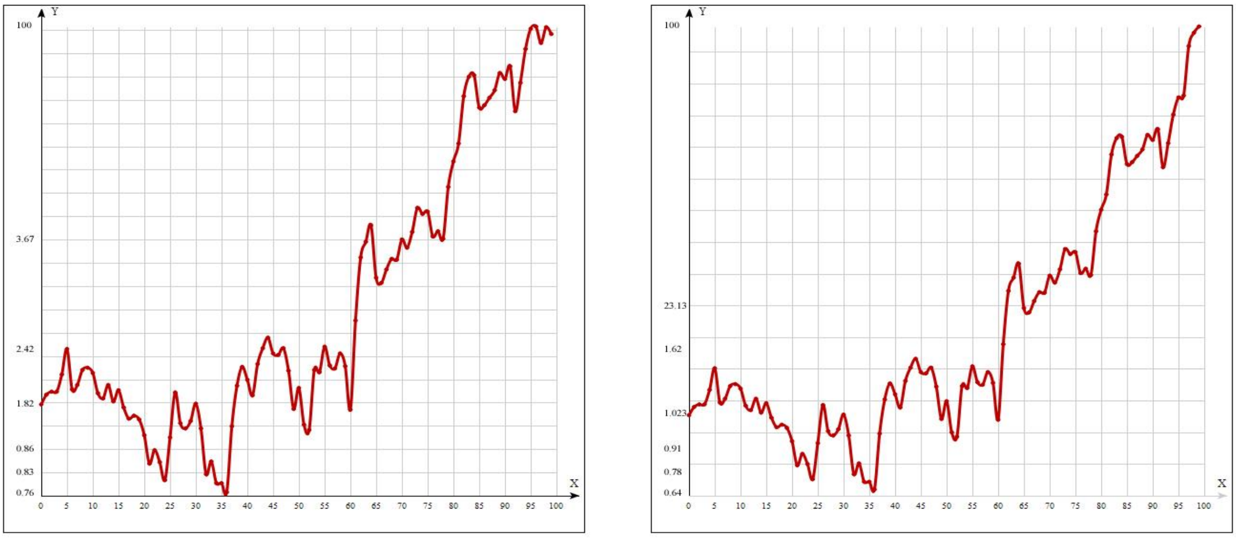
Для идентификации последовательности наблюдений использовались центры полученных кластеров, рассчитанные для всех используемых шаблонов, – число кластеров было сокращено в процессе решения задачи оценки идентификационной ценности кластеров. А именно, для позиции, для которой требуется осуществить процедуру идентификации, рассчитывалось расстояние между наблюдением и всеми кластерами (см. выше). Среди всех кластеров, отвечающих всем шаблонам, отыскивался кластер, для которого данное расстояние минимально. Если указанное расстояние было меньше, чем некоторое пороговое значение, то последовательность решений считалась идентифицированной, и ведущей к решению, связанному с участком ветви, с которой связан кластер. В противном случае – последовательность считалась неидентифицированной, а точка добавлялось к множеству непрогнозируемых точек.

Решение обратной задачи теории бифуркаций

Для оценки эффективности, рассмотренного выше алгоритма решения, исследовалась нелинейная краевая задача для уравнений Кармана, описывающая поведение круговой цилиндрической оболочки с параметрами $L = 0{,}171\,м$, $R = 0{,}057\,м$, $h = 0{,}186 \cdot 10^{-3}\,м$, $E = 198\,ГПа$, $\nu = 0{,}3$, находящейся под действием равномерно распределенного нормального к поверхности внешнего давления $\lambda = 100\,КПа$. На торцах оболочки выполняются условия шарнирного опирания с возможностью свободного смещения в направлении оси оболочки. Решение прямой задачи теории бифуркаций позволило построить структуру ветвления, включающую ветви первичного и вторичного ветвления [5]. Кластеризация последовательностей решений, отвечающих ветвям первичного и вторичного ветвления, позволило построить обучающую выборку.

Для построения валидационного и тестирующего множеств рассматривались последовательности решений, описывающих поведение цилиндрической оболочки, находящейся под действием того же стационарного давления $\lambda = 100\,КПа$ и подвергнутой импульсному возмущению. Импульс характеризовался характерным временем воздействия $\tau = 0{,}002\,с$.

