УДК 519.85 PACS 02.10.-v; 02.20.Sv; 02.30.Gp; 02.40.Pc; 04.20.Cv

О.О. Ємець, Т.М.Барболіна

ОПТИМІЗАЦІЯ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ: ПОЛІНОМІАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ

Стаття присвячена дослідженню задач оптимізації дробово-лінійної функції на множині перестановок. Показано можливість розв'язування таких задач шляхом розв'язування послідовності лінійних безумовних задач оптимізації на перестановках. Сформульовано й обґрунтовано відповідний алгоритм, доведена його поліноміальність.

Ключові слова: *дробово-лінійна оптимізація, комбінаторна оптимізація, задача на перестановках, поліноміальний алгоритм.*

Вступ

Інтерес до оптимізаційних задач з обмеженнями комбінаторного характеру, які привертають увагу багатьох дослідників (див., наприклад, [1]-[8]), призвів до виокремлення задач на так званих евклідових комбінаторних множинах ([4]-[8] та ін.). Важливий клас евклідових задач комбінаторної оптимізації становлять задачі на перестановках. Досліджено властивості опуклої оболонки загальної множини перестановок, розроблено алгоритми розв'язування окремих класів оптимізаційних задач. Зокрема, у [5], вивчаються задачі оптимізації дробово-лінійної функції на множині перестановок. Запропонований підхід до розв'язування задач без додаткових (некомбінаторних) обмежень ґрунтується на «лінеаризації» задачі, тобто зведенні її до лінійної умовної задачі на перестановках. Разом з тим для задач на розміщеннях було запропоновано інший підхід, який ідейно близький до параметричного методу розв'язування задач дробово-лінійного програмування [8]. Цей підхід, на відміну від лінеаризації, дозволяє побудувати поліноміальний алгоритм.

Мета статті: запропонувати й обґрунтувати поліноміальний алгоритм розв'язування дробово-лінійної задачі комбінаторної оптимізації на перестановках, який полягає у зведенні розв'язування вихідної задачі до розв'язування скінченної послідовності лінійних безумовних задач оптимізації на перестановках.

Надалі вживатимемо термінологію з [4] стосовно евклідових задач комбінаторної оптимізації. Зокрема, під мультимножиною розуміємо сукупність елементів, серед яких можуть бути однакові. Упорядкованою k-вибіркою з мультимножини $G = g_1,...,g_\eta$ називається набір $g_{i_1},...,g_{i_k}$, де $g_{i_j} \in G$, $i_j \neq i_t$ $\forall i_j, i_t \in J_\eta$, $\forall j,t \in J_k$ (тут і далі J_n позначає множину n перших натуральних чисел). Множину всіх упорядкованих k-вибірок з мультимножини G при $k=\eta$ називають загальною множиною перестановок E_k G .

Виклад основного матеріалу

Постановка задачі

У статті розглядається розв'язування задачі комбінаторної оптимізації дробово-лінійної функції $\Phi\ x\ = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0}$ на перестановках у такій постановці: знайти пару $\left\langle \Phi\ x^*\ , x^* \right\rangle$ таку, що

$$\Phi\ x^*\ = \min_{x \in E_k\ G} \Phi\ x \quad x^* = \arg\min_{x \in E_k\ G} \Phi\ x \tag{1}$$

де $x = \ x_1, ..., x_k\ \in R^k$, $c_j, d_j \in R^1 \quad \forall j \in J_k^0$ (тут і далі $J_r^s = \ s, s+1, ..., r\ $), $E_k\ G$ — загальна множина перестановок елементів мультимножини $G = \ g_1, ..., g_k\ $. Вважатимемо, що $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_k$. Нехай також для довільного $x \in E_k\ G$ виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0 > 0. \tag{2}$$

Нехай функція $\varphi\ x, h\ = \sum_{j=1}^{k} x_j \bar{c}_j(h)$, де $\bar{c}_j(h) = c_j - hd_j$. Разом із задачею (1) розглянемо задачу мінімізації на множині $E_k\ G$ функції $\varphi\ x, h$ при певному значенні h: знайти $\left\langle \varphi\ x^*, h\ , x^* \right\rangle$ таку, що

$$\varphi\ x^*, h\ = \min_{x \in E_k\ G} \sum_{j=1}^{k} x_j \bar{c}_j\ h\ , \ x^* = \arg\min_{x \in E_k\ G} \sum_{j=1}^{k} x_j \bar{c}_j\ h\ . \tag{3}$$

Твердження 1. Пара $\left\langle \Phi^*, x^* \right\rangle$ є розв'язком задачі (1) тоді і лише тоді, коли пара $\left\langle \Phi^* d_0 - c_0, x^* \right\rangle$ задовольняє (3) при $h = \Phi^*$.

