

Л. С. Коряшкина, А. П. Череватенко

ОПТИМАЛЬНЫЕ ДИАГРАММЫ ВОРОНОГО ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ОГРАНИЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ И АЛГОРИТМЫ ИХ ПОСТРОЕНИЯ

Представлены оптимальные диаграммы Вороного высших порядков для ограниченных областей из пространства E_n . Описан подход к построению таких диаграмм, основанный на формулировании и решении непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств с размещением центров при определенных критериях качества разбиения и интегральных ограничениях. Приведены результаты построения диаграмм Вороного N точек-генераторов, оптимально размещенных на ограниченном плоском множестве, при интегральных условиях на их мощности.

Ключевые слова: оптимальные диаграммы Вороного высших порядков, непрерывные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств, недифференцируемая оптимизация.

Введение

Диаграмма Вороного является одной из самых популярных фундаментальных структур данных в вычислительной геометрии [1]. В научной литературе представлен ряд алгоритмов построения разнообразных ее обобщений. Наиболее полная библиография по диаграммам Вороного содержится в работе [2]. Там же описываются математические и алгоритмические свойства этих структур, подчеркивается их важность и полезность не только в области информатики. Широкие спектры практических приложений диаграмм Вороного представлены в работах [3, 4]. Наибольшее распространение получили классические диаграммы Вороного и их различные вариации (аддитивно взвешенные, мультипликативно взвешенные, с ограничениями на мощности точек-генераторов, диаграмма Пауэра), когда для каждой из заданных точек-генераторов на плоскости или в пространстве определяется область, содержащая наиболее близкие к этой точке-генератору точки плоскости или пространства.

Одним из обобщений диаграммы Вороного является диаграмма Вороного k -го порядка, понятие которой впервые введено в [5] для решения проблемы отыскания k ближайших соседей на плоскости.

В вычислительной геометрии под диаграммой Вороного k -го порядка конечного множества точек $\tau_i, i = \overline{1, N}$ в n -мерном евклидовом пространстве E_n ($n \geq 1$) понимают совокупность ячеек Вороного k -го порядка $Vor_i(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})$ для каждого возможного набора k центров $\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k}$, где ячейку Вороного k -го порядка составляют точки пространства, имеющие в качестве ближайших (в выбранной метрике) k соседей точки $\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k}$ [1, 5, 6]. В различных литературных источниках точки $\tau_i, i = \overline{1, N}$ называют по-разному – центры, сайты, точки-генераторы или просто генераторы, опорные точки.

Когда $k=1$, говорят о классической диаграмме Вороного или диаграмме Вороного первого порядка, а при $k=(N-1)$ имеют дело с диаграммой Вороного дальней точки.

Целью работы является представление новой математической структуры – диаграммы Вороного k -го порядка конечного числа генераторов, оптимально размещенных в

ограниченной области пространства E_n , а также описание алгоритма построения такой диаграммы и ее различных обобщений, основанного на формулировании непрерывной задачи оптимального мультиплексного разбиения множества с определенным критерием качества разбиения и ограничениями [7–10] по аналогии с тем, как строится классическая диаграмма Вороного и ее модификации в [4, 11]. Все типы диаграмм Вороного высших порядков с оптимальным размещением точек-генераторов в ограниченной области, в том числе с дополнительными интегральными ограничениями на мощности точек генераторов, будем называть оптимальными диаграммами Вороного k -го порядка.

Краткий обзор научных публикаций, связанных с разработкой алгоритмов построения и приложениями диаграмм Вороного высших порядков

Диаграммы Вороного высших порядков в научной литературе представлены не так широко, как диаграммы Вороного первого порядка, вероятно, в силу сложности их построения. Однако с ростом возможностей вычислительной техники, появлением параллельных вычислительных систем в современной компьютерной индустрии интерес к диаграммам Вороного высших порядков в последнее время неуклонно растет, о чем свидетельствуют результаты исследований, приведенных в работах [6, 12–26].

В [6] исследуются свойства диаграмм Вороного высших порядков, оценивается максимальное количество их ячеек, углов и вершин, описывается итерационный алгоритм построения диаграммы, который может быть реализован в метрике L_p для любого $1 \leq p \leq \infty$.

Работы [12–18] также посвящены разработке эффективных алгоритмов построения диаграмм Вороного k -порядка на плоскости, причем в [13, 14] изучаются соответственно аддитивно и мультипликативно взвешенные диаграммы Вороного высших порядков (далее будут приведены их строгие математические определения). В [15] впервые предложен параллельный алгоритм построения диаграммы Вороного k -го порядка на плоскости, который включает в себя последовательный итерационный алгоритм Ли [6] для преобразования диаграммы Вороного k -го порядка в диаграмму $(k+1)$ -го порядка и позволяет извлекать выгоду из параллельной вычислительной техники, используемой, например, в геоинформационных системах.

Алгоритм вычисления дискретизированного представления диаграмм Вороного высших порядков для произвольных двумерных и трехмерных областей, в котором расстояние между точками плоскости или пространства и сайтами вычисляется с помощью геодезической метрики, описан в работе [16]. Этот алгоритм основан на так называемой технике распространения (размножения) точек окклюзии (преград) и преобразовании геодезического расстояния. Такую вариацию диаграммы Вороного авторы называют геодезической диаграммой Вороного k -го порядка. Надежность и эффективность алгоритма построения геодезических диаграмм Вороного высших порядков продемонстрирована на примерах сегментации медицинских наборов данных для плоских и пространственных невыпуклых областей.

В [17] представлена реализация графического алгоритма касательной плоскости для определения диаграммы Вороного k -го порядка для набора точечных участков в пространстве изображений, показано, что этот алгоритм легко модифицируется в инкрементный алгоритм, предусматривающий быстрое обновление построенной диаграммы Вороного после добавления каждой дополнительной точки-генератора.

В [18] оценивается сложность построения диаграмм Вороного высших порядков на триангулированных поверхностях. Здесь также используется геодезическая метрика для вычисления расстояния между точками поверхности.

Сравнительная характеристика временной сложности некоторых известных алгоритмов приведена в работах [2, 19].

Об актуальности научных исследований, связанных с вопросами разработки и обоснования эффективных алгоритмов построения диаграмм Вороного высших порядков

свидетельствуют и практические приложения этих структур. Различные обобщения диаграмм Вороного высших порядков используются в таких областях, как компьютерная графика, геометрическое моделирование, географические информационные системы, визуализация медицинских наборов данных, распознавание образов, робототехника и анализ форм [2, 3, 14, 20–26]. Так, в [20, 21] диаграммы Вороного высших порядков применяют для сегментации карт и геопространственного интеллектуального анализа данных. При этом в [20] построение диаграммы Вороного высших порядков производится с учетом сложных препятствий. В работе [21] основной акцент сделан на полезности использования взвешенных диаграмм Вороного при оценивании зон влияния активных разломов земной поверхности, когда целевые области при поиске полезных ископаемых могут быть разграничены в зависимости от размера зоны гидротермальных изменений.