На рис. 1 представлена зависимость ошибки идентификации от процента отсечённых кластеров для случая, когда ценность кластера определялось согласно формуле (4): рис. 1а отвечает объёму валидационного множества 10^4, рис. 1б – 10^5. Анализ результатов широкомасштабного вычислительного эксперимента позволил установить, что ошибка идентификации убывает с ростом размера валидационного множества. С другой стороны, при значительных размерах валидационного множества наблюдается стабилизация процента кластеров, которые необходимо отбросить для получения оптимального решения.



а б

Рис. 1. Зависимость ошибки идентификации от процента отсечённых кластеров; размер валидационного множества – (а) 10^4, (б) – 10^5

Выводы

1.Применение подхода оценки идентификационного качества кластеров и удаления кластеров с низкой идентификационной ценностью позволяет существенно повысить качество идентификации при решении обратной задачи теории бифуркации для уравнений Кармана.

2. Проведённый широкомасштабный вычислительный эксперимент позволяет утверждать, что с ростом дообучающего множества происходит монотонное убывание ошибки, связанной с неправильным выбором кластера, с помощью которого осуществляется идентификация.

Список использованной литературы

1. Ободан Н. И. Прогноз уязвимости тонкостенных систем при аварийных воздействиях / Н. И. Ободан, В. Я. Адлуцкий, В. А. Громов // Вестник ЗНУ. – 2016. – № 2. – P.10–18.
2. Зульпукаров М.-Г. М. Обратная задача теории бифуркаций в динамических системах с шумом / М.-Г. М. Зульпукаров, Г. Г. Малинецкий, А. В. Подлазов // Препринт ИПМ РАН. – 2005. http://keldysh.ru/papers/2005/prep39/prep2005_39.pdf
3. Omberg L. Detecting the onset of bifurcations and their precursors from noisy data / L. Omberg, K. Dolan, A. Neiman, F. Moss // Physical Review E. – 2000. – Vol. 61, № 5. – P. 4848–4853.
4. Pei X. Detecting low dimensional dynamics in biological experiments / X. Pei, F. Moss // Int. J. Neural Syst. – 1996. – Vol. 7, № 4. – P. 429–435.
5. Obodan N. I. Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells / N. I. Obodan, O. G. Lebedeyev, V. A. Gromov. – N.-Y.: Springer, 2013. – 180 p.
6. Liao T.W. Clustering of time series data-a survey / T. W. Liao. – Pattern Recogn. – 2005. – Vol. 38 (11). – P. 1857–1874.
7. Aghabozorgi S. Wah Time-series clustering – A decade review / S. Aghabozorgi, A. S. Shirkhorshidi, T. Y. Wah // Information Systems. – 2015. – Vol. 53. – P. 16–38.
8. Huang X. Time Series k-Means: A New k-Means Type Smooth Subspace Clustering for Time Series Data / X. Huang, Y. Ye, L. Xiong, R.Y.K. Lau, N. Jiang, S. Wang // Information Sciences. – 2016.

9. Martınez-Alvarez F. Energy time series forecasting based on pattern sequence similarity / F. Martınez-Alvarez, A. Troncoso, J.C. Riquelme, J.M. Riquelme // IEEE Trans. Knowl. Data. – 2011. – Vol. 23 (8). – P. 1230–1243.
10. Izakian H. Agreement-based fuzzy c-means for clustering data with blocks of features / H. Izakian, W. Pedrycz // Neurocomputing. – 2014. – Vol. 127. – P. 266–280.
11. Benítez I. Dynamic clustering of residential electricity consumption time series data based on Hausdorff distance / I. Benítez, J. L. Díezb, A. Quijanoa, I. Delgado // Electric Power Systems Research. - Online First. – 2016.
12. Ferreira L. N. Time series clustering via community detection in networks / L.N. Ferreira, L. Zhao // Information Sciences. – 2016. – Vol. 326. – P. 227–242.
13. Konishi S. Information Criteria and Statistical Modeling / S. Konishi, G. Kitagava. – N.-Y.: Springer. – 2008. – 280 p.
14. Лапко А. В. Непараметрические системы обработки информации / А. В. Лапко, Ченцов С. В. – Новосибирск: Наука, 2000. – 352 с.
15. Bathe K.-J. Finite element procedures / K.-J. Bathe. – Prentice-Hall. – 1996. – 1038 p.