Доведення. Виконання умови (3) при $h = \Phi^*$ означає, що для довільного $x \in E_k\ G$ виконується нерівність $\sum_{j=1}^{k}\ c_j - \Phi^* d_j\ x_j \geq \Phi^* d_0 - c_0 = \varphi(x, \Phi^*)$. З урахуванням умови **Ошибка! Источник ссылки не найден.** нерівність рівносильна $\dfrac{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0} \geq \Phi^*$. Крім того, умова $\Phi(x) = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0} = \Phi^*$ рівносильна $\sum_{j=1}^{k} c_j x_j + c_0 = \Phi^* \sum_{j=1}^{k} d_j x_j + \Phi^* d_0$, тобто

$\sum_{j=1}^{k}(c_j - \Phi^* d_j)x_j = \sum_{j=1}^{k} x_j \bar{c}_j(\Phi^*) = \varphi(x,\Phi^*) = \Phi^* d_0 - c_0$. Таким чином, $\langle \Phi^*, x^* \rangle$ є розв'язком задачі (1). Твердження доведено.

Загальна схема методу

Якщо елементи мультимножини G упорядковані за неспаданням $g_1 \le \ldots \le g_k$, а коефіцієнти функції $\varphi(x,h)$ при певному h задовольняють умову

$$\bar{c}_{q_1}(h) \ge \bar{c}_{q_2}(h) \ge \ldots \ge \bar{c}_{q_k}(h), \tag{4}$$

то, як випливає з [4], одна з мінімалей функції $\varphi(x,h)$ на множині $E_k(G)$ задовольняє умови

$$x^*_{q_j} = g_j \quad \forall j \in J_k. \tag{5}$$

Проте при іншому значенні h упорядкування коефіцієнтів може змінитися, точка (5) не буде мінімаллю в задачі (3). З'ясуємо, за яких умов виконується нерівність $\bar{c}_i(h) \ge \bar{c}_j(h)$, де $i < j$. Оскільки нерівність $\bar{c}_i(h) \ge \bar{c}_j(h)$ рівносильна $c_i - c_j \ge h(d_i - d_j)$, то при $d_i = d_j$ упорядкування величин $\bar{c}_i(h)$ і $\bar{c}_j(h)$ не залежить від значення h і збігається з упорядкуванням величин c_i і c_j. Якщо $d_i \ne d_j$ (а тоді з умови $d_1 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_k$ маємо, що $d_i > d_j$), то $\bar{c}_i(h) \ge \bar{c}_j(h)$ тоді і лише тоді, коли $h \le \frac{c_i - c_j}{d_i - d_j}$. Для всіх $i \in J_{k-1}$, $j \in J_k^{i+1}$ визначимо величини

$$\alpha(i,j) = \begin{cases} \dfrac{c_i - c_j}{d_i - d_j}, \text{ якщо } d_i \ne d_j; \\ M, \text{ якщо } d_i = d_j, c_i \ge c_j; \\ -M, \text{ якщо } d_i = d_j, c_i < c_j, \end{cases} \tag{6}$$

де M — достатньо велике додатне число. З урахуванням введеного позначення маємо, що при $|h| < M$ нерівність $\bar{c}_i(h) \ge \bar{c}_j(h)$ виконується тоді і лише тоді, коли $h \le \alpha(i,j)$.

Зазначимо, що при $d_1 = \ldots = d_k$ упорядкування коефіцієнтів функції $\varphi(x,h)$ не залежить від значення h, тому в подальшому розглядатимемо випадок, коли серед чисел $d_1, \ldots, d_k$ є різні. Тоді серед величин (6) існує принаймні одна, відмінна від $\pm M$.

Упорядкуємо величини (6) за неспаданням:

$$\alpha(i_1, j_1) = \ldots = \alpha(i_{r-1}, j_{r-1}) = -M < \alpha(i_r, j_r) \le \ldots \le \alpha(i_s, j_s) < M = \\ = \alpha(i_{s+1}, j_{s+1}) = \ldots = \alpha(i_m, j_m),$$

де $m = \dfrac{k(k-1)}{2}$. Позначимо $I(t) = \{h | \alpha(i_t, j_t) < h \le \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})\}$ для всіх $t \in J_{s-1}^r$. Тоді $\forall h \in I(t)$ маємо $h > \alpha(i_t, j_t) \ge \alpha(i_\tau, j_\tau)$ $\forall \tau \in J_t$, звідки $\bar{c}_{i_\tau}(h) < \bar{c}_{j_\tau}(h)$. Аналогічно внаслідок $h \le \alpha(i_\tau, j_\tau)$ $\forall \tau \in J_m^{t+1}$ отримуємо $\bar{c}_{i_\tau}(h) \ge \bar{c}_{j_\tau}(h)$.