Использование диаграмм Вороного высших порядков при моделировании зон розничной торговли продемонстрировано в [22–24]. При этом под моделями торговой зоны Вороного понимают основанные на геометрии процедуры создания теоретических торговых зон с использованием характеристик магазина и предположений о поведении потребителя. Диаграммы Вороного являются наиболее полезными в случаях, если подробные данные о предпочтениях потребителей отсутствуют, либо считаются слишком дорогостоящим, либо требуют большого количества времени для их получения. Такие модели могут быть использованы не только для описания, но и для прогнозирования торговых зон, для определения потенциальных мест расположения новых объектов, оценивания воздействия этих и других изменений на существующем множестве объектов. Как отмечено в [23], в отличие от других моделей, например, модели мультипликативного конкурентного взаимодействия или полиномиальной логистической модели, диаграммы Вороного не требуют сложных статистических процедур калибровки. Они обеспечивают разумные приближения реальных зон торговли быстро и без больших затрат, без необходимости подробной экспертизы торговых зон со стороны аналитика. В [23] приведены две модели Вороного, которые учитывают предположение о том, что потребитель выбирает k ($k=1, 2, 3, \dots$) ближайших наиболее привлекательных объектов. Если покупатель считает k объектов одинаково привлекательными, торговые зоны можно представить в виде мультипликативно взвешенной диаграммы Вороного k -го порядка. Если же клиент отдает предпочтение более близким магазинам, торговые зоны определяются упорядоченной мультипликативно взвешенной диаграммой Вороного k -го порядка. Обе модели позволяют получить перекрытие торговых зон. Кроме того, упорядоченная мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного k -го порядка позволяет исследовать влияние различных уровней предпочтения по оценкам продаж магазина. Одной из особенностей рассматриваемых моделей является то, что полученные в результате торговые зоны не являются взаимоисключающими. Так как такой результат в большей степени соответствует реальности, авторы утверждают, что введенные ими модели значительно улучшают результат по сравнению с обобщениями диаграммы Вороного первого порядка, которые, вообще говоря, определяют торговые зоны как пространственные монополии.

Диаграммы Вороного высших порядков с использованием манхэттенской (так называемой городской) метрики и их приложения рассматриваются в [19].

В [25] диаграммы Вороного высших порядков предлагается использовать при детализации содержимого видеоклипов для извлечения значимых статических изображений. На основании проведенных экспериментов авторами выявлен ряд особенностей, связанных с количеством и размещением опорных точек, используемых для построения диаграмм, сделан вывод о том, что использование диаграмм Вороного высших порядков позволяет сократить время, необходимое для обработки и переупорядочения опорных точек. Кроме пространственной сегментации и анализа содержания, диаграммы Вороного могут использоваться для временной сегментации видео, то есть разбиения на сцены, что позволяет

стабилизировать представление содержания кадров, обеспечивает отыскание повторов и уникальных кадров [26].

В работах [7–10] показано, что диаграммы Вороного высших порядков ограниченных множеств из пространства E_n можно получить в результате решения непрерывных линейных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств (ОМРМ). Поэтому в качестве математического и алгоритмического аппарата построения оптимальных диаграмм Вороного любого порядка и всевозможных их обобщений, в том числе и диаграмм с ограничениями на мощности точек-генераторов, предлагается использовать модели и методы решения задач ОМРМ с размещением центров.

Оптимальные диаграммы Вороного k -го-порядка ограниченного множества

Вначале приведем строгие определения диаграммы Вороного k -го порядка конечного множества точек пространства и ее известных обобщений.

Пусть в пространстве E_n ($n \geq 2$) заданы точки $\tau_i, i = \overline{1, N}$, называемые далее центрами. Введем следующие обозначения: $N = \{1, 2, \dots, N\}$ – набор всех индексов центров; $M(N, k)$ – множество всех k -элементных подмножеств множества N , $|M(N, k)| = C_N^k = L$; $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$, $l = \overline{1, L}$, – элементы множества $M(N, k)$; $d(x, y)$ – расстояние между точками x и y , которое может быть вычислено в соответствии с L_p -метрикой по формуле

$$r_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

или

$$r_\infty(x, y) = \max_{i=1, n} |x^i - y^i|.$$

В дальнейшем, если не оговорено иного, будем рассматривать евклидову метрику, то есть L_2 -метрику.

Диаграммой Вороного k -го порядка конечного множества точек $\tau_i, i = \overline{1, N}$, в n -мерном евклидовом пространстве E_n называется совокупность ячеек Вороного k -го порядка для каждого возможного набора центров $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$, $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\} \in M(N, k)$: $Vor(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = \bigcup_{l=1, L} Vor_l(\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l})$, где ячейку Вороного k -го порядка $Vor_l(\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l})$ составляют точки пространства, имеющие в качестве ближайших k центров центры $\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}$, то есть

$$Vor_l(\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}) = \left\{ x \in E_n : \max_{j \in \sigma_l} d(x, \tau_j) \leq \min_{j \in N \setminus \sigma_l} d(x, \tau_j) \right\}, l = \overline{1, L}. \quad (1)$$

При этом для любых $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$, $\sigma_m = \{j_1^m, j_2^m, \dots, j_k^m\} \in M(N, k)$ имеет место равенство:

$$mes(Vor_l(\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}) \cap Vor_m(\tau_{j_1^m}, \tau_{j_2^m}, \dots, \tau_{j_k^m})) = 0$$

На практике часто возникает необходимость задать различные уровни значимости каждому из выделенных центров.

Если каждому центру $\tau_i, i = \overline{1, N}$ ставится в соответствие некоторое число $w_i > 0, i = \overline{1, N}$ – его вес, а расстояние между точками x и τ_i в (1) определяется по следующей формуле:

$$d(x, \tau_i) = (1/w_i)r_p(x, \tau_i), i = \overline{1, N},$$

то такую диаграмму называют мультипликативно взвешенной диаграммой Вороного k -го порядка [14].

В случае, когда каждому центру τ_i соответствует так называемый аддитивный вес – некоторое действительное число $a_i, i = \overline{1, N}$, а расстояние между точками x и τ_i в (1) определяется по формуле

$$d(x, \tau_i) = r_p(x, \tau_i) + a_i, i = \overline{1, N},$$

получаемую диаграмму принято называть аддитивно взвешенной диаграммой Вороного k -го порядка [13].

Введем в рассмотрение несколько новых обобщений диаграмм Вороного высших порядков.

Пусть на множестве $\Omega \subset E_n$ задана функция плотности $\rho(x) > 0, x \in \Omega$. Мощностью $Capacity(\tau_i)$ центра τ_i будем называть взвешенную площадь объединения всех ячеек Вороного k -го порядка $Vor_l(\tau_{j_1}^l, \tau_{j_2}^l, \dots, \tau_{j_k}^l)$, для которых $i \in \sigma_l, l = \overline{1, L}$, то есть

$$Capacity(\tau_i) = \sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{Vor_l(\tau_{j_1}^l, \tau_{j_2}^l, \dots, \tau_{j_k}^l)} \gamma_i^l \rho(x) dx \quad i =$$

где коэффициенты γ_i^l таковы, что для всех $i = \overline{1, N}$, $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\} \in M(N, k)$, $l = \overline{1, L}$, имеют место соотношения:

$$0 \leq \gamma_i^l \leq 1, \gamma_{j_1^l}^l + \gamma_{j_2^l}^l + \dots + \gamma_{j_k^l}^l = 1. \quad (2)$$

Диаграммой Вороного k -го порядка конечного множества центров $\tau_i, i = \overline{1, N}$ с ограниченными мощностями на множестве $\Omega \subset E_n$ называют диаграмму Вороного k -го порядка, у которой каждый центр τ_i имеет свою ограниченную мощность $b_i \geq 0$ или, что то же, диаграмму, удовлетворяющую следующим условиям:

$$Capacity(\tau_i) = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad Capacity(\tau_i) \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N}. \quad (3)$$

Коротко такие диаграммы будем называть диаграммами Вороного k -го порядка с ограничениями на мощности центров.