References

1. Obodan N. I., Adlucky V. Ya., Gromov V. A. (2016). Vulnerability prediction for thin-walled systems under emergency condition. *Proceed. ZNU, 2,* 10–18. (in Rus.)
2. Zulpukarov M.-G. M., Malinetskii G. G., Podlazov A. V. (2005). Inverse bifurcation problem for noised dynamical systems with noise. *Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS*. http://keldysh.ru/papers/2005/prep39/prep2005_39.pdf (in Rus.)
3. Omberg L., Dolan K., Neiman A., Moss F. (2000). Detecting the onset of bifurcations and their precursors from noisy data. *Physical Review E, 61(5),* 4848–4853.
4. Pei X., Moss F. (1996). Detecting low dimensional dynamics in biological experiments. *Int. J. Neural Syst., 7(4),* 429–435.
5. Obodan N. I., Lebedeyev O. G., Gromov V. A. (2013). *Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells*. N.-Y.: Springer
6. Liao T.W. (2005). Clustering of time series data-a survey. *Pattern Recogn., 38(11),* 1857–1874.
7. Aghabozorgi S., Shirkhorshidi A. S., Wah T. Y. (2015). Time-series clustering – A decade review. *Information Systems*, 53, 16–38.
8. Huang X., Ye Y., Xiong L., Lau R.Y.K., Jiang N., Wang S. (2016). Time Series k-Means: A New k-Means Type Smooth Subspace Clustering for Time Series Data. *Information Sciences, Online First.*
9. Martınez-Alvarez F., Troncoso A., Riquelme J.C., Riquelme J.M. (2011). Energy time series forecasting based on pattern sequence similarity. *IEEE Trans. Knowl. Data, 23(8),* 1230–1243.
10. Izakian H., Pedrycz W. (2014). Agreement-based fuzzy c-means for clustering data with blocks of features. *Neurocomputing, 127,* 266–280.
11. Benítez I., Díezb J.L., Quijanoa A., Delgado I. (2016) Dynamic clustering of residential electricity consumption time series data based on Hausdorff distance. *Electric Power Systems Research, Online First*
12. Ferreira L.N., Zhao L. (2016). Time series clustering via community detection in networks, *Information Sciences, 326,* 227–242.
13. Konishi S., Kitagava G. (2008). *Information Criteria and Statistical Modeling*. N.-Y.: Springer
14. Lapko A.V., Chentsov S.V. (2000). *Non-parametric systems of information processing.* Novosibirsk: Nauka (in Rus.)
15. Bathe K.-J. (1996). *Finite element procedures*. London: Prentice-Hall

Анотація

В. О. Громов, І. М. Воронін

ДОНАВЧАННЯ В ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ БІФУРКАЦІЙ ДЛЯ РІВНЯНЬ КАРМАНА

Вступ

Необхідність оцінювання уразливості різноманітних систем у режимі реального часу обумовлює інтерес до створення алгоритмів швидкого оцінювання спостережуваного стану системи з розрізненням ситуацій, що ведуть до втрати функціональності або характеризуються збереженням працездатності системи.

Мета

Задачу сформульовано як обернену задачу теорії біфуркацій для рівнянь Кармана та розглянуто способи підвищення якості її розв'язку. Як передвісники біфуркації (інструменти розв'язання оберненої задачі) використано характерні послідовності розв'язків, що фіксуються на гілках первинного та вторинного розгалуження.

Метод

Для виділення характерних послідовностей використано процедуру кластеризації послідовностей зазначених гілок. Центри кластерів і утворюють множину передвісників біфуркації. Для зниження похибки ідентифікації передбіфуркаційних станів використано процедуру донавчання, у межах якої ідентифікаційна цінність передвісників біфуркації обраховувалась на додатковій валідаційній множині із наступним видаленням передвісників з низькою ідентифікаційною цінністю.