Нехай $I(r-1) = \{h | h \le \alpha(i_r, j_r)\}$, $I(s) = \{h | h > \alpha(i_s, j_s)\}$. Тоді для довільного $h \in I(r-1)$ маємо $\bar{c}_{i_\tau}(h) \ge \bar{c}_{j_\tau}(h)$ $\forall \tau \in J_m^r$. Також з $\alpha(i_1, j_1) = ... = \alpha(i_{r-1}, j_{r-1}) = -M$ (якщо $r-1 \ge 1$) випливає, що $\bar{c}_{i_\tau}(h) < \bar{c}_{j_\tau}(h)$ $\forall \tau \in J_{r-1}^1$, при довільному h, в тому числі для всіх $h \in I(r-1)$. Аналогічно для будь-якого $h \in I(s)$ маємо — $\bar{c}_{i_\tau}(h) < \bar{c}_{j_\tau}(h)$ $\forall \tau \in J_s^1$, $\bar{c}_{i_\tau}(h) \ge \bar{c}_{j_\tau}(h)$ $\forall \tau \in J_m^{s+1}$ (якщо $s+1 \le m$).

Таким чином, $\forall h \in I(t)$, де $t \in J_s^{r-1}$, коефіцієнти функції $\varphi(x, h)$ задовольняють умови

$$\bar{c}_{i_\tau}(h) < \bar{c}_{j_\tau}(h) \ \ \forall \tau \in J_t^1, \ \bar{c}_{i_\tau}(h) \ge \bar{c}_{j_\tau}(h) \ \ \forall \tau \in J_m^{t+1}. \tag{7}$$

Зазначимо також, що коли для $h \in I(t)$ $(t \in J_{s-1}^r)$, $\tau \in J_m$, $i_\tau < j_\tau$ виконується нерівність $\bar{c}_{i_\tau}(h) \ge \bar{c}_{j_\tau}(h)$, то $h \le \alpha(i_\tau, j_\tau)$, тобто $\alpha(i_\tau, j_\tau) \ge \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$. Аналогічно з $\bar{c}_{i_\tau}(h) < \bar{c}_{j_\tau}(h)$ випливає $\alpha(i_\tau, j_\tau) \le \alpha(i_t, j_t)$

Умова (7) визначає упорядкування коефіцієнтів функції $\varphi(x, h)$. З умови (7) випливає, що існує такий набір індексів, що для всіх $h \in I(t)$ виконується умова (5).

Для визначення цих індексів можна обчислити значення коефіцієнтів функції $\varphi(x, h)$ для деякого $h \in I(t)$, $h \ne \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$. У цьому випадку $\bar{c}_i(h) = \bar{c}_j(h)$ тоді і лише тоді, коли ця рівність має місце при будь-якому h.

У цьому випадку мініналь у задачі (3) може бути визначено згідно з (5). Нехай точка x^* задовольняє умову (3), де $h \in I(t)$. Обчислимо $h^* = \Phi(x^*)$. Якщо також $h^* \in I(t)$, то x^* — також мініналь функції $\varphi(x, h^*)$ на множині $E_k(G)$. А тоді, як показано вище, $\langle h^*, x^* \rangle$ є розв'язком задачі (1).

Якщо $h^* \notin I(t)$, тобто x^* не є мінімаллю функції $\Phi(x)$ на множині $E_k(G)$, то перейдемо до розгляду наступного значення t. При цьому якщо $\alpha(i_{t+f-1}, j_{t+f-1}) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$, то $I(t+f) = \varnothing$. Тому покладаємо t рівним $t+f$, де f — найбільше число, для якого $\alpha(i_{t+f}, j_{t+f}) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$.

Оскільки $\bigcup\limits_{t \in J_s^{r-1}} I(t) = R^1$, то для деякого значення t буде знайдено точку x, що задовольняє (3) і для якої $\Phi(x) \in I(t)$. Як показано вище, ця точка є мінімаллю в задачі (1).

Отже, приходимо до такого алгоритму розв'язування задачі (1).

Крок 1. Покладаємо $n = 0$.

Крок 2. Обчислюємо згідно з (6) величини $\alpha(i, j)$ для всіх $i \in J_k$, $j \in J_k^{i+1}$. Упорядковуємо їх за неспаданням.

Крок 3. Покладаємо $t = r-1$, де r — номер першого зліва (найменшого) $\alpha(i, j) \ne -M$.

Крок 4. Обчислюємо коефіцієнти $\overline{c}_l(h)$ функції $\varphi(x,h)$ для деякого значення $h \in I(t)$, $h \neq \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$. Упорядковуємо їх за незростанням.

Крок 5. Формуємо мінімаль x^n згідно з (5) і обчислюємо $h^n = \Phi \ \ x^n$.