Заметим, что для ограниченных множеств $\Omega \subset E_n$ выполняется равенство

$$\bigcup_{l=1, \overline{L}} \text{Vor}_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k}) = \Omega. \tag{4}$$

Лемма. Пусть $\Omega \subset E_n$ – ограниченное замкнутое множество; $\rho(x) > 0, x \in \Omega$ – заданная функция плотности, причем $\int_{\Omega} \rho(x) dx = S$; $\tau_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$ – заданные центры.

Для существования диаграммы Вороного k -го порядка с ограничениями на мощности центров вида (3) на множестве Ω достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, p, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^p b_i \leq S \leq \sum_{i=1}^N b_i. \tag{6}$$

Доказательство. Просуммируем левые части ограничений (3) по всем $i = \overline{1, \dots, N}$ и обозначим полученную сумму \bar{S} :

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l:i \in \sigma_l}}^L \int_{\text{Vor}_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})} \gamma_i^l \rho(x) dx = \sum_{l=1}^L \int_{\text{Vor}_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})} \sum_{i=1}^N \gamma_i^l \rho(x) dx.$$

Учитывая то, что для всех $j = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}$, константы γ_j^l удовлетворяют условиям (2) и имеет место равенство (4), можно записать:

$$\bar{S} = \sum_{l=1}^L \int_{\text{Vor}_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})} \sum_{i=1}^N \gamma_i^l \rho(x) dx = \sum_{l=1}^L \int_{\text{Vor}_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})} \rho(x) dx = \int_{\Omega} \rho(x) dx = S,$$

что доказывает справедливость правой части неравенства (6).

Просуммируем теперь лишь ограничения-равенства (3) и сравним полученную сумму с величиной S :

$$\sum_{i=1}^p b_i = \sum_{i=1}^p \sum_{\substack{l=1 \\ l:i \in \sigma_l}}^L \int_{\text{Vor}_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})} \gamma_i^l \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^p \sum_{\substack{l=1 \\ l:i \in \sigma_l}}^L \int_{\text{Vor}_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})} \gamma_i^l \rho(x) dx + \sum_{i=p+1}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l:i \in \sigma_l}}^L \int_{\text{Vor}_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})} \gamma_i^l \rho(x) dx = S.$$

Следовательно, левая часть неравенства (6) также имеет место.

Справедливость условия (5) очевидна:

$$b_i = \sum_{\substack{l=1 \\ l:i \in \sigma_l}}^L \int_{\text{Vor}_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})} \gamma_i^l \rho(x) dx \geq 0, \quad i = \overline{1, p};$$

$$b_i = \sum_{\substack{l=1 \\ l:i \in \sigma_l}}^L \int_{\text{Vor}_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})} \gamma_i^l \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l:i \in \sigma_l}}^L \int_{\text{Vor}_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})} \gamma_i^l \rho(x) dx \stackrel{(2),(4)}{=} S, \quad i = \overline{1, p}.$$

Лемма доказана.

Диаграммы Вороного k -го порядка с ограничениями на мощности центров могут быть полезными, например, при определении реальных зон обслуживания для сервисных (торговых) предприятий при следующих допущениях:

– сосуществование предприятий τ_i , $i=1, \dots, N$, выпускающих один и тот же товар, причем максимальный объем товара, который предприятия могут обеспечить, ограничен величинами b_1, b_2, \dots, b_N ;

– константы γ_j^l отображают часть рынка услуг, которую занимает предприятие τ_j на территории $Vor_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})$ среди предприятий $\{\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k}\}$, обслуживающих эту территорию (здесь предполагается, что $j \in \sigma_l$). Если предположить, что рынок услуг (товара) распределен между предприятиями на всей области Ω пропорционально их мощностям, то для всех $l = \overline{1, L}$ и $j = \overline{1, N}$, таких, что $j \in \sigma_l$, величина γ_j^l может быть определена по следующей формуле: $\gamma_j^l = b_j / \sum_{q: q \in \sigma_l} b_q$.

При таких предположениях условия (3) указывают на то, что реализация возможностей для предприятий τ_i , $i=1, \dots, p$ должна осуществляться в полном объеме, а для остальных предприятий τ_i , $i=p+1, \dots, N$ – ограниченной.

Диаграммой Вороного k -го порядка конечного числа точек τ_i , $i=1, \dots, N$, оптимально размещенных на ограниченном множестве $\Omega \subset E_n$, будем называть совокупность ячеек Вороного k -го порядка $Vor(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = \bigcup_{l=1, \overline{L}} Vor_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})$, для которых функционал

$$F(\{\tau_1, \dots, \tau_N\}, Vor(\tau_1, \dots, \tau_N)) = \sum_{l=1}^L \int_{Vor_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})} \sum_{i \in \sigma_l} d(x, \tau_i) \rho(x) dx$$

принимает наименьшее значение.

Очевидно, задавая различный вид функций $d(x, \tau_i)$ и $\rho(x)$, можно получить различные обобщения диаграмм Вороного k -го порядка с оптимальным размещением центров (аддитивно, мультипликативно взвешенные и др.). Можно также ввести понятие диаграммы Вороного k -го порядка с ограниченными мощностями центров, оптимально размещенных на $\Omega \subset E_n$, расширив приведенное выше определение дополнительными интегральными ограничениями вида (3).

Все упомянутые выше диаграммы, в которых центры (точки-генераторы) τ_i , $i = \overline{1, N}$ размещаются наилучшим (в некотором смысле) образом в ограниченной области пространства, будем называть оптимальными диаграммами Вороного k -го порядка.

Перейдем к изложению единого подхода к построению оптимальных диаграмм Вороного k -го порядка ограниченного множества $\Omega \subset E_n$ и различных их обобщений, в основе которого лежат модели и методы решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств с критерием разбиения специального вида, обеспечивающего тот или иной вид диаграмм Вороного высших порядков [7–10].

Оптимальные диаграммы Вороного k -го порядка как результат решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств

Сформулируем непрерывную линейную задачу оптимального мультиплексного разбиения множеств n -мерного евклидова пространства E_n на подмножества k -го порядка с ограничениями и неизвестными заранее координатами центров.

Пусть Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу, замкнутое множество из пространства E_n ; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$, для всех $i = \overline{1, N}$ – некоторые точки, называемые «центрами», координаты которых неизвестны заранее и подлежат определению, $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N$.