У методах цього класу помилка ідентифікації пов'язана з неправильною ідентифікацією спостережуваної послідовності розв'язків – неправильним вибором кластера, за допомогою якого здійснюється ідентифікація: відповідно, задача зменшення рівня помилки може бути сформульовано як задачу оцінювання ідентифікаційної цінності кластерів. Задача формулюється як задача вибору із всієї множини одержаних кластерів підмножини, що забезпечує (перша постановка) мінімальне – або (друга постановка) не більше за задане – значення помилки ідентифікації.

Результат

В роботі представлено метод розв'язання задачу оцінювання ідентифікаційної цінності передвісників біфуркації (центрів кластерів) для оберненої задачі теорії біфуркацій для рівнянь Кармана та результати розв'язування зазначеної задачі.

Висновки

Застосування підходу оцінювання ідентифікаційної цінності кластерів та видалення кластерів з низькою ідентифікаційної цінністю приводить до питомого підвищення якості ідентифікації в процесі розв'язування оберненої задачі теорії біфуркацій для рівнянь Кармана.

Здійснений широкомасштабний обчислювальний експеримент дає змогу стверджувати, що із зростанням валідаційної множини відбувається монотонне спадання значення похибки, пов'язаної з неправильним вибором кластера, за допомогою якого здійснюється ідентифікація.

Ключові слова*: обернена задача теорії біфуркацій, рівняння Кармана, алгоритм Уішарта, донавчання у обернених задачах теорії біфуркацій, ідентифікація передбіфуркаційних станів, нелінійні крайові задачі для рівнянь в частинних похідних*

Summary

V. A. Gromov, I. M. Voronin

POST-LEARNING FOR THE INVERSE BIFURCATION PROBLEM OF FON KARMAN EQUATIONS

Introduction

Since various systems stand in need of estimating their vulnerability on-line, rapid assessment algorithms able to distinguish states of operability and those preceding to functional disability of the system at hand are of fundamental interest.

Purpose

The problem is identified as the inverse bifurcation problem and it is proposed to utilize typical sequences of solutions (motifs) observed on primary, secondary, tertiary, etc bifurcation paths of the respective non-linear boundary problem. These motifs comprise a set of (topological) bifurcation precursors that is tools employed to solve the problem in question.

Method

To reveal these typical sequences, one uses clustering algorithm applied to sequences of solutions observed on the aforesaid paths: the centres of clusters comprise the set of bifurcation precursors. As far as the inverse bifurcation problem is supposed to be solved on-line, it is of necessity to reduce the number of the precursors down to the optimal value; it leads to statement of the problem to estimate identification value of clusters. The procedure of the estimation is referred to as post-learning.

To reduce identification error of pre-bifurcation states one utilizes post-learning algorithm, which involves estimating of bifurcation precursors with the employment of an additional, the validation set; then all precursors with low identification value are deleted.

For such algorithms, identification error is attributed to the wrong choice of the cluster to predict. Consequently, it is possible to state the problem of estimating cluster identification value. Mathematically, one searches for the subset of the clusters such that identification error obtained with the employment of the clusters belonging to the subset is either minimal (the first statement) or less than a certain predefined threshold (the second statement).

Results

The present paper deals with the problem to estimate identification value of bifurcation precursors (centres of the clusters) employed to solve the inverse bifurcation problems for von Karman equations and the method to solve it.

Conclusions

It is possible to strengthen the ability of the algorithm to identify correctly in the framework of the inverse bifurcation problem for von Karman equations, if idetification value of the clusters are estimated and clusters with low value are deleted.

Wide-ranging simulation reveals that as the validation set size increases, the component of the error due to incorrect choice of the cluster to identify decreases monotonically.

The paper deals with the inverse bifurcation problem of von Karman equations and means to enhance quality of its solution.

A wide-ranging simulation suggests that the identification error decreases with a size of the validation set. On the other hand, the percentage of clusters to be deleted to obtain the optimal identification rate converges to a certain value as the size tends to infinity.

Keywords*:* *the inverse bifurcation problem, von Karman equations, the Wishart clustering algorithm, post-learning for the inverse bifurcation problem, identification of pre-bifurcation states, non-linear boundary problems for PDEs.*

Одержано редакцією 10.10.2016
Прийнято до друку 17.10.2016