Крок 6. Якщо $h^n \in I \ \ t$, то процес завершується: пара $\left\langle h^n, x^n \right\rangle$ є розв'язком задачі (1). В іншому разі переходимо до кроку 7.

Крок 7. Знаходимо найбільше число f таке, що $\alpha(i_{t+f}, j_{t+f}) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$. Збільшуємо t до $t+f$ і переходимо до кроку 4.

Зазначимо, що мініаль, одержана у відповідності з наведеною вище схемою, може виявитися не єдиною. Для отримання решти розв'язків може бути використаний підхід, наведений у [8].

Оцінимо кількість операцій запропонованого алгоритму. При цьому кроки, виконання яких вимагає фіксованого часу, що не залежить від k, не розглядаються. Кількість операцій для пошуку елемента в масиві з n елементів й упорядкування такого масиву залежить від обраного алгоритму, але можна забезпечити асимптотичну верхню межу $O(n)$ та $O(n \log n)$ відповідно [10, 11] (зазначимо, при виборі відповідних алгоритмів пошуку та сортування ці оцінки можуть бути поліпшені).

Крок 2. Необхідно обчислити $m = \dfrac{k \ \ k-1}{2}$ величин $\alpha \ \ i, j$. Кількість операцій для їх упорядкування $O \ \ m \log m$, тобто $O \ \ k^2 \log k$.

Крок 4. Обчислення коефіцієнтів функції $\varphi(x,h)$ вимагає $O(k)$ операцій. Упорядкування коефіцієнтів може бути оцінене як $O \ \ k^2$.

Крок 5. Формування точки (5) й обчислення відповідного значення цільової функції вимагає часу $O \ \ k$.

Крок 7. Кількість операцій пошуку найбільшого числа f такого, що $\alpha(i_{t+f}, j_{t+f}) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$ дорівнює кількості ітерацій, які не виконуються при розв'язуванні задачі, тому можна вважати, що дії кроку 7 вимагають фіксованого часу.

Дії кроків 4–7 повторюються не більше $m+1$ разу. Таким чином, загальна оцінка циклічного процесу становить $O \ \ k^4$. Враховуючи також оцінку пунктів 1–4, маємо, що часова складність запропонованого алгоритму $O \ \ k^4$, тобто алгоритм є поліноміальним.

Таким чином, доведена така теорема.

Теорема. Наведений алгоритм розв'язування безумовної дробово-лінійної задачі комбінаторної оптимізації на перестановках (1) є поліноміальним.

Удосконалення алгоритму

Одержана вище оцінка складності алгоритму розв'язування дробово-лінійної задачі на перестановках може бути поліпшена як шляхом використання ефективніших алгоритмів сортування, так і удосконаленням упорядкування коефіцієнтів функції $\varphi(x,h)$ при $h \geq r$. У даному підпункті буде показано, що для деяких пар індексів відповідні коефіцієнти функцій $\varphi(x,h)$ і $\varphi(x,h')$ упорядковані однаково.

Нехай $t \in J_s^{r-1}$, причому $I(t) \neq \varnothing$, $l \in J_k$, точка x^n не є мінімаллю функції $\Phi(x)$ на множині $E_k(G)$. Тоді переходимо до розгляду проміжку $I(t+f)$, де f — найбільше число таке, що $\alpha(i_{t+1}, j_{t+1}) = ... = \alpha(i_{t+f}, j_{t+f})$. З'ясуємо тепер, за яких умов для пари індексів $l, w \in J_k$ відповідні коефіцієнти функцій $\varphi(x,h)$ і $\varphi(x,h')$, де $h \in I(t)$, $h' \in I(t+f)$ упорядковані порізному.

Спочатку доведемо допоміжне твердження, що встановлює деякі властивості величин (6). Для всіх $i \in J_k$, $j \in J_k$, $i \neq j$ позначимо

$$\overline{\alpha}(i,j) = \begin{cases} \alpha(i,j), \text{ якщо } i < j, \\ \alpha(j,i), \text{ якщо } i > j. \end{cases} \tag{8}$$

Зазначимо, що при $d_i \neq d_j$ маємо, що $\overline{\alpha}(i,j) = \dfrac{c_i - c_j}{d_i - d_j}$ як при $i > j$, так і при $j > i$.

Твердження 1. Нехай $i, j, l \in J_k$. Якщо $\overline{\alpha}(i,j) = \overline{\alpha}(j,l)$, причому $|\alpha(i,j)| < M$, то $\overline{\alpha}(i,j) = \overline{\alpha}(i,l)$ або для довільного $h \in R^1$ виконується рівність $\overline{c}_i(h) = \overline{c}_l(h)$.