Здесь, как и ранее, будем использовать следующие обозначения: $N = \{1, 2, \dots, N\}$ – набор всех индексов центров, $M(N, k)$ – множество всех k -элементных подмножеств множества N , $|M(N, k)| = C_N^k = L$; $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$, $l = \overline{1, L}$ – элементы множества $M(N, k)$.

С каждым элементом σ_l множества $M(N, k)$ будем ассоциировать некоторое подмножество Ω_{σ_l} точек из Ω , $l = \overline{1, L}$, а с подмножеством Ω_{σ_l} будем связывать набор центров $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$.

Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$ из $\Omega \subset E_n$ будем называть разбиением k -го порядка множества Ω на его непересекающиеся подмножества $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$, если

$$\bigcup_{l=1}^L \Omega_{\sigma_l} = \Omega, \text{mes}(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}) = 0, \sigma_i, \sigma_j \in M(N, k), i \neq j, i, j = \overline{1, L},$$

где $\text{mes}(\cdot)$ означает меру Лебега. Подмножества $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$ множества Ω называются подмножествами k -го порядка множества Ω .

Пусть $\Sigma_{\Omega}^{N, k}$ – класс всех возможных разбиений k -го порядка множества Ω на его непересекающиеся подмножества $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$:

$$\Sigma_{\Omega}^{N, k} = \left\{ \bar{\omega} = \{\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\} : \bigcup_{l=1}^L \Omega_{\sigma_l} = \Omega, \text{mes}(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}) = 0; \sigma_i, \sigma_j \in M(N, k), i \neq j, i, j = \overline{1, L} \right\}.$$

Непрерывная линейная задача оптимального мультиплексного разбиения множества $\Omega \subset E_n$ при ограничениях с размещением центров формулируется следующим образом [7].

Задача $A-k$.
$$F(\bar{\omega}, \tau^N) \rightarrow \min_{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^{N, k}; \tau^N \in \Omega^N},$$

$$F(\bar{\omega}, \tau^N) = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \rho(x) dx, \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad \sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{m+1, N} \quad (8)$$

Здесь $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$, $c(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$ – ограниченные, определенные на декартовом произведении $\Omega \times \Omega$ функции, измеримые по аргументу x при любом фиксированном векторе $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$. Функция $\rho(x)$ – ограниченная, измеримая, неотрицательная на множестве Ω , $w_i > 0$, $b_i \geq 0$, a_i , $i = \overline{1, N}$ – заданные числа.

Коэффициенты γ_j^l в левых частях ограничений таковы, что для всех $j = \overline{1, N}$, $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$, $l = \overline{1, L}$ имеют место соотношения $0 \leq \gamma_j^l \leq 1$, $\gamma_{j_1^l}^l + \gamma_{j_2^l}^l + \dots + \gamma_{j_k^l}^l = 1$.

Пару $(\bar{\omega}^*, \tau^{N*})$, доставляющую минимальное значение функционалу F при условиях (8), будем называть оптимальным решением задачи $A-k$.

Опишем кратко идею метода решения задачи $A-k$. Задача $A-k$ записывается относительно характеристических вектор-функций подмножеств, составляющих разбиение k -го порядка множества Ω .

Определение. Пусть $\bar{\omega} = \{\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_l}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\}$ – некоторое разбиение k -го порядка множества Ω . Вектор-функцию $\lambda^l(x) = (\lambda_1^l(x), \dots, \lambda_N^l(x))$, $l = \overline{1, L}$, определенную на множестве Ω , с координатами, вычисляемыми по следующей формуле: $\forall x \in \Omega_{\sigma_l}$

$$\lambda_i^l(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{\sigma_l} \text{ \& } i \in \sigma_l, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, \quad l = \overline{1, L}, \quad (9)$$

будем называть характеристической вектор-функцией подмножества Ω_{σ_l} , которое входит в разбиение k -го порядка множества Ω .

Задача B-k.

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau^N) \in \Gamma^k \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \left(\sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \lambda_i^l(x) \right) \rho(x) dx,$$

$$\Gamma^k = \left\{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_0^k, \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{m+1, N} \right\},$$

$$\Gamma_0^k = \left\{ \lambda^l(\cdot) = (\lambda_1^l(\cdot), \dots, \lambda_N^l(\cdot)) : \lambda_i^l(x) = 0 \vee 1 \quad \forall x \in \Omega, i = \overline{1, N}, \right.$$

$$\left. l = \overline{1, L}, \sum_{i=1}^N \lambda_i^l(x) = k, l = \overline{1, L}, \text{ п.в. для } x \in \Omega \right\}.$$

Справедливы следующие теоремы [10].

Теорема 1. Пусть в задаче $A-k$ имеют место соотношения: $\int_{\Omega} \rho(x) dx = S$; $b_i \leq S, i = \overline{1, m}$;

$\sum_{i=1}^m b_i \leq S \leq \sum_{i=1}^N b_i$. Для того чтобы при фиксированном наборе центров $(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$

возможное разбиение k -го порядка $(\Omega_{*\sigma_1}, \dots, \Omega_{*\sigma_l}, \dots, \Omega_{*\sigma_N}) \in \Sigma_{\Omega}^N$ множества Ω являлось оптимальным для задачи $A-k$, необходимо и достаточно существование действительных

констант $\psi_1, \dots, \psi_m, \psi_{m+1}, \dots, \psi_N$ (среди которых $\psi_{m+1}, \dots, \psi_N$ – неотрицательны) таких, что п. в. для $x \in \Omega$

$$c(x, \tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i \leq c(x, \tau_j) / w_j + a_j + \gamma_j^l \psi_j, \quad i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l \quad (10)$$

Следствие из теоремы 1. В точках x , принадлежащих оптимальной границе подмножеств $\Omega_{*\sigma_i}$ и $\Omega_{*\sigma_j}$ в неравенстве (11), достигается знак равенства.

Очевидна связь: $\Omega_{\sigma_l} = \text{Vor}_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k}), l = \overline{1, L}$.

Теорема 2. Оптимальное решение задачи **B-k** имеет следующий вид: для $i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}$ и почти всех $x \in \Omega$:

$$\xi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \xi_i) / w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i \leq c(x, \xi_j) / w_j + a_j + \gamma_j^l \psi_j, \\ & \forall i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (11)$$

в качестве $\xi_1, \dots, \xi_N, \psi_1, \dots, \psi_N$ выбирается оптимальное решение такой задачи конечномерной условной оптимизации:

$$G(\psi) = \min_{\tau^N \in \Omega^N} G_1(\tau^N, \psi) \rightarrow \max, \quad (12)$$

при условиях $\psi_i \geq 0, \quad i = \overline{m+1, N},$ где

$$G_1(\tau^N, \psi) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in M(N, k) \\ l=1, L}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x, \tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i.$$

Численный алгоритм решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств n -мерного евклидова пространства E_n

В работе [7] показано, что непрерывные линейные задачи оптимального разбиения множеств являются частным случаем вышеприведенной задачи ОМРМ. Поэтому и алгоритм решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств n -мерного евклидова пространства E_n с некоторыми уточнениями аналогичен алгоритму, приведенному в [11, 27].

От задачи условной оптимизации (12) перейдем к задаче безусловной максимизации по переменной ψ , расширив целевую функцию негладкой штрафной функцией множества $\{\psi_i \geq 0, i = m+1, \dots, N\}$: $\max_{\psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^N} P(\tau^N, \psi)$, где

$$P(\tau^N, \psi) = G_1(\tau^N, \psi) - Q \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i),$$

а Q – большое положительное число (значительно больше множителей Лагранжа).

Далее для краткости вектор τ^N будем обозначать просто τ .

Определим i -ю, $i = 1, \dots, N$ компоненту $2N$ -мерного вектора обобщенного псевдоградиента

$$g_P(\tau, \psi) = (g_P^{\tau}(\tau, \psi), -g_P^{\psi}(\tau, \psi)) = (g_P^{\tau_1}(\tau, \psi), \dots, g_P^{\tau_N}(\tau, \psi), -g_P^{\psi_1}(\tau, \psi), \dots, -g_P^{\psi_N}(\tau, \psi))$$

функции $P(\tau^N, \psi)$ в точке $(\tau, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$ следующим образом:

$$g_P^{\psi_i}(\tau, \psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx - b_i, & i = 1, \dots, m, \\ \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx - b_i + Q \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), & i = m + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (13)$$

$$g_P^{\tau_i}(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L [g_c^{\tau_i}(\tau, x) / w_i] \lambda_i^l(x) \rho(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (14)$$

где $g_c^{\tau_i}(x, \tau) = (g_c^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau), \dots, g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau))$ – i -я компонента N -мерного вектора обобщенного градиента $g_c^{\tau}(\tau, x)$ функции $c(x, \tau_i)$ в точке $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ при фиксированном x .

В формулах (13), (14) $\lambda_i^l(x)$, $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$ определяется следующим образом:

$$\lambda_i^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i \leq c(x, \tau_j) / w_j + a_j + \gamma_j^l \psi_j, \\ & \forall i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (15)$$

Приведем численный алгоритм решения задачи **B-k**, ключевой частью которого является $r(\alpha)$ -алгоритм с постоянным коэффициентом растяжения пространства α и адаптивным способом регулировки шагового множителя [27, 28].

Шаг 0. Область Ω заключаем в прямоугольный параллелепипед Π , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем $\rho(x) = 0$ при $x \in \Pi \setminus \Omega$. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаём начальное приближение $(\tau, \psi) = (\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$. Задаём параметры $\alpha, q_1, q_2, n_h, \varepsilon$ модификации $r(\alpha)$ алгоритма.

Шаг 1. Вычисляем значения вектор-функции $\lambda^{l(0)}(x) = (\lambda_1^{l(0)}(x), \dots, \lambda_N^{l(0)}(x))$, $l = \overline{1, L}$ в узлах сетки по формулам (15) при $\tau = \tau^{(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$. Вычисляем значения функции $G_1(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ и вектора $g_P(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ в узлах сетки по формулам (12), (13), (14) при $\tau = \tau^{(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$, $\lambda^l(x) = \lambda^{l(0)}(x)$, $l = \overline{1, L}$.

Выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$, полагаем $B_0^{\tau} = I_{nN}$, $B_0^{\psi} = I_N$ – квадратные матрицы размера $nN \times nN$, $N \times N$ соответственно и находим

$$\tau^{(1)} = P_{\Pi}(\tau^{(0)} - h_0 g_P^{\tau}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})), \quad \psi^{(1)} = \psi^{(0)} - h_0 g_P^{\psi}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}).$$

Шаг 2. Пусть в результате вычислений после k , $k = 1, 2, \dots$ шагов алгоритма получены величины $\tau^{(k)}, \psi^{(k)}$, $\lambda^{l(k-1)}(x)$, $l = \overline{1, L}$ в узлах сетки матрицы B_k^{τ} , B_k^{ψ} .

Опишем $(k + 1)$ -й шаг, включающий следующие этапы.

1. Вычисляем значения $\lambda^{l(k)}(x)$, $l = \overline{1, L}$ в узлах сетки по формуле (15) при $\tau = \tau^{(k)}$, $\psi = \psi^{(k)}$.

2. Вычисляем значения $g_P(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$ в узлах сетки по формулам (13), (14) при $\tau = \tau^{(k)}$, $\psi = \psi^{(k)}$, $\lambda^l(x) = \lambda^{l(k)}(x)$, $l = \overline{1, L}$.

3. Проводим очередную итерацию $r(\alpha)$ -алгоритма, вычислительная формула которого имеет вид:

$$\tau^{(k+1)} = P_{\Pi} \left(\tau^{(k)} - h_k B_{k+1} \frac{B_{k+1}^T g_P^\tau(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\|B_{k+1}^T g_P^\tau(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})\|} \right),$$

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} - h_k B_{k+1} \frac{B_{k+1}^T g_P^\psi(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\|B_{k+1}^T g_P^\psi(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})\|}$$

Здесь $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi$ – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство с коэффициентом растяжения α , которые пересчитываются по формуле

$$B_{k+1}^w = B_k^w \left(I + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \theta_k^w (\theta_k^w)^T \right),$$

где w обозначает переменную τ или ψ , I – единичная матрица соответствующего размера, θ_k^w – нормированный вектор разности двух последовательных псевдоградиентов в преобразованном пространстве, то есть

$$\theta_k^w = \frac{(B_{k+1}^w)^T (g_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_P^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}))}{\|(B_{k+1}^w)^T (g_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_P^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}))\|}.$$

При условии, что $\|(B_{k+1}^w)^T (g_P^w(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - g_P^w(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}))\| \geq \varepsilon_0$ и $\theta_k^w = 0$ в остальных случаях, здесь ε_0 – точность представления машинного нуля в ЭВМ. Длина шагового множителя h_k регулируется адаптивным способом с параметрами h_0, q_1, q_2, n_h , сообразно которому шаговый множитель выбирается из условия минимума разности $[G_1(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k)}) - G_1(\tau^{(k)}, \psi^{(k-1)})]$ по направлению обобщённого антипсевдоградиента $-g_P(\tau, \psi)$ в преобразованном пространстве.

4. Если условие $\|(\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}) - (\tau^{(k)}, \psi^{(k)})\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0$ не выполняется, переходим к $(k+2)$ -му шагу алгоритма с новыми значениями величин $\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}, \lambda^{l(k)}(x), l = \overline{1, L}$ в узлах сетки, иначе – переходим на п. 5.

5. Полагаем $\tau_* = \tau^{(l)}, \psi_* = \psi^{(l)}, \lambda_*^l(x) = \lambda^{l(s)}(x), l = \overline{1, L}$, где s – номер итерации, на которой выполнилось условие окончания итерационного процесса.

6. Вычисляем оптимальное значение функционала исходной задачи **B**- k при $\tau = \tau_*, \psi = \psi_*, \lambda^l(\cdot) = \lambda_*^l(\cdot), l = \overline{1, L}$.