Доведення. Оскільки $|\alpha(i,j)| < M$, то $d_i \neq d_j$. У цьому випадку умова $\overline{\alpha}(i,j) = \overline{\alpha}(j,l)$ рівносильна $\dfrac{c_i - c_j}{d_i - d_j} = \dfrac{c_j - c_l}{d_j - d_l}$, звідки отримуємо:

$$c_i d_j - c_i d_l - c_j d_j + c_j d_l = c_j d_i - c_l d_i - c_j d_j + c_l d_j ,$$

$$-c_j d_i - c_i d_l + c_i d_i + c_j d_l = -c_i d_j - c_l d_i + c_i d_i + c_l d_j ,$$

$$(c_i - c_j)(d_i - d_l) = (c_i - c_l)(d_i - d_j) .$$

Якщо $d_i = d_l$, то внаслідок $d_i \neq d_j$ маємо $c_i = c_l$, а тоді для довільного h маємо $\overline{c}_i(h) = c_i - hd_i = c_l - hd_l = \overline{c}_l(h)$. При $d_i \neq d_l$ отримуємо

$$\frac{c_i - c_j}{d_i - d_j} = \frac{c_i - c_l}{d_i - d_l} ,$$

тобто $\overline{\alpha}(i,j) = \overline{\alpha}(i,l)$. Твердження доведено.

Зауваження. Якщо рівність $\overline{c}_i(h) = \overline{c}_l(h)$ виконується для довільного $h \in R^1$, то $\overline{\alpha}(i,j) = M$. Дійсно, рівність $\overline{c}_i(h) = c_i - hd_i = c_j - hd_j = \overline{c}_l(h)$ може виконуватися при довільних значеннях h тоді і лише тоді, коли $c_i = c_j$ і $d_i = d_j$. А отже, на основі (6) і (8) маємо, що $\overline{\alpha}(i,j) = M$.

Твердження 2. Нехай $v, w \in J_k$, f — найбільше число таке, що $\alpha(i_{t+1}, j_{t+1}) = ... = \alpha(i_{t+f}, j_{t+f})$, де $t \in J_{s-1}^{r-1}$, $I(t) \neq \varnothing$. Нерівність $(\overline{c}_v(h) - \overline{c}_w(h))(\overline{c}_v(h') - \overline{c}_w(h')) \leq 0$ виконується для всіх $h \in I(t)$, $h' \in I(t+f)$ тоді і лише тоді, коли $\overline{\alpha}(v,w) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$ або $\overline{c}_l(h) = \overline{c}_w(h)$ $\forall h \in R^1$.

Доведення. Позначимо $A = (\bar{c}_v(h) - \bar{c}_w(h))(\bar{c}_v(h') - \bar{c}_w(h'))$. Не порушуючи загальності, можемо вважати, що $l < w$. Тоді $\bar{\alpha}(l,w) = \alpha(l,w)$. Якщо $\alpha(v,w) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$, то для довільного $h \in I(t)$ за означенням $I(t)$ маємо $h \le \alpha(v,w)$, отже $\bar{c}_v(h) - \bar{c}_w(h) \le 0$. У той же час для довільного $h' \in I(t+f)$ виконується нерівність $\bar{c}_v(h') - \bar{c}_w(h') \ge 0$ внаслідок $h' > \alpha(v,w)$. Таким чином $A \le 0$ $\forall h \in I(t)$, $\forall h' \in I(t+f)$. При $\bar{c}_v(h) = \bar{c}_w(h)$ $\forall h \in R^1$ очевидно $A = 0$.

Доведемо тепер необхідність. Нехай $A \le 0$ для всіх $h \in I(t)$, $h' \in I(t+f)$. Якщо умова $\bar{c}_v(h) = \bar{c}_w(h)$ $\forall \lambda \in R^1$ не виконується, то для деяких $h \in I(t)$ та $h' \in I(t+f)$ маємо $\bar{c}_v(h) \ne \bar{c}_w(h)$, $\bar{c}_v(h') \ne \bar{c}_w(h')$ і отже, $A < 0$.

Припустимо $\alpha(v,w) \ne \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$. Якщо $\alpha(v,w) < \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$, то $\alpha(v,w) \le \alpha(i_t, j_t) < h < h'$, звідки $\bar{c}_v(h) \le \bar{c}_w(h)$ і $\bar{c}_v(h') \le \bar{c}_w(h')$, тобто $A \ge 0$. При $\alpha(v,w) > \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$ маємо $\alpha(v,w) \ge \alpha(i_{t+f+1}, j_{t+f+1}) > h' > \alpha(i_{t+1}, j_{t+1}) \ge h$, тому $\bar{c}_v(h) \ge \bar{c}_w(h)$ і $\bar{c}_v(h') \ge \bar{c}_w(h')$, звідки також $A \ge 0$. Отримана суперечність і доводить твердження.