Замечание 1. Если в задаче **A**- k отсутствуют интегральные ограничения (8), то процесс решения упрощается. Характеристические функции подмножеств k -го порядка, составляющих оптимальное разбиение множества Ω , в этом случае вычисляются для всех $i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}$, по следующей формуле:

$$\xi_i^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \xi_i) / w_i + a_i \leq c(x, \xi_j) / w_j + a_j, \quad \forall i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

где ξ_1, \dots, ξ_N – решение задачи минимизации негладкой функции:

$$G_2(\tau^N) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in M(N,k) \\ l=1,L}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x, \tau_i) / w_i + a_i] \rho(x) dx.$$

Замечание 2. Вычислительная эффективность приведенного алгоритма зависит от коэффициента растяжения пространства α и параметров адаптивной регулировки шага q_1, q_2, n_h из $r(\alpha)$ -алгоритма. В [5, 27] указано, что для негладких функций эти параметры целесообразно выбирать следующим образом: $\alpha = 2 \div 3$, $h_0 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1.1 \div 1.2$, $n_h = 2 \div 3$, где q_1 коэффициент уменьшения шага, если условие релаксации итерационного процесса по текущему направлению спуска выполняется за один шаг, q_2 – коэффициент увеличения шага. При этом натуральное число n_h ($n_h > 1$) задаёт количество шагов одномерного спуска, после которых шаг будет увеличиваться в q_2 раз.

Примеры оптимальных диаграмм Вороного высших порядков и их обобщений

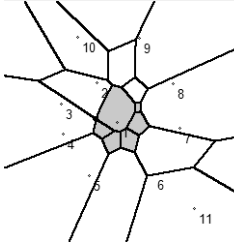
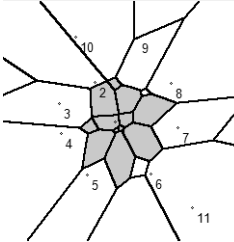
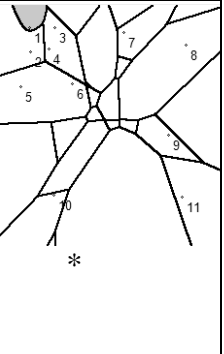
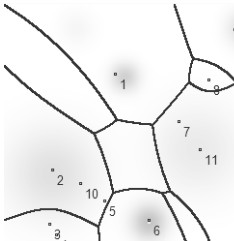
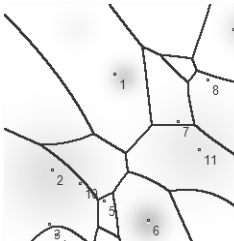
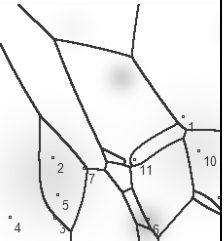
Результаты построения для множества $\Omega = \{(x^1, x^2) \in R^2 : 0 \leq x^i \leq 10, i = 1, 2\}$ диаграмм Вороного k -го порядка $N = 11$ точек-генераторов как заданных, так и оптимально размещенных в ограниченной области, при наличии или отсутствии интегральных ограничений, с помощью представленного выше алгоритма решения непрерывной задачи ОМРМ и его модификаций для ее случаев компактно приведены в табл. 1. С целью проследить изменение области действия одного центра в зависимости от исходных параметров – кратности разбиения, весовых коэффициентов и мощностей центров (при интерпретации задачи ОМРМ как задачи отыскания торговых зон предприятий, размещаемых на заданной территории) серым цветом на рисунках выделены те точки, для которых первая точка-генератор является одной из k ближайших.

В последней строке таблицы представлены диаграммы Вороного высших порядков для взвешенной области, когда $\rho(x) \neq Const \forall x \in \Omega$, при этом, чем больше значение весовой функции для точки области, тем темнее ее цвет на рисунке.

Таблица 1

Результаты построения диаграмм Вороного высших порядков

Параметры задачи А- k	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$\rho(x) = 1 \forall x,$ $c(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x^i - y^i)^2}$ $w_i = 1, a_i = 0, i = \overline{1, N}.$ Ограничения отсутствуют	Стандартные диаграммы Вороного k -го порядка $N = 11$ точек-генераторов		
$\rho(x) = 1 \forall x,$	Диаграммы Вороного k -го порядка $N = 11$ точек-генераторов с ограничениями на их мощности		

$c(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x^i - y^i)^2}$ $w_i = 1, a_i = 0, i = \overline{1, N},$ $b_1 = 0.5; b_i = 100, i = \overline{2, N}$ (* при $k = 4$ $b_1 = 0,05$)			
$\rho(x) \neq 1 \forall x,$ $c(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x^i - y^i)^2}$ $w = (0.8, 1, 1, 1, 1, 0.7, 1.1, 0.9, 1, 0.9, 1, 0.7)$ $a = (2, 3, 4, 5, 6, 3, 2, 5, 4, 3, 6).$ Ограничения отсутствуют	Диаграмма Вороного k -го порядка 11 точек-генераторов, оптимально размещенных в ограниченной взвешенной области		
			

Выводы

Для ограниченных областей пространства E_n введен новый тип диаграмм Вороного высших порядков, а именно оптимальные диаграммы и их всевозможные обобщения – аддитивно, мультипликативно взвешенные, с интегральными ограничениями на мощности точек-генераторов (некоторые виды функционалов задач ОМРМ представлены в [29]). Показано, что такие диаграммы любого порядка можно построить путем формулирования и решения непрерывной линейной задачи оптимального мультиплексного разбиения множества с критерием разбиения специального вида. В дальнейшем интерес представляет исследование свойств оптимальных диаграмм Вороного высших порядков, а также применение этих структур при решении различных практических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Preparata F., Shamos M. Computational Geometry: An Introduction. (1985) Springer. – 411 p.
2. Aurenhammer F. Voronoi diagrams – a survey of a fundamental geometric data structure / F. Aurenhammer // ACM Computing Surveys. – 1991. – Vol. 23. – P. 345 – 405.
3. Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams / A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara [et al.] // Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons, 2000. – 696 p.
4. Kiseleva E.M. Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations. I. Theoretical Foundations / E. Kiseleva, L. Koriashkina // Cybernetics and Systems Analysis. – 2015. – Vol. 51, Issue 3. – P. 325 – 335.
5. Shamos M. Closest-point problems / M. Shamos, D. Hoey // Proc. 16th IEEE Symp. on Foundations of Comput. Sci. – New York, 1975. – Oct. – P. 151 – 162.
6. Lee D.T. On k-nearest neighbors Voronoi diagrams in the plane / D.T. Lee // IEEE Transactions on Computers. – 1982. – P. 478 – 487.

7. Коряшкіна Л.С. Розширення одного класу нескінченновимірних оптимізаційних задач / Л.С. Коряшкіна // Вісник Черкаського університету. – 2015. – № 18 (351). – С. 28 – 36.
8. Koriashkina L.S. Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints and solving methods / L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko // Journal of Computational & Applied Mathematics. – 2015. – Vol. 119, N 2. – P. 15 – 32.
9. Cherevatenko A. On solutions properties of continuous linear problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints / A. Cherevatenko // Proc. of the 5th International youth science forum “Litteris et Artibus”, (Lviv, 26–28 November 2015). – Lviv: Lviv Polytechnic Publishing House, 2015. – P. 22 – 25.
10. Коряшкіна Л.С. Непрерывные линейные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств с ограничениями / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. – (Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»). – 2015. – Вип. 28. – С. 77 – 91.
11. Kiseleva E.M. The Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing the Voronoi Diagram and its Generalizations. II. Algorithms for constructing Voronoi Diagrams based on the theory of optimal partitioning of sets/E.Kiseleva,L.Koriashkina//Cybernetics and Systems Analysis.–2015.–Vol.51,Is.4.–P3–12
12. Chazelle B. An improved algorithm for constructing kth-order Voronoi diagrams / B. Chazelle, H. Edelsbrunner // Proc. of the first annual symposium on Computational geometry. – New York: ACM, 1985. – P. 228 – 234.
13. Rosenberger H. Order-k Voronoi diagrams of sites with additive weights in the plane / H. Rosenberger // Algorithmica. – 1991. – Vol. 6, Issue 1. – P. 490 – 521.
14. Boots B. Modeling retail trade areas using higher-order, multiplicatively weighted Voronoi diagrams / B. Boots, R. South // Journal of Retailing 73. – 1997. – P. 519 – 536.
15. Meyerhenke H. Constructing Higher-Order Voronoi Diagrams in Parallel / H. Meyerhenke // Proc. of the 21st European Workshop on Computational Geometry, (Eindhoven, 9–11 March 2005). – Eindhoven, 2005. – P. 123 – 126.
16. K-Voronoi diagrams computing in arbitrary domains / R. Cardenes, S. Warfield, A. Mewes [et al.] // IEEE International Conference on Image Processing (ICIP'03), (Barcelona, 14–17 Sept. 2003). – Barcelona, 2003. – P. 941 – 944.
17. Fischer I. Fast Approximation of High-Order Voronoi Diagrams and Distance Transforms on the GPU / I. Fischer, C. Gotsman // J. Graphics Tools. – 2006. – Vol. 4, N 11. – P. 39 – 60.
18. Cabello S. Higher-order Voronoi diagrams on triangulated surfaces / S. Cabello, M. Fort, J.A. Sellarès // Information Processing Letters. – Vol. 9, N 109. – P. 440 – 445.
19. Higher Order City Voronoi Diagrams / A. Gemsa, D. Lee, C.H. Liu [et al.] // Helsinki, 2012. – Proc. 13th Scandinavian Symposium and Workshops on Algorithm Theory (SWAT'12). – Lecture Notes in Computer Science.–Vol.7357.–P.59–70.
20. Lee I. Map segmentation for geospatial data mining through generalized higher-order Voronoi diagrams with sequential scan algorithms / I. Lee, C. Torpelund-Bruin, K. Lee // Expert Systems with Applications. – 2012. – Vol. 39, Issue 12. – P. 11135–11148.
21. Dong P. Generating and updating multiplicatively weighted Voronoi diagrams for point, line and polygon features in GIS / P.Dong// Computers&Geosciences.–2008.–Vol.34.–P.411–421.
22. Lee I. An order-k Voronoi approach to geospatial concept management within conceptual spaces/I.Lee,K.Lee//Applied Artificial Intelligence.–Taylor&Francis Group,2009.–P.522–537
23. Boots B. Modeling Retail Trade Areas Using Higher-Order, Multiplicatively Weighted Voronoi Diagrams/ B. Boots, R. South // Journal of Retailing.–1997.–Vol.4, N73.–P.519–536.
24. Коряшкіна Л.С. Об одном подходе к территориальной сегментации рынка услуг / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Современные информационные и коммуникационные технологии на транспорте, в промышленности и образовании: сб.

- матеріалов Междунар. науч.-практ. конф., (Днепропетровск, 16–17 декабря 2015 г.). – Днепропетровск: ДНУЖТ им. В.А. Лазаряна, 2015. – С. 81.
25. Mashtalir S.V. Stabilization of key frame descriptions with higher order Voronoi diagram / S.V. Mashtalir, O.D. Mikhnova // Бионика интеллекта: науч.-техн. журн. – Х.: Изд-во ХНУРЭ, 2013. – Вып. 1 (80). – С. 68 – 72.
 26. Lin I-J. Extraction of Video Objects via Surface Optimization and Voronoi Order / I. Lin, S. Kung // Journal of VLSI Signal Processing. – 2001. – Vol. 1, N 29. – P. 23 – 39.
 27. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение / Шор Н.З. – К.: Наукова думка, 1979. – 200 с.
 28. Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и Γ -алгоритмы / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкіна. – К.: Наукова думка, 2015. – 400 с.
 29. Коряшкіна Л.С. О способах задания функционала качества в задачах мультиплексного разбиения множеств / Л.С. Коряшкіна // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., (Брест, 22 – 23 окт. 2015 г.) / Под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест: БрГУ, 2015. – С. 40 – 41.

References

1. Preparata F., Shamos M. Computational Geometry: An Introduction. (1985) Springer. – 411 p.
2. Aurenhammer F. *Voronoi diagrams – a survey of a fundamental geometric data structure.* (1991) ACM Computing Surveys. – Vol. 23. – P. 345 – 405.
3. Okabe A., Boots B., Sugihara K. et al. *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams* (2000) Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons. – 696 p.
4. Kiseleva E.M., Koriashkina L.S. *Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations. I. Theoretical Foundations.* (2015) Cybernetics and Systems Analysis. – Vol. 51, Issue 3. – P. 325 – 335.
5. Shamos M., Hoey D. *Closest-point problems* (1975) Proc. 16th IEEE Symp. on Foundations of Comput. Sci / New York. – P. 151 – 162.
6. Lee D.T. *On k -nearest neighbors Voronoi diagrams in the plane* (1982) IEEE Transactions on Computers. – P. 478 – 487.
7. Koriashkina L.S. *Rozshirennia odnogo klasu neskinchenovimirnih optimizatsiynih zadach.* (2015) Journal of Cherkassky University. – № 18 (351). – P. 28 – 36.
8. Koriashkina L.S., Cherevatenko A.P. *Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints and solving methods* (2015) Journal of Computational & Applied Mathematics. – Vol. 119, N 2. – P. 15 – 32.
9. Cherevatenko A. *On solutions properties of continuous linear problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints.* (2015) Proc. of the 5th International youth science forum “Litteris et Artibus” / Lviv. – P. 22 – 25.
10. Koriashkina L.S., Cherevatenko A.P. *Neprevyivnyie lineynye zadachi optimalnogo multipleksnogo razbieniia mnozhestv s ogranicheniiami.* (2015) Journal of Kharkov National University V.N. Karazin (Series "Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems "). – Issue 28. – P. 77 – 91.
11. Kiseleva E.M., Koriashkina L.S. *The Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing the Voronoi Diagram and its Generalizations. II. Algorithms for constructing Voronoi Diagrams based on the theory of optimal partitioning of sets.* (2015) Cybernetics and Systems Analysis. – Vol. 51, Issue 4. – P. 3 – 12.
12. Chazelle B., Edelsbrunner H. *An improved algorithm for constructing k th-order Voronoi diagrams* (1985) Proc. of the first annual symposium on Computational geometry / New York. – P. 228 – 234.
13. Rosenberger H. *Order- k Voronoi diagrams of sites with additive weights in the plane* (1991) Algorithmica. – Vol. 6, Issue 1. – P. 490 – 521.