Покажемо тепер, як зменшити кількість операцій при упорядкуванні коефіцієнтів функції $\varphi(x,h')$, якщо індекси q_l задовольняють нерівність (4) при всіх $h \in I(t)$.

Зазначимо, що коли для пари індексів q_v, q_w виконується умова $\alpha(q_v, q_w) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$, то згідно зі співвідношеннями (7) маємо $c_{q_v}(h) \ge c_{q_w}(h)$ $\forall h \in I(t)$, причому внаслідок $|\alpha(i_{t+1}, j_{t+1})| < M$ умова $c_{q_v}(h) = c_{q_w}(h)$ виконується не для всіх $h \in R^1$. Таким чином, в умові (4) $v < w$.

Твердження 3. Нехай $t \in J_{s-1}^{r-1}$ таке, що $I(t) \ne \varnothing$; індекси q_τ задовольняють співвідношення (4), причому $\alpha(q_v, q_w) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$. Тоді для всіх $l, p \in J_w^v$ виконується одна з двох умов:

1) $\bar{\alpha}(q_l, q_p) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$;

2) $\bar{c}_{q_l}(h) = \bar{c}_{q_p}(h)$ для всіх $h \in R^1$.

Доведення. Нехай f — найбільше число таке, що $\alpha(i_{t+1}, j_{t+1}) = \alpha(i_{t+f}, j_{t+f})$, $h' \in I(t+f)$. Тоді з $h' > \alpha(i_{t+1}, j_{t+1}) = \alpha(q_v, q_w)$ випливає, що $\bar{c}_{q_v}(h') < \bar{c}_{q_w}(h')$.

У той же час для $l \in J_w^v$ з (4) отримуємо

$$\bar{c}_{q_v}(h) \ge \bar{c}_{q_l}(h) \ge \bar{c}_{q_w}(h). \tag{9}$$

Якщо $\bar{c}_{q_l}(h') \ge \bar{c}_{q_w}(h')$, то також $\bar{c}_{q_l}(h') > \bar{c}_{q_v}(h')$. Отже, $(\bar{c}_{q_l}(h) - \bar{c}_{q_v}(h))(\bar{c}_{q_l}(h') - \bar{c}_{q_v}(h')) \le 0$. Враховуючи, що $\bar{c}_{q_l}(h') \ne \bar{c}_{q_v}(h')$ з твердження 2 маємо, що $\bar{\alpha}(q_v, q_l) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$.

Нехай тепер $\bar{c}_{q_l}(h') < \bar{c}_{q_w}(h')$. Тоді $(\bar{c}_{q_l}(h) - \bar{c}_{q_w}(h))(\bar{c}_{q_l}(h') - \bar{c}_{q_w}(h')) \le 0$ і з твердження 2 випливає, що $\bar{\alpha}(q_l, q_w) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$. А тоді на основі твердження 1 отримуємо $\bar{\alpha}(q_v, q_l) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$ або $\bar{c}_{q_v}(h) = \bar{c}_{q_l}(h)$ $h \in R^1$. Твердження доведено.

Нехай v, w — відповідно найменше й найбільше числа такі, що $\bar{\alpha}(q_v, q_w) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$. З твердження 3 випливає, що для кожної пари індексів q_l, q_p, де $l, p \in J_w^v$, упорядкування коефіцієнтів $\bar{c}_{q_l}(h)$ і $\bar{c}_{q_p}(h)$ зміниться при $h' \in I(t+f)$. Якщо ж $l \in J_w^v$, $p \notin J_w^v$, то упорядкування коефіцієнтів $\bar{c}_{q_l}(h)$ і $\bar{c}_{q_p}(h)$ не зміниться. Таким чином, коефіцієнти, порядок яких змінюється, утворюють одну або кілька груп коефіцієнтів, розташованих підряд у співвідношенні (4). У кожній із таких груп порядок коефіцієнтів змінюється на протилежний.

Зауваження. Нехай $l \in J_{k-1}$, p — найбільше число таке, що $\bar{c}_{q_l}(h) = ... = \bar{c}_{q_p}(h)$ $\forall h \in R^1$ (тобто найбільше число таке, що $c_{q_l} = ... = c_{q_p}$ і $d_{q_l} = ... = d_{q_p}$). З твердження 3 випливає, що коли $\bar{\alpha}(q_l, q_{p+1}) \neq \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$, то для жодного $w \in J_k^{p+1}$ також $\bar{\alpha}(q_l, q_w) \neq \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$.

Отже, приходимо до такого алгоритму упорядкування коефіцієнтів функції $\varphi(x, h')$ з використанням порядку коефіцієнтів функції $\varphi(x, h)$.

Крок 1. Покладаємо $v = 1$.

Крок 2. Знаходимо найбільше число p таке, що $\bar{c}_{q_v}(h) = ... = \bar{c}_{q_p}(h)$ $\forall h \in R^1$.

Крок 3. Якщо $\bar{\alpha}(q_v, q_{p+1}) \neq \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$, то покладаємо v рівним $p+1$ і переходимо до кроку 7, інакше переходимо до кроку 4.

Крок 4. Знаходимо найбільше число w таке, що $\bar{\alpha}(q_v, q_w) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$.

Крок 5. Змінюємо порядок індексів $q_v, ..., q_w$ на протилежний.

Крок 6. Покладаємо v рівним $w+1$.

Крок 7. Якщо $v < k$, то повертаємося до кроку 2, інакше процедура перевпорядкування коефіцієнтів завершена.

Оскільки змінна w у ході виконання наведеного алгоритму набуває не більше k значень, а зміна порядку індексів $q_v, ..., q_w$ вимагає порядку $O(w - v + 1)$ операцій, то часова складність алгоритму $O(k)$. Тоді загальна оцінка циклічного процесу алгоритму розв'язування дробово-лінійної задачі на перестановках становить $O(k^3)$, а разом з тим і часова оцінка алгоритму в цілому становить $O(k^3)$.

Ілюстративний приклад

Розглянемо розв'язування задачі (1), де $\Phi(x) = \dfrac{-5x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4 + 3x_5 - 8}{3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 + 7}$, $G = \{3; 5; 6; 8; 9\}$.

Обчислимо величини (6):

- оскільки $d_1 = d_2 = 3$ і $c_1 = c_2 = -5$, то $\alpha(1;2) = M$; аналогічно $\alpha(1;3) = \alpha(2;3) = M$;
- $\alpha(1;4) = \alpha(2;4) = \alpha(3;4) = \dfrac{-5-1}{3-1} = -3$;
- $\alpha(1;5) = \alpha(2;5) = \alpha(3;5) = \dfrac{-5-3}{3-1} = -4$;
- $\alpha(4;5) = -M$, бо $d_4 = d_5$ і $c_4 < c_5$.

Упорядкування величин (6) за неспаданням має вигляд:

$$\alpha(4;5) = -M < \alpha(1;5) = \alpha(2;5) = \alpha(3;5) < \alpha(1;4) = \alpha(2;4) = \alpha(3;4) <$$
$$< M = \alpha(1;2) = \alpha(1;3) = \alpha(2;3).$$

У цьому випадку $r = 2$ ($i_r = 1$, $j_r = 5$) $s = 7$ ($i_s = 3$, $j_s = 4$). Сформуємо множини $I(t)$: $I(r-1) = I(1) = \{h \mid h \le \alpha(1;5) = -4\}$, $I(2) = \{h \mid -4 < h \le \alpha(2;5) = -4\} = \varnothing$, $I(3) = I(4) = \varnothing$, $I(5) = \{h \mid -4 < h \le -3\}$, $I(6) = I(7) = \varnothing$, $I(8) = I(s+1) = \{h \mid h > -3\}$.

Покладаємо $t = r - 1 = 1$. Покладемо $h = \alpha(1;5) - 1 = -5$ і обчислимо коефіцієнти $\overline{c}_l(h)$ для всіх $l \in J_k$: $\overline{c}_1(-5) = \overline{c}_2(-5) = \overline{c}_3(-5) = 10$, $\overline{c}_4(-5) = 6$, $\overline{c}_5(-5) = 8$. Таким чином, $\overline{c}_1(h) \ge \overline{c}_2(h) \ge \overline{c}_3(h) \ge \overline{c}_5(h) \ge \overline{c}_4(h)$ $\forall h \in I(1)$, тобто $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 3$, $q_4 = 5$, $q_5 = 4$. Мінімаллю функції $\varphi(x,h)$ є точка $x^1 = (3;5;6;9;8)$. Оскільки $\Phi(x^1) = -\dfrac{15}{22} > -4$, то ця точка не є мінімаллю в задачі (1), тому переходимо до наступного проміжку.

Змінюємо порядок коефіцієнтів лінійної функції:

- $v = 1$, оскільки $c_1 = c_2 = c_3 \ne c_5$ і $d_1 = d_2 = d_3$, то $p = 3$;
- внаслідок $\alpha(q_v, q_{p+1}) = \alpha(q_1, q_4) = \alpha(1;5) = -4 = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$ і $\alpha(q_1, q_5) = -3$ змінюємо порядок індексів q_1, q_2, q_3, q_4 на протилежний, отримуємо $q_1 = 5$, $q_2 = 3$, $q_3 = 2$, $q_4 = 1$;
- $v = 5$, тому перевпорядкування коефіцієнтів завершене.