14. Boots B., South R. *Modeling retail trade areas using higher-order, multiplicatively weighted Voronoi diagrams* (1997) *Journal of Retailing*, 73. – P. 519 – 536.
15. Meyerhenke H. *Constructing Higher-Order Voronoi Diagrams in Parallel* (2005) *Proc. of the 21st European Workshop on Computational Geometry / Eindhoven*. – P. 123 – 126.
16. Cardenes R., Warfield S., Mewes A. et al. *K-Voronoi diagrams computing in arbitrary domains* (2003) *EEE International Conference on Image Processing (ICIP'03) / Barcelona*. – P. 941 – 944.
17. Fischer I., Gotsman C. *Fast Approximation of High-Order Voronoi Diagrams and Distance Transforms on the GPU* (2006) *J. Graphics Tools*. – Vol. 4, N 11. – P. 39 – 60.
16. Cabello S., Fort M., Sellarès J.A. *Higher-order Voronoi diagrams on triangulated surfaces* (2009) *Information Processing Letters*. – Vol. 9, N 109. – P. 440 – 445.
19. Gems A., Lee D., Liu C.H. et al. *Higher Order City Voronoi Diagrams*. (2012) – *Proc. 13th Scandinavian Symposium and Workshops on Algorithm Theory (SWAT'12)*. – Vol. 7357. – P. 59 – 70.
20. Lee I., Torpelund-Bruin C., Lee K. *Map segmentation for geospatial data mining through generalized higher-order Voronoi diagrams with sequential scan algorithms* (2012) *Expert Systems with Applications*. – Vol. 39, Issue 12. – P. 11135 – 11148.
21. Dong P. *Generating and updating multiplicatively weighted Voronoi diagrams for point, line and polygon features in GIS* (2008) *Computers & Geosciences*. – Vol. 34. – P. 411 – 421.
22. Lee I., Lee K. *An order-k Voronoi approach to geospatial concept management within conceptual spaces* (2009) *Applied Artificial Intelligence/Taylor & Francis Group*. – P. 522–537
23. Boots B., South R. *Modeling Retail Trade Areas Using Higher-Order, Multiplicatively Weighted Voronoi Diagrams* (1997) *Journal of Retailing*. – Vol. 4, N 73. – P. 519 – 536.
24. Koriashkina L.S., Cherevatenko A.P. *Ob odnom podhode k territorialnoy segmentatsii ryinka uslug*. (2015) *Modern information and communication technologies in transport, industry and education: Vol. of materials of international scientific-practical conf. / Dnipro*. – P. 81.
25. Mashtalir S.V., Mikhnova O.D. *Stabilization of key frame descriptions with higher order Voronoi diagram* (2013) *Bionics Intelligence: scientific and engineering journal / Kharkov*. – Issue 1(80). – P. 68 – 72.
26. Lin I-J., Kung S. *Extraction of Video Objects via Surface Optimization and Voronoi Order* (2001) *Journal of VLSI Signal Processing*. – Vol. 1, N 29. – P. 23 – 39.
27. Shor N.Z. *Metodyi minimizatsii nedifferentsiruemyih funktsiy i ih prilozhenie* (1979) *Naukova dumka / Kiev*. – 200 p.
28. Kiseleva E.M., Koriashkina L.S. *Nepreryivnyie zadachi optimalnogo razbieniia mnozhestv i r-algoritmyi* (2015) *Naukova dumka / Kiev*. – 400 p.
29. Koriashkina L.S. *O sposobah zadaniia funktsionala kachestva v zadachah multipleksnogo razbieniia mnozhestv*. (2015) *Computational methods, models and educational technologies: Vol. of materials of Intern. scientific-practical conf. / Brest*. – P. 40–41.

Summary

L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko

OPTIMAL VORONOI DIAGRAMS OF HIGHER ORDER OF DOUNDED SETS AND ALGORITHMS FOR THEIR CONSTRUCTION

The relevance of scientific researches related to the development and justification of efficient algorithms for constructing Voronoi diagrams of higher orders is evidenced by the practical applications of these structures: maps segmentation, geospatial intellectual analysis, retail trade areas modeling, analysis of video content and others. The paper provides a brief overview of scientific publications containing algorithms of constructing Voronoi diagrams of higher orders and their applications.

A new mathematical structure – Voronoi diagram of the k -th order of a finite number of generator points optimally placed in a bounded set $\Omega \subset E_n$ is presented. This diagram is a set of Voronoi cells of the k -th order $Vor(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = \bigcup_{l=1, \overline{L}} Vor_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})$, such that

$Vor_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})$ consists of points in space, that have as the nearest k centers $\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k}$, l .

$$Vor_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k}) = \left\{ x \in E_n : \max_{j \in \sigma_l} d(x, \tau_j) \leq \min_{j \in N \setminus \sigma_l} d(x, \tau_j) \right\}, l = \overline{1, L},$$

for which the functional

$$F(\{\tau_1, \dots, \tau_N\}, Vor(\tau_1, \dots, \tau_N)) = \sum_{l=1}^L \int_{Vor_l(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \dots, \tau_{j_k})} \sum_{i \in \sigma_l} d(x, \tau_i) \rho(x) dx$$

takes minimum value.

Various generalizations of Voronoi diagrams of the k -th order with optimal centers location (additively, multiplicatively weighted et al.) can be obtained by specifying different kinds of functions $d(x, \tau_i)$ and $\rho(x)$.

The concept of Voronoi diagram of the k -th order with additional integral constraints on power of generator points is also introduced. For these diagrams the possible economic interpretation is given and existence conditions are received.

All diagrams with optimal locating of generator points in a limited area are suggested to be briefly called optimal Voronoi diagrams of the k -th order.

An algorithm for constructing optimal Voronoi diagrams of higher orders is developed and theoretically justified. It is based on formulation and numerical solution of continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets with certain criteria of partition quality and constraints. A special feature of this approach is that for construction of a diagrams of the k -th order there is no need to pre-construct diagrams of orders $1 \dots (k-1)$. The results of constructing optimal Voronoi diagrams of higher orders are demonstrated.

Keywords: optimal Voronoi diagrams of higher orders, continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets, non-differentiable optimization.

Анотація

Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко

Оптимальні діаграми Вороного вищих порядків обмежених множин та алгоритми їх побудови

Представлені оптимальні діаграми Вороного вищих порядків для обмежених множин з простору E_n . Описано підхід до побудови таких діаграм, заснований на формулюванні і розв'язанні неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин з розміщенням центрів при певних критеріях якості розбиття та інтегральних обмеженнях. Наведено результати побудови діаграм Вороного N точок-генераторів, оптимально розміщених на обмеженій множині площини, за наявності інтегральних умов на їх потужності.

Ключові слова: оптимальні діаграми Вороного вищих порядків, неперервні задачі оптимального мультиплексного розбиття множин, недиференційовна оптимізація.

Одержано редакцією 08.06.2016

Прийнято до друку 13.06.2016