Оскільки $\alpha(i_2, j_2) = \alpha(i_3, j_3) = \alpha(i_4, j_4) = -4$, то $f = 3$ і наступне значення t покладаємо рівним $t = 4$. Відповідно до встановленого вище для будь-якого $h \in I(4)$ маємо $\overline{c}_5(h) \ge \overline{c}_3(h) \ge \overline{c}_2(h) \ge \overline{c}_1(h) \ge \overline{c}_4(h)$ і $x^2 = (8;6;5;9;3)$. Оскільки $\Phi(x^2) = -\dfrac{85}{76} > -3$, то переходимо до наступного проміжку.

Для $v = 1$ маємо $p = 1$ і $\overline{\alpha}(5,3) = \alpha(3,5) = -4 \ne -3$; для $v = 2$ маємо $p = 4$ і $\alpha(q_2, q_5) = \alpha(3,4) = -3$, тобто порядок коефіцієнтів $\overline{c}_3(h), \overline{c}_2(h), \overline{c}_1(h), \overline{c}_4(h)$ змінюється на протилежний. При цьому t набуває значення 7 і для мінімалі $x^3 = (6;8;9;5;3)$ функції $\varphi(x,h)$ маємо $\Phi(x^3) = -\dfrac{109}{84} \in I(7)$. Таким чином, пара $\left\langle -\dfrac{109}{84}, (6;8;9;5;3) \right\rangle$ є розв'язком задачі (1).

Висновки та перспективи

У роботі запропоновано й обґрунтовано алгоритми розв'язування безумовної дробово-лінійної задачі комбінаторної оптимізації на перестановках. Розв'язування вихідної задачі зводиться до розв'язування скінченної послідовності лінійних безумовних задач оптимізації на перестановках. Доведено, що запропоновані алгоритми є поліноміальними, отримано оцінки їх часової ефективності. Отримані результати можуть використовуватися при розв'язуванні інших класів оптимізаційних задач, у тому числі, з різними видами невизначеності.

Література

1. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И.В. Сергиенко, М.Ф. Каспшицкая. – К. : Наук. думка, 1981. –288с.
2. Згуровский М.З. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами / М.З. Згуровский, А.А. Павлов. – К.: Наук. думка, 2010.– 573 с.

3. Сергиенко И. В. Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации / Л.Ф. Гуляницкий, С.И.Сиренко // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 5. — С. 71-83.
4. Семенова Н.В. Об одном подходе к решению векторных задач с дробно-линейными функциями критериев на комбинаторном множестве размещений / Н. В. Семенова, Л. Н. Колечкина, А. Н. Нагорная // Проблемы управления и информатики. - 2010. - № 1. - С. 131-144.
5. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г.Стоян, О.О.Ємець. – К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487
6. Ємець О.О. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними функціями / О.О. Ємець, Л.М. Колєчкіна. – К.: Наук. думка, 2005. – 117 с.
7. Емец О.А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях / О. А. Емец, О. А. Черненко. – К. : Наукова думка, 2011. – 154 с. – Режим доступа: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/467.
8. Емец О.А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О. А. Емец, Т. Н. Барболина . – К. : Наук. думка, 2008. – 159 с. – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/473.
9. Емец О.А. Лексикографическая комбинаторная оптимизация дробно-линейной функции на размещениях / О.А. Емец ,Т.Н. Барболина // Матеріали Вісімнадцятого Міжнародного науково-практичного семінару "Комбінаторні конфігурації та їх застосування" (Кіровоград, 15-16 квітня 2016 р.). – Кіровоград, 2016. – С. 67-77.
10. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. — М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. — 1296 с.
11. Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А.Ахо, Д.Хопкрофт, Д.Ульман. — М. : Мир, 1979. — 536 с.

Аннотация

О.А. Емец, Т.Н. Барболина

Оптимизация дробно-линейной функции на перестановках: полиномиальный алгоритм

Статья посвящена исследованию задач оптимизации дробно-линейной функции на множестве перестановок. Показана возможность решения таких задач путем решения последовательности линейных безусловных задач оптимизации на перестановках. Сформулирован и обоснован соответствующий алгоритм, доказана его полиномиальность.

Ключевые слова: *дробно-линейная оптимизация, комбинаторная оптимизация, задача на перестановках, полиномиальный алгоритм.*

Summary

O.O. Iemets, T.M.Barbolina

Optimization of linear-fractional function on permutations: polynomial algorithm

The paper is devoted a research of optimization problems with linear-fractional function on the set of permutations. We show the possibility to solve such problem by the finite sequence of linear unconditional optimization problems on permutation. Also we formulate and substantiate the corresponding algorithm, prove its polynomiality.

Keywords: *fractional-linear optimization, combinatorial optimization, permutation problem, polynomial algorithm.*

Стаття надійшла 20.06.016
Прийнято до друку 27.06.016